

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE FISICA

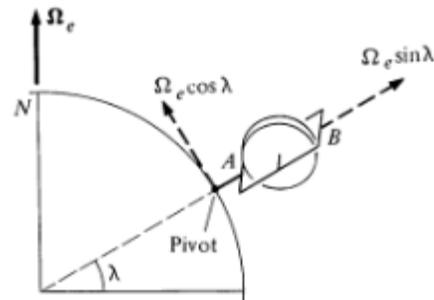
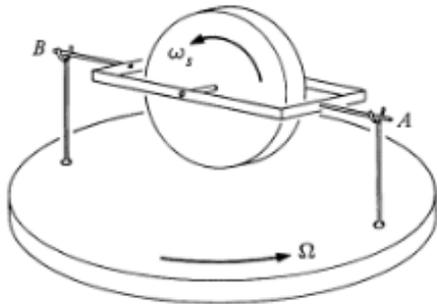
Fis1513 - Estática y Dinámica
Primer Semestre 2011

Tarea

Gyrocompass (válido por dos controles)

Durante siglos el ser humano ha ideado ingeniosos instrumentos de navegación para explorar el mar, el cielo y el espacio. Por ejemplo, algunos de estos instrumentos son el compás o brújula magnética y el compás giratorio. La brújula magnética señala el polo magnético mediante una aguja imantada y a pesar de que constituye un útil punto de referencia, tiene la desventaja de que el polo norte magnético se desplaza un promedio de 55 km por año hacia el occidente. En cambio, el compás giratorio es capaz de señalar el verdadero polo norte o el eje de rotación de la tierra. Hoy aviones y barcos utilizan modernos compases giratorios capaces de determinar la dirección del polo norte con una precisión del orden de 0.1 grados.

En esta tarea revisaremos el principio fundamental que permite al girocompas encontrar la dirección del norte verdadero. Considere el mecanismo que muestra la figura izquierda. Un disco masivo puede girar con velocidad angular ω_s en torno a uno de sus ejes principales gracias a la estructura que lo soporta. A su vez la estructura puede rotar en torno a su eje AB mediante los soportes en sus extremos. Por último, esta estructura se encuentra sobre una plataforma circular que gira en torno al eje z con velocidad angular Ω constante.



- (a) (1.5 puntos) Escriba el momento angular total del disco en función de los ejes principales instantáneos. Para esto considere un sistema de coordenadas esféricas en donde el vector

unitario \hat{r} coincide con el eje principal del disco que es perpendicular al plano del disco y el vector unitario $\hat{\theta}$ apunta en dirección \vec{BA} . Demuestre que el momento angular instantáneo se puede escribir como,

$$\vec{L} = L_r \hat{r} + L_\theta \hat{\theta} + L_\phi \hat{\phi}$$

Encuentre las expresiones para L_r , L_θ y L_ϕ .

- (b) (1.5 puntos) Suponga que el eje AB no experimenta ningún tipo de torque o fricción, por lo tanto el torque a lo largo del eje $\hat{\phi}$ es cero. Utilizando la ecuación de torque $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$, obtenga la componente de esta ecuación en $\hat{\phi}$. Note que no solo las variables θ y ϕ dependen del tiempo, sino que también los vectores unitarios $\hat{r}(t)$, $\hat{\theta}(t)$ y $\hat{\phi}(t)$. Suponga que $\Omega \ll \omega_s$ (desprecie términos proporcionales a Ω^2).
- (c) (1 punto) Utilizando el resultado de la parte anterior, calcule el período de oscilación del movimiento asociado con la variable θ para ángulos pequeños. Si el espesor del disco es muy pequeño, calcule numéricamente el período de oscilaciones si el disco gira con velocidad angular $\omega = 2\pi 1000 \text{ s}^{-1}$ y $\Omega = 2\pi 0.0005 \text{ s}^{-1}$.
- (d) (0.5 punto) Suponga ahora que existe fricción en los soportes A y B de manera que a lo largo del eje $\hat{\phi}$ existe un torque que se opone al movimiento. Este torque se puede escribir como

$$\vec{\tau} = -c\dot{\theta}\hat{\phi}$$

donde c es una constante de proporcionalidad y tiene unidades de momentum angular. Escriba nuevamente la ecuación para la componente $\hat{\phi}$. Describa con palabras el movimiento del girocompass. En qué dirección terminará apuntando el eje perpendicular al plano del disco?

- (e) (0.5 punto) Suponga ahora que deseamos utilizar este principio para encontrar la dirección del norte verdadero. Como utilizaría este artefacto para cumplir este objetivo? Hint: le puede ser útil leer el Capítulo 7 del libro guía de Kleppner. Cuál sería el período de oscilación del movimiento asociado con la variable θ si el girocompas se encuentra en el ecuador? Asuma $\omega_s = 2\pi 1000 \text{ s}^{-1}$.
- (f) (1 punto) Grafique el período de oscilación en función de la latitud terrestre. Qué concluye sobre el período de oscilación a medida que la latitud aumenta? Comente sobre la efectividad del compas giratorio para estas latitudes.