Si tratamos de resolver el sistema realizando la aproximación de oscilaciones pequeñas:

$$\ddot{\theta}-\omega^2(\theta+o(\theta^3))\left(1-\frac{\theta^2}{2}+o(\theta^4)\right)+\frac{g}{R}(\theta+o(\theta^3))\approx\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{R}-\omega^2\right)\theta\approx 0$$

Obtenemos que se pueden dar tres casos:

a) Si $\omega<\sqrt{\frac{g}{R}}$ entonces la ecuación diferencial tiene la solución armónica

$\boxed{\theta(t)=\theta_0\cos(\Omega t)}$ con $\boxed{\Omega^2=\frac{g}{R}-\omega^2}$ Para θ_0 pequeños

b) Si $\omega=\sqrt{\frac{g}{R}}$ tenemos la solución $\boxed{\ddot{\theta}=0\Rightarrow\dot{\theta}(t)=0\Rightarrow\theta(t)=\theta_o}$
Y la bola permanecerá estática.

c) Si $\omega>\sqrt{\frac{g}{R}}$ entonces resolvemos la ecuación diferencial:

$$\ddot{\theta}-\left(\omega^2-\frac{g}{R}\right)\theta=\ddot{\theta}-\Omega^2\theta=0$$

Que resolvemos buscando soluciones del tipo $\theta(t)=e^{\lambda t}$ y mediante el polinomio característico. Si suponemos la velocidad inicial nula tenemos:

$$\theta(t)=C_1e^{\Omega t}+C_2e^{-\Omega t}$$ C_1 y C_2 dependerán de los valores iniciales

$$\left.\begin{array}{l}\theta(0)=C_1+C_2=\theta_o\\ \dot{\theta}(t)=\Omega C_1e^{\sqrt{\Omega}t}-\Omega C_2e^{-\sqrt{\Omega}t}\Rightarrow\dot{\theta}(0)=0\Rightarrow C_1=C_2\end{array}\right\}\Rightarrow C_1=C_2=\frac{\theta_o}{2}$$

Y el resultado queda:

$$\theta(t)=\theta_o\frac{e^{\Omega t}+C_2e^{-\Omega t}}{2}\Rightarrow\quad\boxed{\theta(t)=\theta_o\cosh(\Omega t)}$$

También podemos preguntarnos dónde estarán los puntos de equilibrio de nuestra bolita. Para ello igualamos a cero las fuerzas que actúan sobre ella:

$$\vec{F}_\theta=m\ddot{\theta}=0\Rightarrow\ddot{\theta}=\omega^2\sin\theta\cos\theta-\frac{g}{R}\sin\theta=0\Rightarrow\omega^2\sin\theta\cos\theta=\frac{g}{R}\sin\theta$$

Esa igualdad se cumple para $\sin\theta=0$, es decir para Θ=0, π. Por tanto va a tener los dos puntos característicos en los que la energía potencial alcanza su mínimo y su máximo correspondiente. Estos dos puntos coinciden con los de un péndulo circular, pero nuestro sistema tiene uno más:

$$\left.\begin{array}{l} \omega^2 \sin\theta \cos\theta = \dfrac{g}{R}\sin\theta \\ \sin\theta \neq 0 \\ \omega \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \omega^2 \cos\theta = \frac{g}{R} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$$

Sin embargo, eso solo tiene sentido cuando $\left|\dfrac{g}{R\omega^2}\right| \leq 1 \Rightarrow \dfrac{g}{R} \leq \omega^2$, es decir sólo se va a dar este equilibrio en los casos b y c. Si estamos en el caso b, el equilibrio se alcanzará en ϴ=0, π coincidiendo con los que ya conocíamos pero si estamos en el c, dependerá de la velocidad angular.