Teorema: Sea V espacio vectorial y $U_1, \ldots, U_m$ subespacios vectoriales de V y

$$\sum_{i=1}^{m-1} \dim(U_i \cap U_m) = \dim\left(\sum_{i=1}^{m-1} (U_i \cap U_m)\right)$$

entonces se cumple que:

$$\dim(U_1 + \cdots + U_m) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_m - \sum_{i=1, j>i}^{m} \dim(U_i \cap U_j).$$

Demostración: Inducción en m.
Para $m = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + U_2) &= \dim U_1 + \dim U_2 - \sum_{i=1, j>i}^{2} \dim(U_i \cap U_j) \\ &= \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) \end{aligned}$$

Sea válido el teorema para m-1 subespacios,

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + \cdots + U_m) &= \dim((U_1 + \cdots U_{m-1}) + U_m) \\ \dim((U_1 + \cdots + U_{m-1}) + U_m) &= \dim(U_1 + \cdots + U_{m-1}) + \dim U_m - \dim((U_1 + \cdots + U_{m-1}) \cap U_m) \\ \dim((U_1 + \cdots + U_{m-1}) + U_m) &= \dim(U_1 + \cdots + U_{m-1}) + \dim U_m - \dim(U_1 \cap U_m + \cdots + U_{m-1} \cap U_m) \end{aligned}$$

Pero

$$\dim(U_1 + \cdots + U_{m-1}) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_{m-1} - \sum_{i=1, j>i}^{m-1} \dim(U_i \cap U_j)$$

y

$$\sum_{i=1, j>i}^{m} \dim(U_i \cap U_j) = \sum_{i=1, j>i}^{m-1} \dim(U_i \cap U_j) + \sum_{i=1}^{m-1} \dim(U_i \cap U_m)$$

así

$$\dim(U_1 + \cdots + U_m) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_m - \sum_{i=1, j>i}^{m} \dim(U_i \cap U_j).$$

Para $m = 2$ se obtiene el Teorema de Grassmann.