UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO (EIAE)

Mecánica de Fluidos I **Problema de cinemática**

Dado el campo de velocidades, en coordenadas polares, correspondiente al movimiento plano de un líquido

$$v_r = U\, cos\theta + \frac{Q}{2\pi r}\,; \quad v_\theta = -U\, sen\theta,$$

donde U y Q son constantes conocidas con dimensiones de velocidad y velocidad$\times$longitud respectivamente. Se pide:

1.- Escriban el campo de velocidades en forma adimensional, viendo que hay una velocidad característica y una longitud característica.

2.- Determinen el punto de remanso.

3.- Determinen las líneas de corriente en: (a) Las proximidades del punto de remanso; (b) En las proximidades del origen; (c) A distancias del origen muy grandes frente a la longitud característica. Con ayuda de las líneas de corriente obtenidas en los apartados (a), (b) y (c), representen esquemáticamente las líneas de corriente del campo fluido.

4.- Determinen el flujo volumétrico de líquido que atraviesa una circunferencia de radio muy pequeño con respecto a la longitud característica y centro en el origen. Determinen la distancia que separa las dos líneas de corriente divisorias que, partiendo del punto de remanso, dividen al flujo uniforme del infinito con el flujo que sale del origen.

5.- Determinen la expresión general de las líneas de corriente.

6.- Calculen las trayectorias.

7.- Determinen la aceleración del fluido.

SOLUCIÓN

1.- En las expresiones de la velocidad sólo aparecen dos constantes U con dimensiones de velocidad y Q con dimensiones de velocidad$\times$longitud. De acuerdo con esto, la velocidad característica es del orden de U y la longitud característica del orden de Q/U. En efecto, el campo de velocidades puede escribirse en forma adimensional dividiendo cada una de las componentes por la velocidad U, obteniéndose

$$u_r = \frac{v_r}{U} = cos\theta + \frac{Q}{2\pi U r},$$

$$u_\theta = \frac{v_\theta}{U} = -sen\theta,$$

y utilizando la coordenada radial adimensional

$$\eta = \frac{2\pi U}{Q} r,$$

que es del orden del radio dividido por la longitud característica (donde se ha incluido el factor 2π por comodidad), el campo de velocidades adimensional toma la forma

$$u_r = cos\theta + \frac{1}{\eta}\,; \quad u_\theta = -sen\theta.$$

2.- Los puntos de remanso se obtienen de anular las componentes de la velocidad. De anular u_θ se obtiene $sen\theta = 0$, lo que proporciona dos soluciones: $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Al hacer $u_r = 0$ con $\theta = 0$ se obtiene $\eta = -1$, y con $\theta = \pi$ se obtiene $\eta = 1$. Como η es el radio adimensional nunca puede ser negativo, de modo que el único punto de remanso es

$$\eta_R = 1\,; \quad \theta_R = \pi.$$

3a.- Para determinar las líneas de corriente en el entorno del punto de remanso es necesario escribir el campo de velocidades en sus proximidades. Para ello escribiremos

$$\eta = \eta_R + \xi = 1 + \xi\,; \quad \theta = \theta_R + \alpha = \pi + \alpha,$$

con $\xi \ll 1$ y $\alpha \ll 1$. En estas nuevas variables el campo de velocidades toma la forma

$$u_r \approx -\xi\,; \quad u_\theta \approx \alpha,$$

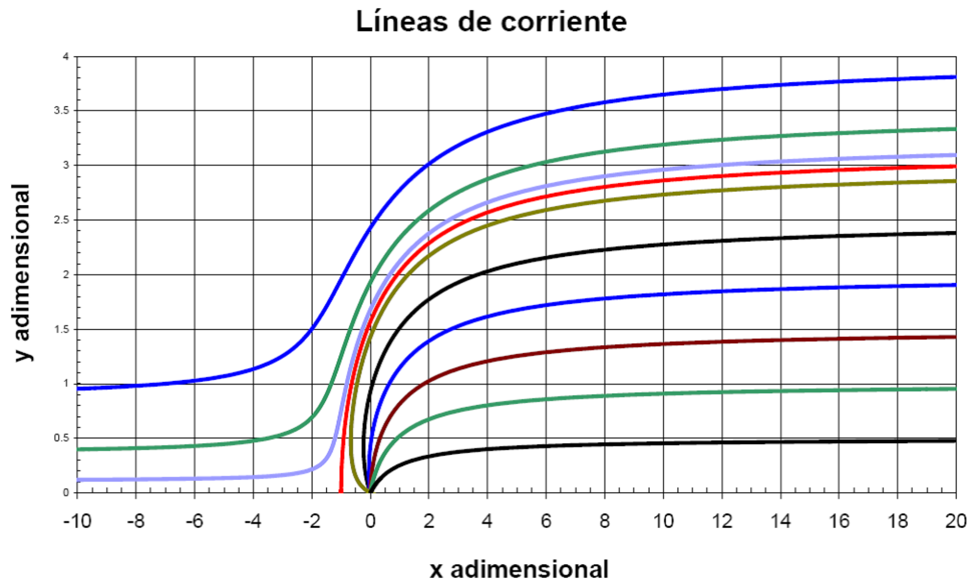
y las líneas de corriente se obtienen de

$$-\frac{d\xi}{\xi} = \frac{d\alpha}{\alpha} \Rightarrow \xi\alpha = C,$$

que son hipérbolas equiláteras en el entorno del punto de remanso.

3b.- En el entorno del origen, donde $\eta \ll 1$, la única velocidad importante es $u_r \to 1/\eta \gg 1$ y, en este caso, las líneas de corriente son las rectas $\theta = Contante$ que parten del origen.

3c.- Muy lejos del origen, donde $\eta \gg 1$, la velocidad se reduce a $u_r = cos\theta$; $u_\theta = -sen\theta$, lo que es equivalente a las componentes de la velocidad $u_x = 1$ y $u_y = 0$ en coordenadas cartesianas. Por lo tanto, las líneas de corriente lejos del origen (y también lejos del punto de remanso), son líneas rectas horizontales.



4.- El flujo volumétrico a través de una circunferencia de centro en el origen es

$$\int_0^{2\pi} \vec{v}\cdot\vec{n} r d\theta = \int_0^{2\pi} v_r r d\theta = \frac{Q}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_r \eta d\theta,$$

ya que la normal $\vec{n}$ es radial. Como el radio es muy pequeño frente a la longitud característica implica que el radio de dicha circunferencia es de valor $\eta \ll 1$, pero para estos valores de η el campo de velocidades se reduce a $u_r \to 1/\eta$, de modo que la integral anterior toma la forma

$$\int_0^{2\pi} \vec{v}\cdot\vec{n} r d\theta = \int_0^{2\pi} v_r r d\theta = \frac{Q}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_r \eta d\theta = \frac{Q}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = Q.$$

Este flujo volumétrico que sale del origen, no puede atravesar las líneas de corriente divisorias que separan al flujo uniforme de el del origen, de modo que en una sección lejos aguas abajo donde la velocidad es uniforme y de valor $v_x = U$ o su equivalente $u_x = 1$, el flujo volumétrico será

$$Q = 2\int_0^{h} \vec{v}\cdot\vec{n} dy = 2\int_0^{h} v_x dy = 2Uh \Rightarrow h = \frac{Q}{2U}.$$

5.- Para determinar la expresión general de las líneas de corriente hay que resolver la ecuación

$$\frac{\eta d\theta}{u_\theta} = \frac{d\eta}{u_r}\,; \quad \eta u_r d\theta - u_\theta d\eta = 0\,; \quad \eta cos\theta d\theta + sen\theta d\eta + d\theta = 0,$$

que puede escribirse en forma de una diferencial exacta

$$d\left(\eta sen\theta\right) + d\theta = 0,$$

de modo que las líneas de corriente son

$$\theta + \eta sen\theta = C.$$

Como el movimiento es estacionario, las líneas de corriente, sendas y líneas de traza coinciden.

6.- Para calcular las trayectorias se tiene

$$\frac{dr}{dt} = v_r\ ; \qquad \frac{rd\theta}{dt} = v_\theta,$$

que escritas en forma adimensional son

$$\frac{d\eta}{d\tau} = u_r\ ; \qquad \frac{\eta d\theta}{d\tau} = u_\theta,$$

donde τ es el tiempo adimensional

$$\tau = \frac{2\pi U^2}{Q} t.$$

Las ecuaciones anteriores hay que acompañarlas de las condiciones iniciales, por ejemplo para $\tau = 0$ es $\eta = \eta_0$ y $\theta = \theta_0$.

Dado que el movimiento es estacionario, el cociente entre las dos ecuaciones de la trayectoria proporciona la ecuación de la línea de corriente, lo que permite escribir

$$\eta = \frac{C - \theta}{sen\theta},$$

donde la constante es, de acuerdo con las condiciones iniciales, $C = \theta_0 + \eta_0 sen\theta_0$. Llevando el valor de η a la segunda de las ecuaciones de las trayectorias se tiene

$$\frac{C - \theta}{sen\theta} \frac{d\theta}{d\tau} = -sen\theta,$$

lo que permite reducir el cálculo de las trayectorias a una integral

$$\tau = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\theta - C}{sen^2\theta} d\theta = ln\left(\frac{sen\theta}{sen\theta_0}\right) + (C - \theta)\frac{cos\theta}{sen\theta} - (C - \theta_0)\frac{cos\theta_0}{sen\theta_0}.$$

7.- La aceleración del fluido es

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}),$$

pueden comprobar que $\nabla \times \vec{v} = 0$ y como el movimiento es estacionario, la aceleración se reduce a

$$\vec{a} = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right),$$

que escrita en forma adimensional toma la forma

$$\frac{\vec{a}Q}{2\pi U^3} = \tilde{\nabla}\left(\frac{u^2}{2}\right),$$

donde $\tilde{\nabla}$ es el gradiente adimensional. Como

$$\frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(cos\theta + \frac{1}{\eta}\right)^2 + sen^2\theta\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\eta^2} + \frac{cos\theta}{\eta}.$$

La componente en la dirección radial de la aceleración adimensional es

$$a_r = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\eta^2} + \frac{cos\theta}{\eta}\right) = -\frac{1}{\eta^3} - \frac{cos\theta}{\eta^2},$$

y la componente en la dirección de θ es

$$a_\theta = \frac{\partial}{\eta \partial \theta}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\eta^2} + \frac{cos\theta}{\eta}\right) = -\frac{sen\theta}{\eta^2}.$$