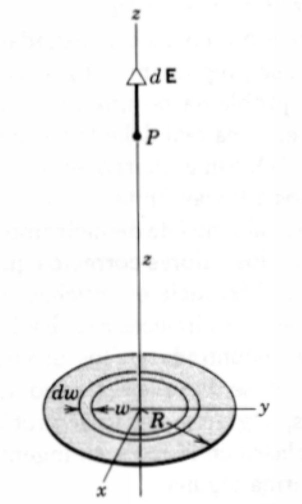

Figura 11 Un disco con una carga uniforme en su superficie. El anillo de radio w y anchura dw da una contribución $d\mathbf{E}$ al campo eléctrico en un punto P en el eje del disco. El campo total en P es la suma de todas esas contribuciones.

$$E_z = \int dE_z = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_0^R (z^2 + w^2)^{-3/2}(2w)dw. \quad (26)$$

Esta integral es de la forma $\int X^m \, dX$, en donde $X = (z^2 + w^2)$, $m = -\frac{3}{2}$, y $dX = (2w)dw$. Integrando, obtenemos

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \quad \text{(disco cargado)} \quad (27)$$

como el resultado final. Esta ecuación sólo es válida para $z > 0$ (véase el Prob. 28).

Para $R \gg z$, el segundo término dentro del paréntesis de la ecuación 27 tiende a cero, por lo cual esta ecuación puede reducirse a

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{(lámina infinita).} \quad (28)$$

Éste es el campo eléctrico generado por una lámina uniforme de carga de extensión infinita. Es un resultado importante, el cual deduciremos en el capítulo siguiente empleando un enfoque diferente. Nótese que la ecuación 28 también se aplica cuando $z \to 0$ en la ecuación 27; para tales puntos cercanos, el disco cargado se comporta realmente como si fuese de extensión infinita. En el problema 24 le pedimos demostrar que la ecuación 27 se reduce al campo de una carga puntual cuando $z \gg R$.

Línea de carga infinita

La figura 12 muestra una sección de una línea infinita de carga cuya densidad de carga lineal tiene el valor constante λ. ¿Cuál es el campo $\mathbf{E}$ a una distancia y de la línea?

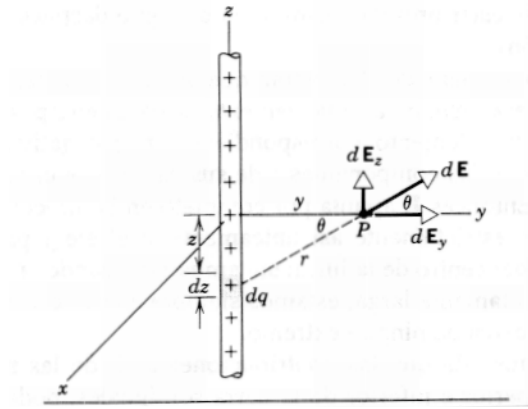

Figura 12 Una línea de carga uniforme de gran longitud. El elemento de longitud dz da una contribución $d\mathbf{E}$ al campo eléctrico en el punto P, cuya distancia y a partir de la línea, es pequeña comparada con la longitud de la línea.

La magnitud de la contribución del campo dE debida al elemento de carga $dq(= \lambda \, dz)$ está dada, usando la ecuación 12, por

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda \, dz}{y^2 + z^2}. \quad (29)$$

El vector $d\mathbf{E}$, como lo muestra la figura 12, tiene las componentes

$$dE_y = dE \cos\theta \quad \text{y} \quad dE_z = dE \operatorname{sen}\theta.$$

Las componentes y y z del vector resultante $\mathbf{E}$ en el punto P están dadas por

$$E_y = \int dE_y = \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \cos\theta \, dE \quad (30a)$$

y

$$E_z = \int dE_z = \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \operatorname{sen}\theta \, dE. \quad (30b)$$

Aquí nuevamente podemos usar un argumento de simetría para simplificar el problema. Si la línea de carga se girara alrededor del eje z, la situación física no cambiaría, por lo que no puede entonces haber una componente de $\mathbf{E}$ en la dirección tangencial al punto P (la dirección x de la fig. 12, perpendicular al plano de la figura). Además, si la línea de carga fuese girada en 180° alrededor del eje y, intercambiando por tanto las porciones de la línea de carga a lo largo de las direcciones positiva y negativa de z, tampoco cambiaría el arreglo físico; por tanto, no puede haber una componente z del campo eléctrico (el cual, de estar presente, cambiaría de signo después de la rotación).

Otra manera de demostrar que E_z debe ser cero, es considerar que, para cada elemento de carga en z positivo existe un elemento correspondiente en z negativo, de modo que las componentes z de sus campos se cancelan en P. Entonces **E** apunta por completo en la dirección y. Esto es estrictamente así únicamente si el eje y pasa a través del centro de la línea; sin embargo, cuando la línea es infinitamente larga, estamos siempre en su "centro" y nunca cerca de ningún extremo.

A causa de que las contribuciones a E_y de las mitades superior e inferior de la barra son iguales, podemos escribir

$$E = E_y = 2 \int_{z=0}^{z=\infty} \cos\theta \, dE. \tag{31}$$

Nótese que hemos cambiado el límite inferior de integración y que hemos introducido un factor de 2 compensatorio. Al sustituir la expresión para dE de la ecuación 29 en la ecuación 31 nos da

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{z=0}^{z=\infty} \cos\theta \frac{dz}{y^2 + z^2}. \tag{32}$$

De la figura 12 vemos que las cantidades θ y z no son independientes. Podemos eliminar a una de ellas, digamos a z, usando la relación (véase la figura)

$$z = y \tan\theta.$$

Al diferenciar, obtenemos

$$dz = y \sec^2\theta \, d\theta.$$

Sustituyendo estas dos expresiones llegamos finalmente a

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \cos\theta \, d\theta.$$

El lector debe comprobar este paso cuidadosamente, observando que los límites deben estar ahora en θ y no en z. Por ejemplo, cuando $z \to +\infty$, $\theta \to \pi/2$, como lo muestra la figura 12. Esta ecuación se integra sin dificultad quedando

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}. \tag{33}$$

Este problema tiene una *simetría cilíndrica* con respecto al eje z. En todos los puntos del plano xy a una distancia r de la línea de carga, el campo tiene el valor

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{(línea infinita)}, \tag{34}$$

en donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia desde la línea de carga hasta el punto P en las coordenadas x,y.

Usted, lector, se preguntará, quizás, cuál es la utilidad de resolver un problema de una línea infinita de carga cuando cualquier línea real debe tener una longitud finita (véase el Prob. 31). Sin embargo, en los puntos suficientemente cercanos a líneas finitas y lejos de sus extremos, la ecuación que acabamos de deducir rinde resultados que están tan cerca de los valores correctos que puede hacerse caso omiso de la diferencia en muchas situaciones prácticas. Por lo general, es innecesario resolver exactamente cada geometría encontrada en los problemas prácticos. Realmente, si no se llevasen a cabo idealizaciones o aproximaciones, la gran mayoría de problemas significativos de todas clases en física y en ingeniería no podrían resolverse de forma alguna.

28-6 UNA CARGA PUNTUAL EN UN CAMPO ELÉCTRICO

En las secciones precedentes hemos considerado la primera parte de la interacción carga $\rightleftarrows$ campo $\rightleftarrows$ carga: Dado un conjunto de cargas, ¿cuál es el campo eléctrico resultante? En esta sección y en la próxima consideraremos la segunda parte: ¿qué sucede cuando ponemos una partícula cargada en un campo eléctrico conocido?

Partiendo de la ecuación 2, sabemos que una partícula de carga q en un campo eléctrico **E** experimenta una fuerza **F** dada por

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

Para estudiar el movimiento de la partícula en el campo eléctrico, todo lo que necesitamos es emplear la segunda ley de Newton, $\Sigma\,\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde la fuerza resultante sobre la partícula incluye la fuerza eléctrica y a cualquier otra fuerza que pudiera actuar.

Como lo hicimos en nuestro estudio original de las leyes de Newton, podemos lograr una simplificación si consideramos el caso en que la fuerza sea constante. Por lo tanto, comenzaremos considerando los casos en que el campo eléctrico y la fuerza eléctrica correspondiente sean constantes. Una situación tal puede lograrse en la práctica al conectar las terminales de una batería a un par de placas metálicas paralelas que estén aisladas entre sí, tema que estudiaremos en el capítulo siguiente. Si la distancia entre las placas es pequeña comparada con sus dimensiones, el campo en la región entre las placas será muy aproximadamente uniforme, excepto cerca de los bordes. En los problemas muestra siguientes, supondremos que el campo existe sólo en la región entre las placas y cae súbitamente a cero cuando la partícula deja esa región. En realidad, el campo disminuye rápidamente con la distancia cuando