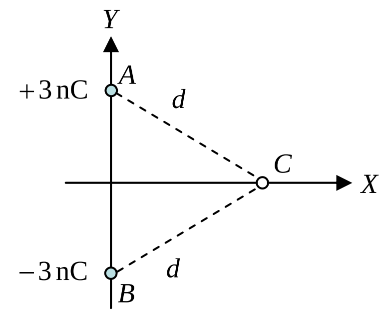
1. Una carga puntual de 3 nC está situada en el punto A (0,6) de un sistema cartesiano. Otra carga puntual de – 3 nC está situada en B (0, -6). Las coordenadas están expresadas en metros. La constante de la ley de Coulomb es $k = 9\cdot10^9$ N·m²/C². Calcula:

a) El valor del potencial electrostático en un punto C (8,0).

b) El vector de intensidad campo eléctrico en un punto C (8,0)

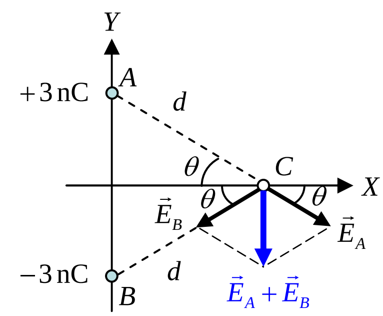
c) El trabajo realizado para llevar una carga puntual de 1 nC desde el infinito al punto C (8,0)



a) La distancia de las dos cargas al punto C es la misma porque ambas se encuentran situadas simétricamente respecto al eje *X*.

$$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\ \text{m}$$

Potencial: $$V_C = k\frac{q_A}{d} + k\frac{q_B}{d} = \frac{9\cdot10^9}{10}\left[3\cdot10^{-9} + \left(-3\cdot10^{-9}\right)\right] = 0$$



b) Campo. El módulo del campo producido en *C* por cada carga es el mismo, ya que las distancias *AC* y *BC* son iguales y las cargas son de igual valor absoluto.

$$E_A = E_B = k\frac{|q|}{d^2} = \frac{9\cdot10^9\cdot3\cdot10^{-9}}{100} = 0.27\ \text{N/C}$$

Hay que observar que debido a que la carga *A* es positiva y la *B* es negativa, el sentido vectorial del campo resultante de la superposición de ambas está dirigido en el sentido negativo del eje *Y*, ya que las componentes *X* del mismo son iguales y de sentidos opuestos. Véase en la figura que

$$\sin\theta = \frac{6}{10} = 0.6$$

Campo total: $$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = 2\,k\frac{|q|}{d^2}\sin\theta = 2\cdot0.27\cdot0.6\left(-\vec{j}\right) = 0.324\left(-\vec{j}\right)\text{N/C}$$

c) El trabajo necesario para llevar una carga de un punto a otro dentro de un campo electrostático es igual al valor de dicha carga multiplicada por la diferencia de potencial. En este caso, el potencial del infinito (cero) y del punto C (cero) es el mismo: al no haber diferencia de potencial, el trabajo requerido será igual a cero.

2. Un planeta de masa $M = 3\cdot 10^{24}$ kg tiene un satélite de masa 16 veces menor siguiendo una órbita circular a 250000 km de distancia.

a) Calcular la velocidad orbital del satélite.

b) Determinar en qué punto del segmento que une el centro del planeta y el centro del satélite la aceleración de la gravedad es igual a cero.

c) Si tenemos un vehículo espacial abandonado en el punto calculado en el apartado anterior, y si a causa de una ligera perturbación éste inicia un movimiento de caída libre hacia el planeta, calcular con qué velocidad se estrellará contra su superficie. El radio del planeta es 5000 km.

Dato. Constante de gravitación universal $G = 6.67\cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

---

a) Velocidad orbital del satélite. Distancia satélite-planeta $d = 2.5\cdot 10^{8}$ m.

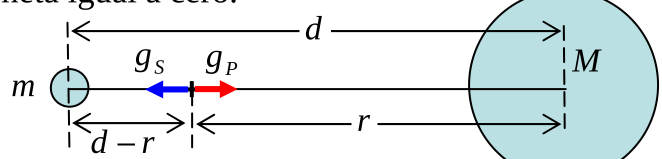
Igualando fuerza de gravitación de Newton y fuerza centrípeta para el satélite en órbita

$$F_N = G\frac{M\cdot m}{d^2} = m\cdot\frac{v_{orbita}^2}{d} = F_C$$

$$v_{orbita} = \sqrt{\frac{G\,M}{d}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 3\cdot 10^{24}}{2.5\cdot 10^{8}}} = 894\text{ m/s}$$

b) Punto de gravedad cero: esto ocurre en el lugar en que la aceleración de la gravedad del planeta y del satélite son iguales en módulo. Como sus sentidos son contrarios, el resultado es una aceleración de la gravedad neta igual a cero.

$$g_P = G\frac{M}{r^2} \qquad g_S = G\frac{m}{(d-r)^2}$$



$$G\frac{M}{r^2} = G\frac{m}{(d-r)^2} \qquad (d-r)^2 = \frac{m}{M}r^2 \qquad d^2 + r^2 - 2d\,r = \frac{m}{M}r^2 \qquad \frac{m}{M} = \frac{1}{16}$$

$$\left(1-\frac{m}{M}\right)r^2 - 2d\,r + d^2 = 0 \qquad 0.9375\,(r/d)^2 - 2\,(r/d) + 1 = 0 \qquad (r/d) = 0.8 \qquad r = 200000\text{ km}$$

c) Caída libre hacia el planeta, calcular con qué velocidad (v_f) se estrellará contra su superficie. Radio del planeta R = 5000 km = $5\cdot 10^{6}$ m, y llamaremos m_0 a la masa del vehículo.

Aplicamos el principio de conservación de la energía:

Potencial (arriba) + Cinética (arriba) = Potencial (superficie) + Cinética (superficie)

$$-G\frac{M\cdot \cancel{m_0}}{r} - G\frac{m\cdot \cancel{m_0}}{d-r} + 0 = -G\frac{M\cdot \cancel{m_0}}{R} + \frac{1}{2}\cancel{m_0}\,v_f^2$$

$$\frac{M}{r} = 1.50\cdot 10^{16}\text{ kg/m} \qquad \frac{m}{d-r} = 3.75\cdot 10^{15}\text{ kg/m} \qquad \frac{M}{R} = 6\cdot 10^{17}\text{ kg/m}$$

$$v_f = \sqrt{2G\left(\frac{M}{R} - \frac{M}{r} - \frac{m}{d-r}\right)} = \sqrt{2\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\cdot 3\cdot 10^{24}\left(6\cdot 10^{17} - 1.50\cdot 10^{16} - 3.75\cdot 10^{15}\right)} = 8806\text{ m/s}$$

Observación: si se desprecia el término $m/(d\text{-}r)$, el resultado para la velocidad es 8834 m/s

3. Dos partículas subatómicas A y B tienen la misma energía cinética, y la masa de la partícula B es 1836 veces mayor que la masa de la partícula A. ¿Cuál de las dos partículas tiene asociada una mayor longitud de onda de De Broglie? Explicar razonadamente.

Longitudes de onda de De Broglie

$$\begin{cases} \lambda_A = \dfrac{h}{p_A} = \dfrac{h}{m_A v_A} \\[2ex] \lambda_B = \dfrac{h}{p_B} = \dfrac{h}{m_B v_B} \end{cases}$$

Como en el denominador figuran los momentos lineales (producto masa × velocidad) conviene expresar los momentos en función de las energía cinéticas

$$K_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2m_A} m_A^2 v_A^2 = \frac{p_A^2}{2m_A} \qquad p_A = \sqrt{2m_A K_A}$$

$$K_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2m_B} m_B^2 v_B^2 = \frac{p_B^2}{2m_B} \qquad p_B = \sqrt{2m_B K_B}$$

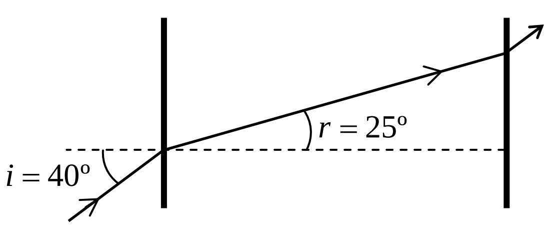
$$\left.\begin{aligned} \lambda_A &= \frac{h}{p_A} = \frac{h}{\sqrt{2m_A K_A}} \\ \lambda_B &= \frac{h}{p_B} = \frac{h}{\sqrt{2m_B K_B}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{\sqrt{2m_B \cancel{K_B}}}{\sqrt{2m_A \cancel{K_A}}} = \sqrt{\frac{m_B}{m_A}}$$

Como $m_B > m_A \Rightarrow \lambda_A > \lambda_B$
La partícula más ligera tiene asociada la longitud de onda más larga.

4. Un rayo de luz incide desde el aire sobre una lámina de vidrio con un ángulo de incidencia de 40º. La luz se propaga por el vidrio formando un ángulo de refracción de 25º con la normal. Sabiendo que la velocidad de la luz en el aire es 3. 10^8 m/s, determinar la velocidad de la luz en el vidrio

Aplicamos la ley de Snell $\sin 40^\circ = n \sin 30^\circ$

$$n = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 25^\circ} = \frac{0.6428}{0.4363} = 1.52$$



El índice de refracción es el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío (muy aproximadamente igual a la velocidad en el aire) y la velocidad en el medio de que se trate. En este caso

$$n = \frac{c}{v} \qquad v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1.52} = 1.97 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

5. Se agita el extremo de una cuerda con una frecuencia de 4 Hz y una amplitud de 6 cm. Si la perturbación se propaga de izquierda a derecha con una velocidad de 1 m/s, escribir la expresión (ecuación de la onda) que representa el movimiento por la cuerda (considérese fase inicial nula).

Parámetros conocidos de la onda: A = 6 cm f = 4 Hz v = 1 m/s

$\omega = 2\pi\ f = 8\pi$ rad/s $\qquad y = A\sin(\omega t - kx) = 0.06\sin 8\pi(t - x)$ $\qquad x$, y en m, t en s

$v = \dfrac{\omega}{k} \qquad k = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{8\pi}{1} = 8\pi\ \text{m}^{-1}$ $\qquad$ Fase inicial nula considerando que $y(0,0) = 0$

---

6. En el laboratorio de física se dispone de un muelle suspendido de un soporte del que se cuelgan las distintas masas indicadas en la tabla adjunta. Cada una de esas masas se separa ligeramente de la posición de equilibrio, se libera después y se cronometra el tiempo invertido en 20 oscilaciones.

Ensayo	Masa ***m*** (gramos)	tiempo ***t*** 20 oscilaciones (segundos)
1	40	10,3
2	100	16,2
3	160	20,5
4	220	24,1

a) Determina el periodo de oscilación de cada ensayo.
b) Con los periodos determinados anteriormente, calcula la constante elástica del muelle.

Periodo en cada ensayo $T = t/20$ $\qquad$ Periodo de oscilación $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \longrightarrow k = 4\pi^2\dfrac{m}{T^2}$

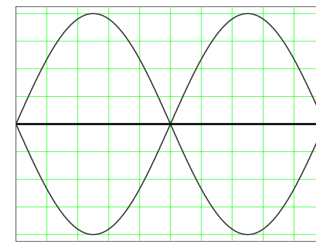
	Masa ***m*** (gramos)	tiempo ***t*** 20 oscilaciones (segundos)	Periodo T (s) $T = t/20$	Masa ***m*** (kg)	Constante k (N/m)
1	40	10,22	0,51	0,04	6,05
2	100	16,26	0,81	0,10	5,97
3	160	20,56	1,03	0,16	5,98
4	220	24,08	1,20	0,22	5,99

$$k = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}{4} = \frac{6.05 + 5.97 + 5.98 + 5.99}{4}$$

$$k = 6.00\ \text{N/m}$$

1. En una cuerda tensa sujeta por ambos extremos se tiene una onda estacionaria dada por la ecuación: $y(x,t) = 8\sin(0.040\pi\ x)\cdot\cos(80\pi\ t)$ $\quad x,y$ en cm, t en s

Esta onda estacionaria corresponde al segundo armónico (véase figura). Se pide:



a) Calcular la frecuencia de este armónico, su longitud de onda y la velocidad con que se propagan a lo largo de la cuerda las ondas que se superponen para producirlo.

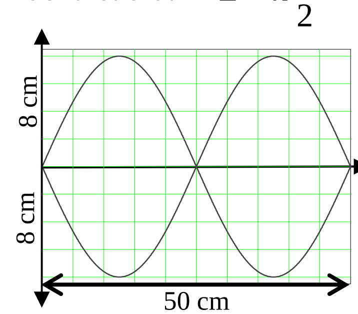
b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

c) ¿Cuál es la velocidad de vibración de un punto situado en el centro de la cuerda?.

Ayuda: Relación entre la longitud de onda del armónico *n* y la longitud *L* de la cuerda $L = n\dfrac{\lambda}{2}$

---

a) La onda estacionaria es el resultado de la superposición de dos ondas viajeras de igual frecuencia que se propagan en sentidos contrarios a lo largo de la cuerda.



Segundo armónico $y_2(x,t) = 8\sin(k_2\ x)\cdot\cos(\omega_2\ t)$

$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 0.040\pi \text{ cm}^{-1} \qquad \lambda_2 = \frac{2\pi}{0.040\pi} = 50 \text{ cm}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = 2\pi\ f_2 = 80\pi \text{ s}^{-1} \qquad f_2 = \frac{80\pi}{2\pi} = 40 \text{ Hz}$$

Velocidad de propagación

$$c_2 = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{80\pi}{0.040\pi} = 2000 \text{ cm/s}$$

b) Longitud de la cuerda: cuando se forman ondas estacionarias el segundo armónico (*n* = 2) contiene ***una*** longitud de onda, o más propiamente, ***dos semilongitudes*** de onda de acuerdo con la relación $L = n\ (\lambda/2)$. Por lo tanto la longitud pedida es igual a una longitud de onda $L = 50$ cm.

c) En el centro de la cuerda el segundo armónico presenta un nodo, porque la posición es $x = \lambda_2/2$

$$A_2(x = 25) = 8\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}\frac{\lambda_2}{2}\right) = 0$$

Puesto que se trata de un nodo, la velocidad de vibración es cero.

Esto también puede calcularse a partir de la ecuación de la onda estacionaria

$$v(x,t) = \frac{d}{dt}y_2(x,t) = -8\omega_2\sin(k_2\ x)\cdot\sin(\omega_2\ t)$$

Siempre que $x = \lambda_2/2$ la velocidad será cero, independientemente del valor del tiempo, debido a la presencia del factor $\sin(k_2\ x)$

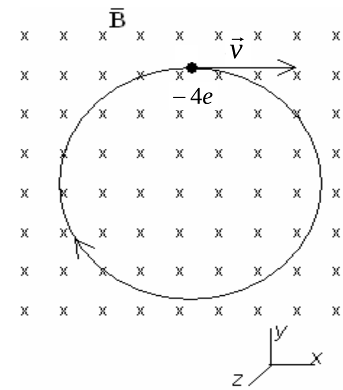
2. Una partícula de 12’1 keV de energía cinética se mueve en una órbita circular en el seno de un campo magnético de 0’75 T perpendicular al plano de la órbita como se indica en la figura. La masa de la partícula es cuatro veces mayor que la del electrón, y su carga negativa es también cuatro veces mayor que la del electrón. Determinar:

a) La expresión vectorial de fuerza magnética ejercida sobre la partícula cuando ésta se halla en el punto superior de la órbita

b) El radio de la órbita

c) La velocidad angular y el periodo del movimiento

(e=1’602·10^{-19}C , m_e=9’109·10^{-31}kg, 1 eV=1’602·10^{-19}J)



a) De acuerdo con el sistema coordenado de la figura, la velocidad en el punto más alto está dirigida a lo largo del eje X, sentido positivo, y el campo magnético a lo largo del eje Z, en sentido negativo (las aspas del dibujo representan sentido entrante al papel).

La fuerza magnética será $\vec{F} = -4e \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ y su sentido es opuesto al producto $\vec{v} \times \vec{B}$ ya que la carga es negativa. La fuerza magnética en el punto más alto tendrá por tanto el sentido del eje Y negativo (esto puede afirmarse solamente con ver el sentido de giro de la partícula, a continuación vamos a demostrarlo).

En primer lugar determinamos la velocidad de la partícula (sabemos su energía cinética)

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{2E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2E_C}{4\,m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12.1 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}}{4 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 3.26 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Fuerza magnética:

$$\vec{F} = -4e \cdot v\,\vec{i} \times B\left(-\vec{k}\right) = -4 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 3.26 \cdot 10^7\,\vec{i} \times 0.75\left(-\vec{k}\right) = 1.57 \cdot 10^{-11}\left(\vec{i} \times \vec{k}\right)\text{N}$$

El producto vectorial de los vectores unitarios es $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = 1.57 \cdot 10^{-11}\left(-\vec{j}\right)\text{N}$

b) Radio de la órbita: la fuerza magnética sobre la partícula cargada (siempre perpendicular a su velocidad) es la fuerza centrípeta que la obliga a curvar su trayectoria.

Igualamos sus módulos

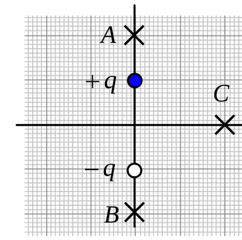
$$4e \cdot v \cdot B = \frac{4m_e \cdot v^2}{R} \qquad R = \frac{m_e \cdot v}{e \cdot B} = \frac{9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3.26 \cdot 10^7 \text{ m/s}}{1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0.75 \text{ T}} = 2.47 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

c) Velocidad angular: $4e \cdot v \cdot B = 4m_e \cdot \omega^2 \cdot R$ (fuerza centrípeta en función de ω)

$$\omega = \sqrt{\frac{e \cdot v \cdot B}{m_e \cdot R}} = 1.32 \cdot 10^{11} \text{ rad/s}$$

Periodo: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 4.76 \cdot 10^{-11}$ s

3. En la figura se representa un dipolo eléctrico, formado por dos cargas de la misma magnitud pero de signos opuestos colocadas en dos puntos fijos y separadas una pequeña distancia. Alrededor del dipolo eléctrico se han señalado mediante aspas tres puntos *A*, *B* y *C*. Explíquese para cada punto si cabe esperar que el potencial eléctrico sea igual a cero (se pide una explicación razonada, pero ***no se piden cálculos***).



Punto *A*. Se encuentra próximo a la carga positiva y alejado de la carga negativa, por lo tanto el potencial no puede ser cero, porque el potencial total en *A* es suma de dos contribuciones, la de $+q$ y la de $-q$, y la carga positiva siempre contribuye en mayor medida por estar más cerca. Los módulos de ambas nunca pueden ser iguales.

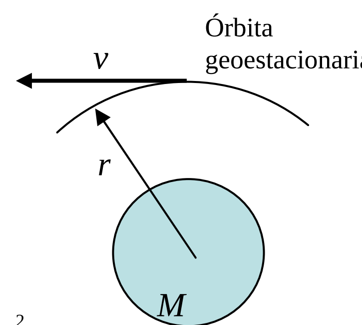
Punto *B*. Es el caso opuesto del anterior: se encuentra próximo a la carga negativa y alejado de la carga positiva. Por la misma razón indicada antes el potencial no puede ser cero, aunque ahora es la carga negativa la que contribuye en mayor medida por estar más cerca.

Punto *C*. Está situado en el eje horizontal a la misma distancia de las dos cargas, puesto que éstas están situadas en posiciones simétricas respecto al eje horizontal. Por lo tanto el potencial eléctrico en *C* sí valdrá cero, pues las dos cargas contribuyen en la misma medida y con signos opuestos.

---

4. ¿Con qué velocidad debe girar un satélite de comunicaciones, situado en una órbita ecuatorial, para que se encuentre siempre sobre el mismo punto de la Tierra?

Dato: $G = 6'67\cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2} Masa de la Tierra $M = 5'98\cdot 10^{24}$ kg



La condición para que el satélite se mantenga fijo sobre un determinado punto de la superficie (satélite geoestacionario) es que la velocidad angular el satélite sea la misma que la velocidad angular de la Tierra:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24\ \text{h}\cdot 3600\ \text{s/h}} = 7.27\cdot 10^{-5}\ \text{rad/s}$$

La fuerza centrípeta sobre el satélite es la fuerza de gravitación universal, lo tanto igualamos

$$G\frac{M\cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\,\omega^2\, r$$

(donde *m* es la masa del satélite de comunicaciones, que se simplifica)

De aquí obtenemos el radio *r* de la órbita geoestacionaria

$$r^3 = \frac{G\,M}{\omega^2} \qquad r = \left(\frac{G\,M}{\omega^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.98\cdot 10^{24}}{\left(7.27\cdot 10^{-5}\right)^2}\right)^{1/3} = 4.23\cdot 10^{7}\ \text{m}$$

Velocidad en órbita geoestacionaria

$$v = \omega\cdot r = 7.27\cdot 10^{-5}\ \text{rad/s}\cdot 4.23\cdot 10^{7}\ \text{m} = 3.07\cdot 10^{3}\ \text{m/s}$$

5. En un laboratorio disponemos de 5.10^{15} núcleos de un elemento químico para realizar un experimento de desintegración radiactiva. Treinta días después solamente tenemos $4{,}7.10^{14}$ núcleos. Calcular, en días, el periodo de semidesintegración de este elemento.

Primero determinamos la constante de desintegración radiactiva λ $\qquad N = N_0\, e^{-\lambda t}$

$$\lambda = -\frac{1}{t}\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\frac{1}{30}\ln\left(\frac{4.7\cdot 10^{14}}{5\cdot 10^{15}}\right) = 0.0788\ \text{dia}^{-1}$$

El periodo de semidesintegración $t_{1/2}$ es el tiempo que tarda una muestra con N_0 átomos en quedar reducida a la mitad: de aquí obtendremos $t_{1/2}$ a partir de λ

$$N_0/2 = N_0\, e^{-\lambda t_{1/2}} \qquad t_{1/2} = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_0/2}{N_0}\right) = -\frac{1}{0.0788}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 8.79\ \text{dia}$$

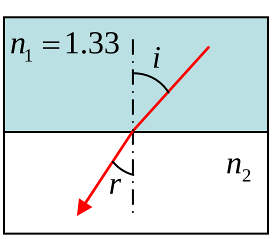
6. En un laboratorio de investigación se han obtenido los valores de los ángulos cuando un haz luminoso incide desde una sustancia con índice de refracción (n = 1'33) hacía una superficie de un material transparente desconocido cuyo índice de refracción pretendemos determinar. Calcular:

a) El índice de refracción de dicho material.

b) Enuncia la ley física tenida en cuenta para calcular el índice de refracción.

EXPERIENCIA	Ángulo de incidencia	Ángulo de refracción
1ª	20º	13º
2ª	26º	17º
3ª	35º	22º
4ª	40º	26º

a) Cálculos $\quad n_2 = n_1 \dfrac{\sin i}{\sin r}$



b) Ley de Snell: el producto del seno del ángulo de incidencia por el índice de refracción del medio de donde proviene la luz es igual al producto del seno del ángulo de refracción por el índice de refracción del medio al que va la luz.

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

EXPERIENCIA	i (º)	r (º)	sin i	sin r	n_2
1ª	20	13	0,3420	0,2250	2,02
2ª	26	17	0,4384	0,2924	1,99
3ª	35	22	0,5736	0,3746	2,04
4ª	40	26	0,6428	0,4384	1,95

$$n_2 = \frac{2.02 + 1.99 + 2.04 + 1.95}{4} = 2.00$$