CÁLCULO I	Examen de Julio 04-07-2011

Nombre: ____________________ **1$^{\text{er}}$ Apellido:** ____________________ **2$^{\text{o}}$ Apellido:**	**Núm. Matrícula**	**NOTA**

Ejercicio 1.

1-1.-

1-1.1- Dar la definición de función integrable Riemann.

1-1.2- Enunciar el teorema del valor medio del cálculo integral.

1-2.- Responder a las siguientes cuestiones:

1-2.1- Si $0 < a < b$, estudiar si $1 - \dfrac{a}{b} < \log\left(\dfrac{b}{a}\right) < \dfrac{b}{a} - 1$.

1-2.2- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$ y sea

$$F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} f(t)\ e^{-t}\ dt.$$

Hallar los intervalos de $\mathbb{R}$ en los cuales F es inyectiva. ¿Existe inversa global en $\mathbb{R}$? Calcular $(F^{-1})'(F(0))$.

1-2.3- Calcular .

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen}^2 t}\ dt$$

1-3.- Sea

$$f(x) = \frac{x}{4 - x^2}.$$

1-3.1- Calcular los intervalos de crecimiento, extremos, asíntotas, puntos de inflexión y la convexidad de f.

1-3.2- Sea

$$a_0 = \frac{1}{2} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{4 - {a_n}^2} \quad n \geq 0$$

a) Estudiar si (a_n) es una sucesión monótona.

b) Analizar si (a_n) es una sucesión convergente y, en caso afirmativo, calcular su límite.

(Puntuación: 4 puntos)

Solución:

1-1.- Consultar textos recomendados.

1-2.-

1-2.1-

Sea $f(x)=\log x$ con $x\in[a,b]$. Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial se tiene

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\alpha)\Leftrightarrow\frac{\log b-\log a}{b-a}=\frac{1}{\alpha}\qquad \alpha\in(a,b)$$

luego

$$\frac{1}{b}<\frac{\log b-\log a}{b-a}<\frac{1}{a}\Leftrightarrow\frac{b-a}{b}<\log\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b-a}{a}\Leftrightarrow 1-\frac{a}{b}<\log\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b}{a}-1.$$

y la afirmación es verdadera.

1-2.2- Para hallar en que intervalos de $\mathbb{R}$ la función F es inyectiva comenzaremos estudiando su monotonía. La función F es derivable por el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena y su derivada es

$$F'(x)=f(\operatorname{sen}x)e^{-\operatorname{sen}x}\cos x.$$

Al ser f una función continua y distinta de 0 en $\mathbb{R}$ podemos garantizar, por el teorema de Bolzano, que f no cambia de signo en $\mathbb{R}$. Supongamos por ejemplo que $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)>0$, al ser $e^{-\operatorname{sen}x}>0$, resulta que:

$$F'(x)<0\Leftrightarrow\cos x<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)+k\pi\qquad\text{con } k \text{ un número entero impar}$$

Por lo que podemos concluir que F es estrictamente monótona y por tanto inyectiva en cada uno de los intervalos siguientes

$$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\qquad\text{con } k\in\mathbb{Z}.$$

La función F admite inversa en los intervalos citados anteriormente y claramente F no tiene inversa global en $\mathbb{R}$ ya que$F(x+2\pi)=F(x)$.
De acuerdo con el teorema relativo a la derivada de la función inversa se tiene:

$$\left(F^{-1}\right)'(F(0))=\frac{1}{F'(F^{-1}(F(0)))}=\frac{1}{F'(0)}=\frac{1}{f(0)}.$$

1-2.3- Observemos que la integral dada es impar en el seno. Haciendo el cambio de variable $u=\cos t$ la integral dada se trasforma en

$$I\ =\ \int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen}t}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt=\int_1^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{u^2-2}\,du=\int_1^{\sqrt{2}/2}\frac{A}{u-\sqrt{2}}\,du+\int_1^{\sqrt{2}/2}\frac{B}{u+\sqrt{2}}.$$

donde $A=\sqrt{2}/4$ y $B=-\sqrt{2}/4$. De este modo resulta que

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\log\left|u-\sqrt{2}\right|_1^{\sqrt{2}/2}-\log\left|u+\sqrt{2}\right|_1^{\sqrt{2}/2}\right]\\
I &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\log\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right|-\log\left|1-\sqrt{2}\right|-\log\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right|+\log\left|1+\sqrt{2}\right|\right]\\
I &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\log\left(\frac{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}}\right)+\log\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)\right]\\
I &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\log\left(\frac{1}{3}\right)+\log\left(3+2\sqrt{2}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{4}\log\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

1-3.-

1-3.1- La función f es continua , derivable e impar en su dominio ($\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$), por tanto la gráfica de f es simétrica respecto al origen. Para estudiar el crecimiento y la convexidad utilizaremos respectivamente f' y f''. Tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4+x^2}{(4-x^2)^2} > 0 \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\} \\ f''(x) &= \frac{2x\,(4-x^2)^2 + 4x\,(4+x^2)\,(4-x^2)}{(4-x^2)^4} = 2x\frac{x^2+12}{(4-x^2)^3} \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,2\} \end{aligned}$$

luego

$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in (-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$$

$$f''(x) \text{ es } \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in (-\infty,-2)\cup(0,2) \\ < 0 & \text{si } x \in (-2,0)\cup(2,+\infty) \end{cases}$$

de donde se obtiene que f es estrictamente creciente en su dominio y estrictamente convexa en los intervalos $(-\infty,-2)$ y $(0,2)$ y estrictamente cóncava en $(-2,0)$ y $(2,+\infty)$, presentando por consiguiente un punto de inflexion en $x=0$. Las asíntotas de la función son $x=2$ (y por simetría $x=-2$) y también $y=0$ ya que se tiene que

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

1-3.2-
a) Se calculan previamente los puntos fijos de la función $f(x) = x/(4-x^2)$ es decir, las soluciones de la ecuación $f(x)=x$:

$$\frac{x}{4-x^2} = x \quad \text{o bien} \quad 3x - x^3 = 0$$

que son $x=0$ y $x=\pm\sqrt{3}$. Consideramos la función f definida en el intervalo $[0,\sqrt{3}]$ en el cual la función es creciente y por tanto $f\left([0,\sqrt{3}]\right) = [f(0), f(\sqrt{3})] = [0,\sqrt{3}]$. Un razonamiento por inducción prueba que la sucesión (a_n) es monótona y además, puesto que

$$a_1 = \frac{2}{15} < \frac{1}{2} = a_0,$$

es monótona decreciente.

b) Como $f\left([0,\sqrt{3}]\right) = [0,\sqrt{3}]$ y además $a_0 > 0$, todos los elementos a_n de la sucesión son positivos. Por otro lado la sucesión es decreciente y, como todos sus elementos son positivos, está acotada inferiormente por 0, de donde se deduce que la sucesión tiene límite. En el intervalo $[0,\sqrt{3}]$ el único punto fijo de la sucesión es 0, de donde se deduce que el límite debe coincidir con este único punto fijo. Luego $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

CÁLCULO I	Examen de Julio 04-07-2011

Nombre: ____________________

1$^{\text{er}}$ Apellido: ____________________

2$^{\text{o}}$ Apellido:

Núm. Matrícula	NOTA

Ejercicio 2.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| > c \\ \\ a + bx^2 & \text{si} \quad |x| \leq c \qquad (c > 0) \end{cases}$$

2-1- Calcular los valores reales a, b en función del valor real c para que exista $f'(c)$.

2-2- Fijado el valor de c. Determinar el número de soluciones de la ecuación $f(x) = k$ dependiendo de los valores de k.

(Puntuación: 3 puntos.)

Solución:

2.1.- Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{|x|} \text{ para } x < -c \text{ y } x > c \\ f(x) &= a + bx^2 \text{ si } -c < x < c \end{aligned}$$

puesto que $c > 0$.

Primero imponemos la condición de que f sea continua en c:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c^-} f(x) &= a + bc^2 = f(c) \\ \lim_{x \to c^+} f(x) &= \frac{1}{|c|} = \frac{1}{c} \end{aligned}$$

De manera que ha de verificarse

$$a + bc^2 = \frac{1}{c}$$

En segundo lugar imponemos que los límites laterales de la derivada de f en c coincidan, teniendo en cuenta que $\forall x > c \quad f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x \to c^+} f'(x) = \lim_{x \to c^+} -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{c^2}$$

$$\lim_{x \to c^-} f'(x) = \lim_{x \to c^-} 2bx = 2bc$$

y se tendrá que cumplir:

$$2bc = -\frac{1}{c^2}$$

Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} a + bc^2 = \frac{1}{c} \\ 2bc = -\frac{1}{c^2} \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación $b = -\dfrac{1}{2c^3}$ y sustituyendo en la primera ecuación $a = \dfrac{1}{c - bc^2} = \dfrac{3}{2c}$.
Luego tomados $a = \dfrac{3}{2c}$ y $b = -\dfrac{1}{2c^3}$ resulta que f es derivable en c.

2.2.- Como

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \div \forall k > 0 \quad \exists \alpha > 0 / \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ con } |x| > \alpha \quad f(x) < k$$

se tiene que

$$g(x) = f(x) - k < 0 \quad \forall x \in (-\alpha, \alpha).$$

Al ser $f(0) = a > 0$ resulta que f tiene al menos dos ceros si $k < a$.
Analizamos ahora la monotonía de f:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & x > c \\ \dfrac{1}{x^2} & x < c \\ -bx & -c \le x \le c \end{cases}$$

Por tanto $f'(x) = 0 \iff x = 0$ con $f(0) = a$.
Luego la función f crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, \infty)$, y podemos así concluir que la función g tiene dos únicos ceros si $k < a$, un único cero en $x = 0$ si $k = a$ y ningún cero si $k < a$.

CÁLCULO I	Examen de Julio 04-07- 2011

Nombre: ______________________

1$^{\text{er}}$ Apellido: ______________________

2$^{\text{o}}$ Apellido:

Núm. Matrícula

NOTA

Ejercicio 3.

Sean f y $g : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \exp(f(x)).$$

3.1- Estudiar la derivabilidad de f hasta el orden 2 en su dominio.
3.2- Hallar los valores de $g'(0)$ y $g''(0)$.

3.3- Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left[(1+x)^{1/x} - e + \frac{e}{2}x\right].$$

(Puntuación: 3 puntos.)

Solución:

3.1.-Estudiamos primero la derivabilidad de f en el origen, teniendo en cuenta la fórmula de Taylor:
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
Así:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\log(1+x)}{x} - 1}{x} = \\ \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por su parte
$$\forall x \neq 0 \quad f'(x) = \frac{\dfrac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

Luego f es derivable en $\mathbb{R}^2$.
Ahora nos centramos en la derivada segunda en $x = 0$ sabiendo que:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - (1+x)\log(1+x) + \frac{x^2}{2}(1+x)}{x^3(1+x)}$$

Como el numerador

$$\begin{aligned} x - (1+x)\log(1+x) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} &= x - (1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^4) = \\ & \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

sustituyendo

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{2}{3}.$$

Además f es dos veces derivable en $(-1,\infty) - \{0\}$ puesto que la función f' es cociente de funciones derivables.
Luego f es dos veces derivable en $\mathbb{R}$.

3.2.- La función

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp(f(x)) = e^{\frac{\log(1+x)}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \forall x > -1 \text{ con } x \neq 0 \\ g(0) &= e \end{aligned}$$

es dos veces derivable en $\mathbb{R}$ al ser $g = \exp \circ f$ composición de funciones dos veces derivables en $\mathbb{R}$.
Aplicando la regla de la cadena

$$g'(x) = e^{f(x)} f'(x)$$

$$g''(x) = e^{f(x)}(f'^2(x) + f''(x)).$$

Luego en el origen

$$g'(0) = e^{f(0)} f'(0) = -\frac{e}{2}$$

$$g''(0) = e^{f(0)}(f'(0)^2 + f''(0)) = e\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) = \frac{11e}{12}.$$

3.3.- El polinomio de Taylor de orden 2 de g en el origen es

$$P(x) = P_{2,0}(g;x) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2,$$

de manera que se cumple:

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - P(x)}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - e + \dfrac{e}{2}x - \dfrac{11e}{24}x^2}{x^2} = 0.$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \dfrac{e}{2}x}{x^2} = \frac{11e}{24}.$$