Situamos los ejes de coordenadas con cero en el centro del disco.

Primero planteo la suma de las fuerzas desde el sistema de referencia. De esta forma y ya en esféricas, tenemos tres componentes para las fuerzas:

$$\sum \vec{F}_r = -mg\cos\theta + F_r$$
$$\sum \vec{F}_\theta = -mg\sin\theta$$
$$\sum \vec{F}_\varphi = F_\varphi$$

Donde F_θ F_φ son las fuerzas de ligadura del aro.

Ahora nos vamos al sistema de referencia no inercial y planteamos la segunda Ley de Newton para SRNI:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} - m(\ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\omega \times \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (1)$$

En nuestro caso situamos el sistema de referencia no inercial centrado en la bolita, por lo que $\vec{r} = 0$, $\vec{v}_o = 0$, además como ω es constante, $\dot{\vec{\omega}} = 0$; El término de arrastre corresponde a $\vec{R} = R\vec{u}_r = cte \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = 0$.

Si ahora planteamos la aceleración en esféricas:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\theta)\vec{u}_\theta$$
$$+ (2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\theta - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\cos\theta)\vec{u}_\varphi$$

Si quitamos los términos iguales a 0 y la introducimos en (1):

$$\sum \vec{F} = (-r\omega^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\omega^2\sin\theta\cos\theta + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$
$$+ (-2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{u}_\varphi = (F_r - mg\cos\theta)\vec{u}_r - mg\sin\theta\vec{u}_\theta + F_\varphi\vec{u}_\varphi$$

Y finalmente:

$$\left.\begin{array}{l} -r\omega^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2 = F_r - mg\cos\theta \\ r\omega^2\sin\theta\cos\theta + r\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \\ F_\varphi = -2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$F_r = -r\omega^2 \cos^2\theta - r\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

$$r\omega^2 \sin\theta\cos\theta + r\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0$$

$$F_\varphi = -2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta$$

De ahí obtengo las fuerzas de ligadura y la ecuación dinámica de la bola con respecto a la coordenada theta (las otras son obvias pues son un mru para la coordenada acimutal y “sin movimiento” para la radial).

Hasta aquí no se si lo he hecho bien, los resultados creo que tienen sentido.

Ahora planteo las ecuaciones de transformación y el Lagrangiano:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\varphi \\ y &= R\sin\theta\sin\varphi \\ z &= R\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}^2 = R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi(\dot{\theta}+\omega)^2 \\ \dot{y}^2 = R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi(\dot{\theta}+\omega)^2 \\ \dot{z}^2 = R^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta(\omega^2 + 2\omega\dot{\theta}))$$
$$U = mgR(1-\cos\theta)$$

$$L = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta(\omega^2 + 2\omega\dot{\theta})) - mgR(1-\cos\theta)$$

Y sacando la ecuación dinámica:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mR^2(\dot{\theta} + \sin^2\theta\omega) \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mR^2(\ddot{\theta} + \sin^2\theta\omega\dot{\theta})$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = mR^2\sin\theta\cos\theta(\omega^2 + 2\omega\dot{\theta}) - mRg\sin\theta$$

Finalmente:

$$R(\ddot{\theta} + \sin^2\theta\omega\dot{\theta}) - R\sin\theta\cos\theta(\omega^2 + 2\omega\dot{\theta}) + g\sin\theta = 0$$

Que ven que no es lo mismo que obtuve mediante el formalismo de Newton. Además, no sé como sacar las posiciones de equilibrio de este Lagrangiano y no se si resolverlo para oscilaciones pequeñas (no lo he intentado aún).