Ejercicio 1

4. Contesta razonadamente, a las siguientes cuestiones o afirmaciones (que pueden ser verdaderas o falsas):

   (a) Pon un ejemplo, si es posible, de un endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ que tenga dos autovalores y que no sea diagonalizable.

   (b) Si el polinomio característico $p(x)$ de un endomorfismo f verfica que $p(0) \neq 0$ entonces f es inyectivo.

   (c) Dos matrices cuadradas 2×2 con el mismo polinomio mínimo y el mismo polinomio característico corresponden, necesariamente, al mismo endomorfismo respecto a bases distintas.

   (d) Si $f : R^3 \longrightarrow R^3$ es un endomorfismo cuyo polinomio mínimo es $X(X+1)$, entonces f es la aplicación nula o es la aplicación $-Id$ o bien existen subespacios U y W de $\mathbb{R}^3$ tales que f coincide con el opuesto de la proyección sobre U en la dirección de W.

   Construye un ejemplo concreto de un endomorfismo $f : R^3 \longrightarrow R^3$ cuyo polinomio mínimo sea $X(X+1)$.

Ejercicio 2

4. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{C}^3$. Justificar cada una de las afirmaciones siguientes, en las que α y β representan números complejos, y $\sqrt{-1}$ está representado por i.

   (a) Si α es un autovalor de f y $\dim V_\alpha(f) = 3$ entonces f es diagonalizable y $p_f(X) = (X-\alpha)^3$.

   (b) Si $p_f(X) = (X-\alpha)^2(X-\beta)$ y $\dim V_\alpha(f) = 1$ entonces f no es diagonalizable.

   (c) Si $p_f(X) = (X^2+1)(X-2)$, entonces f es diagonalizable.

   (d) Si $p_f(X) = (X-i)^2(X-2)$, no está garantizado que f sea diagonalizable.