

## Un paseo por las geometrías del espaciotiempo en el centenario de la Relatividad General

por

**Antonio N. Bernal y Miguel Sánchez Caja**

RESUMEN. Con ocasión del centenario de la publicación por Einstein de la Teoría General de la Relatividad, proporcionamos una visión general de las «teorías del espaciotiempo». Incidimos en argumentos físicos simples desde el punto de vista matemático, así como en el doble papel para estas teorías de la Geometría Diferencial: como lenguaje natural y como herramienta para su desarrollo e, incluso, falsabilidad.

Se cumplen en 2015 cien años desde que Einstein publicara el artículo [11], donde se termina de perfilar la Relatividad General. Había transcurrido un decenio desde 1905, el «annus mirabilis» en el que Einstein publicó cuatro artículos que contribuyeron decisivamente a fundamentar la Física moderna y que cambiaron nuestra percepción de conceptos como espacio, tiempo, masa o energía.<sup>1</sup> La necesidad de ese gran lapso para una mente tan prodigiosa y rápida como la de Einstein sugiere la titánica magnitud de la tarea. Y es de remarcar que, de entre las dificultades con que se topó, tal vez la más ardua fuera la intrincación de las matemáticas requeridas. De hecho, la tutela de su amigo Marcel Grossmann en el campo de la Geometría Diferencial resultó esencial para el éxito de la empresa, como se desprende de una carta de Einstein a Sommerfeld<sup>2</sup> escrita en 1912:

«El problema de la gravitación me tiene totalmente ocupado, y ahora creo que voy a superar todas las dificultades con ayuda de un amigo matemático de aquí [Grossmann]. Al menos hay una cosa segura, y es que nunca en mi vida había trabajado tan duro. He adquirido un gran respeto por las matemáticas, cuyas sutilezas, en mi inocencia, ¡consideraba hasta ahora un lujo superfluo! Al lado de este problema, la primera teoría de la relatividad es un juego de niños».

Afortunadamente, hoy en día los fundamentos básicos de Geometría necesarios para entender tanto la Relatividad General como las teorías precedentes del espacio y tiempo, forman (o deberían formar) parte del acervo común de los matemáticos.

---

<sup>1</sup>Recomendamos los estupendos artículos de Azcárraga [1] y Senovilla [27] en LA GACETA publicados en ocasión de ese otro centenario, y el no menos imprescindible de Sánchez Ron [25] del año anterior. Estos artículos cubren, entre otros, los aspectos históricos de ambos centenarios.

<sup>2</sup>Tomamos el dato y la traducción de [28, pág. 50].

Así, con la perspectiva del siglo transcurrido, nos proponemos aquí ofrecer una breve visión de estas teorías.

Decía Galileo que el libro de la Naturaleza está escrito «in lingua mathematica» y, si bien esto se puede apreciar en múltiples partes de la Física, en pocas resultará tan claro como en las teorías que tratan de modelar el espacio y el tiempo. Así, la Geometría Euclidiana subyace a la Mecánica Clásica, la Geometría Afín Lorentziana a la Relatividad Especial, y la Geometría Riemanniana a la Relatividad General. Podríamos incluso seguir más allá, añadiendo que la Teoría de Fibrados subyace a las Teorías Gauge (las cuales buscan un marco geométrico apropiado para la descripción unificada del espaciotiempo y las partículas que lo habitan), que los Espacios de Hilbert y el Análisis Funcional se hacen necesarios cuando se quieren representar efectos cuánticos, o que casi cualquier parte de las matemáticas parece tener cabida en esa Teoría del Todo que pretende ser la Teoría de Cuerdas.

En el presente artículo nos restringiremos a las teorías físicas que han tratado de describir el espacio y el tiempo, con independencia de las partículas que lo habiten (en fin, no diremos ingenuamente «sin partículas» que lo habiten, puesto que muchos podrían objetar si esto tendría sentido). No pretendemos hacer una descripción detallada desde un punto histórico o físico, sino una breve descripción en el lenguaje moderno de la Geometría Diferencial de los modelos clásicos (los de Galileo-Newton y Einstein), incluyendo unas *motivaciones físicas claras desde el punto de vista matemático* (véanse las Secciones 1 y 2).

Como veremos, estas motivaciones físicas son importantes para el matemático no sólo porque le permitan entender y reflexionar sobre conceptos físicos y filosóficos atractivos, sino porque las intuiciones físicas pueden orientar su punto de vista y llevarle a resultados estrictamente matemáticos completamente inesperados (véase la Sección 3). Y, a la postre, pueden tener otra utilidad mucho más práctica, ya que en ocasiones las teorías físicas producen predicciones geométricas. Así, el trabajo de los matemáticos (gente precisada sólo de recursos austeros) puede permitir la falsabilidad de una teoría física, de un modo desde luego más económico que el de costosos dispositivos experimentales.

Esperamos así que el lector de LA GACETA pueda encontrar en este artículo ideas para tratar de entender mejor el universo físico que le rodea, motivaciones para el estudio o desarrollo de la Geometría... ¡y argumentos extra para justificar la actividad a menudo incomprensible de los matemáticos!

## 1. APROXIMACIONES LINEALES A LAS TEORÍAS DEL ESPACIOTIEMPO

Cuando el matemático intenta aproximarse a las teorías más elementales sobre la naturaleza del espacio y tiempo, tal vez uno de los conceptos más desconcertantes con el que tropieza sea el de *sistema de referencia inercial* (SRI). Y es que, al estudiarlo en el bachillerato, afirmaciones del tipo «los SRI no están acelerados ni rotan» o «los puntos de vista entre dos SRI son intercambiables» pueden parecer claras y llenas de sentido. Sin embargo, una vez terminada su carrera, el matemático cultivado en el rigor puede llegar a sentir que estas afirmaciones no tienen un significado preciso.

E incluso sospechar que si no se entienden bien, esto pueda deberse a algún tipo de circularidad en las definiciones físicas. . .

Una afirmación popular<sup>3</sup> establece que uno no entiende realmente algo a menos que pueda explicárselo a su abuela. Nosotros iríamos un poco más allá y diríamos, casi con orgullo: «no entiendes bien un concepto físico si no puedes explicárselo a un matemático». Así que éste será nuestro principal objetivo a lo largo de la presente sección, dedicada a los SRI y todo lo que conllevan acerca de la geometría del espaciotiempo. Para ello, seguiremos la aproximación general desarrollada en [3] (o la versión más divulgativa [4]), que se inspira parcialmente en [16].

### 1.1. SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIALES

Tradicionalmente, el físico imagina sus SRI en un cierto estado de movimiento privilegiado con respecto al resto del universo, de modo que entre cada dos de tales SRI el movimiento relativo es especialmente simple (rectilíneo y uniforme). Y, usualmente, las discusiones físicas elementales sobre SRI parten de dos hipótesis implícitas, que abstraeremos como postulados.

El primero de ellos es que los SRI generan coordenadas en la totalidad del espacio y el tiempo (en adelante *espaciotiempo* o e.t.) de modo que el cambio de coordenadas entre dos de tales SRI es una aplicación afín. Matemáticamente, esto implica que el propio e.t. adquiere una estructura de espacio afín o, en otras palabras:

**POSTULADO 1.** *El e.t. físico admite una estructura de espacio afín sobre un espacio vectorial real  $V$  de dimensión 4, y determina un subconjunto (no vacío) de sistemas de referencia afines a los cuales llamaremos sistemas de referencia inerciales.*

Este postulado también se puede interpretar diciendo que se considera una aproximación lineal a la estructura del e.t., dentro del cual los físicos serán capaces de encontrar unos sistemas de referencia afines privilegiados (y el matemático no tiene por qué torturarse mucho sobre cómo se puedan encontrar éstos). Como veremos, este punto de vista será importante para modelos de universo más realistas.

Para formular el segundo postulado sobre los SRI, señalemos previamente que, desde el punto de vista físico, se espera que una de las coordenadas  $t$  de cada SRI mida tiempo ( $t$  esté determinada mediante un reloj) mientras que las otras  $x_i$  (determinadas mediante una regla) midan espacio. Una propiedad esencial de los SRI dentro del conjunto de todos los sistemas de referencia afines es que deberá existir una cierta «democracia», «no privilegio» o «máxima simetría» entre pares de tales mediciones de tiempo o de espacio. Para explicarla con sencillez, supongamos primero el caso bidimensional, esto es, consideremos dos SRI,  $O$  y  $\bar{O}$ , con coordenadas

---

<sup>3</sup>Atribuida a veces al propio Einstein, aunque parece que sin mucho fundamento; véase el libro editado por G. J. Whitrow: *Einstein, the Man and His Achievement*, Dover Press, 1973 (pág. 42), donde se apunta un posible origen en Ernest Rutherford: «Einstein not only abandoned the popular principle attributed to Rutherford than ‘an alleged scientific discovery has no merit unless it can be explained to a barmaid’, but he even outraged many professional scientists».

afines  $(t, x)$  y  $(\bar{t}, \bar{x})$ , respectivamente. Por el Postulado 1,

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}. \quad (1)$$

La máxima simetría entre las coordenadas a la que se refieren los físicos viene a decir que «la coordenada temporal  $\bar{t}$  (resp., espacial  $\bar{x}$ ) de  $\bar{O}$  medida por el reloj (resp., la regla) de  $O$  cambia como la coordenada temporal  $t$  (resp., espacial  $x$ ) de  $O$  medida por el reloj (resp., la regla) de  $\bar{O}$ ». En la notación de (1), esto equivale a imponer

$$\partial\bar{t}/\partial t (= a) = \partial t/\partial\bar{t} \neq 0 \quad \text{y} \quad \partial\bar{x}/\partial x (= d) = \partial x/\partial\bar{x}, \quad (2)$$

donde la condición adicional sobre las derivadas temporales refleja que el tiempo fluye entre ambos relojes sin interrupciones. Más formalmente, y en cuatro dimensiones:

POSTULADO 2. *Llamando temporal a la primera coordenada  $t$  de cada SRI, y espaciales a las otras tres  $x_1, x_2, x_3$ , dados dos de tales SRI,  $O$  y  $\bar{O}$ , los cambios entre estos tipos de coordenadas verifican*

$$\partial\bar{t}/\partial t = \partial t/\partial\bar{t} \neq 0 \quad \text{y} \quad \partial\bar{x}_i/\partial x_j = \partial x_j/\partial\bar{x}_i$$

para todo  $i, j = 1, 2, 3$ .

## 1.2. UN EJERCICIO DE MATRICES

Los postulados sobre los SRI sugieren el siguiente ejercicio de matrices para el caso de dimensión 2 (para dimensión 4 el problema es más difícil, pero las soluciones y conclusiones resultan ser análogas).

EJERCICIO. *Considérese una matriz real  $A$  regular  $2 \times 2$  y su inversa  $A^{-1}$ :*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}.$$

*Si  $a \neq 0$ , determínese cuándo se verifican  $\tilde{a} = a$  y  $\tilde{d} = d$ .*

La importancia de este ejercicio radica en que, al solucionarlo, se obtienen todos los posibles cambios de coordenadas entre SRI y, con ellos, *todas las estructuras geométricas asociadas a la existencia de SRI*.

Indicamos cómo resolver este ejercicio en el Apéndice. Para expresar de manera concisa la solución que se obtiene, denotaremos  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\omega\}$ , donde  $\omega$  puede entenderse como « $\pm$  infinito», y se dota a  $\mathbb{R}^*$  de la topología de una circunferencia.

SOLUCIÓN. *Una tal matriz  $A$  satisface  $\det A = \pm 1$  y que, para algún  $k \in \mathbb{R}^*$ , cumple*

$$A^t \cdot I^{(k)} \cdot A = I^{(k)}, \quad \text{donde} \quad I^{(k)} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

*el superíndice  $t$  denota la traspuesta y, para dotar de sentido a estas expresiones cuando  $k = \omega$ , se toman formalmente las inversas y se entiende que  $1/\omega = 0$ .*

Más aún,  $k$  es esencialmente único en el sentido siguiente. Si dos matrices no diagonales  $A$  y  $A'$  satisfacen la propiedad del Ejercicio para sendos  $k$  y  $k'$ , entonces su producto  $A \cdot A'$  la satisface sólo si  $k' = k$ .

### 1.3. GRUPOS $O^{(k)}(2, \mathbb{R})$

La solución del ejercicio previo hace natural considerar los siguientes grupos de matrices, para cada  $k \in \mathbb{R}^*$ :

$$O^{(k)}(2, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Gl}(2, \mathbb{R}) : \det A = \pm 1, A^t I^{(k)} A = I^{(k)}\}.$$

Obsérvese que, de hecho, cada  $O^{(k)}(2, \mathbb{R})$  es un grupo de Lie conocido (salvo por un cambio de escala trivial cuando  $k \in \mathbb{R}$  y  $k \neq 0$ ):

1. Para  $k \in (0, \infty)$ ,  $O^{(k)}(2, \mathbb{R})$  es conjugado al grupo ortogonal clásico

$$O^{(1)}(2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ \mp \text{sen } \theta & \pm \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Para  $k \in (-\infty, 0)$ ,  $O^{(k)}(2, \mathbb{R})$  es conjugado al grupo de Lorentz

$$O^{(-1)}(2, \mathbb{R}) := \left\{ \pm \begin{pmatrix} \cosh \theta & \text{senh } \theta \\ \pm \text{senh } \theta & \pm \cosh \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Para  $k = \omega$ , es el grupo de Galileo (no orientado temporalmente)

$$O^{(\omega)}(2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ v & \pm 1 \end{pmatrix} : v \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Para  $k = 0$ , es el dual del grupo de Galileo

$$O^{(0)}(2, \mathbb{R}) := \{A^t : A \in O^{(\omega)}(2, \mathbb{R})\}.$$

Recapitulando, si aceptamos los dos postulados sobre la existencia de SRI, al e.t. físico se le asigna una estructura afín real  $A$ , de espacio vectorial director  $V$ , y las bases de  $V$  asociadas a los sistemas de referencia inerciales están relacionadas por un cambio de coordenadas en un (esencialmente único) grupo  $O^{(k)}(2, \mathbb{R})$ .

En consecuencia, al e.t. físico también se le asigna la estructura geométrica en  $V$  que preserve ese grupo, esto es:

1. Caso  $k \in (0, \infty)$ : un producto escalar euclidiano.
2. Caso  $k \in (-\infty, 0)$ : un producto escalar lorentziano, esto es, un tensor simétrico 2-covariante (forma bilineal simétrica) no degenerado de índice 1 (con signatura  $(-, +)$ ).
3. Caso  $k = \omega$ : una estructura galileana, esto es, una forma lineal no nula (determinada en principio salvo signo)  $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ , a la que se llamará *tiempo absoluto*, más un producto escalar euclidiano  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en su núcleo  $\text{Nuc}(T)$ ; a  $(\text{Nuc}(T), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se le llamará *espacio absoluto*.
4. Caso  $k = 0$ : una estructura dual galileana consistente en un vector  $v$  no nulo (definido en principio salvo signo) más un producto escalar euclidiano en el anulador de  $v$  en el espacio dual  $V^*$ .

## 1.4. MODELOS LINEALES FÍSICOS DE ESPACIOTIEMPO

De la discusión anterior hemos deducido que, admitiendo los dos postulados sobre la existencia de SRI, se tienen a los sumo cuatro modelos geométricos que se pueden asignar de manera natural al e.t. Podemos preguntarnos a continuación si son todos físicamente razonables, o si tal vez habría que añadir algún postulado más.

Como una primera observación, señalemos que, dado el conjunto inicial  $S$  de SRI, uno podría ampliar  $S$  hasta formar un conjunto maximal  $S_{\max}$  de sistemas de referencia afines que verificaran los dos postulados de los SRI; dado que, salvo casos triviales, el valor del parámetro  $k$  asignable a  $S$  era único, también será esencialmente único el conjunto  $S_{\max}$  determinado por  $S$ , y podría pensarse que éste es realmente el conjunto natural de todos los SRI. Esto es, podría considerarse como un postulado natural el de *maximalidad*, lo que no significa más que *el conjunto de todos los SRI es maximal* en el sentido anterior.

Una segunda observación es que no se impuso ninguna restricción sobre el valor de  $a := \partial \bar{t} / \partial t$ , salvo que  $a \neq 0$ . Esta condición se justificaba porque  $t$  y  $\bar{t}$  son coordenadas «temporales» que fluyen indefinidamente. Pero, de hecho, parece natural suponer  $a > 0$  porque ambas lo hacen «hacia el futuro». Esto es, es perfectamente natural asumir como postulado adicional la *orientabilidad temporal*:  $\partial \bar{t} / \partial t > 0$  entre cualesquiera dos SRI.

Discutamos a continuación los cuatro modelos de espaciotiempo obtenidos. El caso euclidiano  $k \in (0, \infty)$  ocurre cuando hay una «simetría total» entre las coordenadas  $t$  y  $x$ . Si admitimos el postulado de maximalidad, el conjunto resultante no puede obtenerse mediante la acción natural de un grupo: en ese caso, se terminarían produciendo elementos contradictorios con la condición  $a \neq 0$  (o la más restrictiva  $a > 0$ , impuesta por la orientación temporal). Desde el punto de vista físico, esto convierte al modelo euclidiano en sospechoso de no ser apropiado para una descripción conjunta del espacio y el tiempo.

Los otros casos, esto es, cuando  $k \in \mathbb{R}^* \setminus (0, \infty)$ , son claramente compatibles con los postulados de maximalidad y orientabilidad temporal. De hecho, el postulado de orientabilidad temporal permite incluso dotar de signo a la forma lineal tiempo absoluto  $T$  del modelo galileano (de manera que siempre crezca sobre las curvas parametrizadas con la coordenada  $t$  de un SRI), y al vector no nulo  $v$  del caso dual del galileano. En el caso lorentziano, permite determinar lo que también en este ambiente recibe el nombre de orientación temporal (en el sentido que se verá en la Sección 2: la selección de uno de los dos conos de vectores temporales generados por el producto escalar lorentziano).

No obstante, un análisis sencillo muestra que  $\sqrt{|k|}$  admite una interpretación natural como *supremo de todas las velocidades relativas entre SRI*. Este supremo sería infinito para el modelo galileano, finito pero positivo para el lorentziano y estrictamente 0 para el dual del galileano. Estas consideraciones hacen también sospechoso desde el punto de vista físico al modelo dual del galileano, y sugieren que sólo los dos modelos clásicos, galileano y lorentziano, podrán sobrevivir desde esa perspectiva.

Más aún, existen razones físicas conocidas para preferir el caso en el que el supremo de velocidades relativas no sea infinito, esto es, el modelo lorentziano. La

fundamental de ellas es que la velocidad  $c$  de la propagación de una onda (digamos, la luz) *en el vacío* debe ser *finita* (¿cómo se va a propagar algo a una velocidad infinita?) e *igual* para todos los SRI (si la onda se propaga en el vacío, su velocidad de propagación se refiere con respecto al vacío y éste es «el mismo» para todos los SRI). Ello conduce directamente al modelo lorentziano, que es el que se considera en la *Relatividad Especial* einsteniana.

No obstante, los anteriores razonamientos sobre ondas pueden parecer una suerte de *Deus ex machina* en nuestra discusión sobre SRI. Así, aparte de esta razón conocida, daremos en la siguiente sección otra de pura economía matemática en favor del caso lorentziano (desde el punto de vista general en el que no se considera una aproximación lineal, como hemos hecho hasta el momento).

## 2. MODELOS NO LINEALES

Hasta ahora sólo hemos considerado *aproximaciones lineales* a la estructura del e.t. No obstante, la Geometría Diferencial proporciona un modelo muy general de espacios en los que se pueden usar las herramientas del Cálculo Diferencial, las *variedades diferenciables*; los espacios afines o vectoriales considerados hasta ahora se pueden considerar simplemente como una aproximación suya. Recordemos que, intuitivamente, las variedades se entienden como espacios que pueden describirse localmente mediante conjuntos de  $n$  coordenadas (siendo  $n$  prefijado y, en nuestro caso, finito), de manera que todos los cambios de coordenadas permitidos son diferenciables.

A cada punto  $p$  de una tal variedad  $M$  se le asigna de manera natural un *espacio tangente*  $T_pM$  de dimensión  $n$ , el cual se puede interpretar como una aproximación lineal a la variedad en ese punto; la variedad tangente  $TM = \cup_{p \in M} T_pM$ , así como la dual  $TM^* = \cup_{p \in M} T_pM^*$ , no sólo adquiere una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión  $2n$  sino también de «fibrado vectorial» (con fibras los espacios vectoriales  $T_pM$ ). En un espacio afín, el espacio tangente a cada punto se identifica naturalmente con el espacio vectorial director de ese espacio afín pero, en general, no hay una identificación natural entre los espacios tangentes  $T_pM, T_qM$  para distintos puntos  $p, q \in M$ .

### 2.1. MODELOS NO LINEALES DE ESPACIOTIEMPOS

Volvamos a nuestra discusión sobre los e.t. (siguiendo [3]). Resulta natural postular ahora:

- El e.t. físico se modela mediante una variedad diferenciable  $M$  (de dimensión  $n = 4$ ), cada uno de cuyos puntos  $p \in M$  llamaremos *sucesos* (y representa un punto en un instante, un «aquí-ahora»).
- Las aproximaciones lineales obtenidas a partir de los SRI son objetos que deben definirse en cada espacio tangente  $T_pM, p \in M$ . Además deberán variar de manera suave (continua y, digamos, diferenciable  $C^\infty$ ) de punto a punto.

Así, si, por el momento, seguimos admitiendo los cuatro modelos lineales obtenidos en la sección anterior, podemos afirmar:

1. Si en cada  $T_pM$  definimos un producto escalar lorentziano se obtiene una *métrica de Lorentz*  $g$  sobre  $M$ , que será el modelo de e.t. en la Relatividad General de Einstein.
2. Análogamente, si en cada  $T_pM$  definiéramos un producto escalar euclidiano, se obtendría una métrica riemanniana sobre  $M$ .
3. Si en cada  $T_pM$  definimos un modelo de Galileo, se obtiene lo que llamaremos una *estructura leibniziana* sobre  $M$ , esto es, una forma diferencial sin ceros  $\Omega$  (definida salvo un signo global, si no se asumiera orientabilidad temporal) y una métrica riemanniana  $h$  en el subfibrado anulador  $\text{Nuc } \Omega \subset TM$ .
4. Análogamente, si en cada  $T_pM$  definiéramos un modelo dual de Galileo, obtendríamos una *estructura anti-leibniziana* (o leibniziana dual) sobre  $M$ , esto es, un campo vectorial sin ceros  $X$  (de nuevo eventualmente salvo signo) y una métrica riemanniana  $h^*$  en su fibrado anulador  $\text{Nuc } X \subset TM^*$ .
5. Existe incluso la posibilidad de cambiar el modelo de punto a punto, obteniéndose una métrica de signatura cambiante  $g$  sobre  $M$ , lorentziana en algún subconjunto abierto, riemanniana en otro, y con una estructura leibniziana o anti-leibniziana en los cerrados donde  $g$  degenera.

Esta última posibilidad resulta altamente especulativa, aunque también puede admitirse seriamente (en [3] se conecta con la celebrada «no boundary proposal» de Hartle y Hawking [13]). No obstante, el somero análisis al final de la Sección 1 sugería que los modelos euclidiano y dual galileano no parecían muy razonables físicamente, al menos a un nivel elemental. Consecuentemente, en lo que sigue descartaremos estos dos casos así como los correspondientes modelos riemanniano y anti-leibniziano sobre la variedad. Seguidamente discutiremos los otros dos casos.

## 2.2. GALILEO-LEIBNIZ FRENTE A LORENTZ-EINSTEIN (Y A NEWTON)

Al margen de las cuestiones relativas a la velocidad de propagación de la luz apuntadas al final de la Sección 1, nos centraremos a continuación en lo que, a nuestro entender, es la diferencia más notable entre métricas de Lorentz y estructuras de Leibniz desde un punto de vista matemático (nos basaremos aquí en [5], o la versión más divulgativa [6]; véase también [18]).

Para una métrica lorentziana  $g$  se verifica un análogo al «milagro» o «lema fundamental» de la Geometría Riemanniana, esto es:  $g$  *selecciona canónicamente una única conexión afín*  $\nabla$  ( $= \nabla^g$ ), llamada de *Levi-Civita*, caracterizada por paralelizar la métrica  $g$  ( $\nabla g = 0$ ) y carecer de torsión ( $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  para cualesquiera campos vectoriales  $X, Y$  sobre  $M$ ). Una tal conexión permite hacer derivadas *covariantes* (independientes de las coordenadas que se escojan) y, por tanto, definir nociones como *curvas aceleradas, geodésicas y curvatura*.

Por el contrario, una estructura leibniziana  $(\Omega, h)$  *no* determina análogamente una conexión afín, la cual debería paralelizar  $\Omega$  y  $h$ . Se puede demostrar que, si no



se les exigiera carecer de torsión, no sólo se encontrarán conexiones que paralelicen  $\Omega$  y  $h$ , sino que éstas tendrán tantos grados de libertad como las conexiones (con o sin torsión) que paralelicen una métrica riemanniana (o lorentziana)  $g$ . No obstante, existirá una conexión sin torsión que paralelice  $\Omega$  y  $h$  si y sólo si  $\Omega$  es cerrada; en este caso, podría considerarse  $\Omega$  localmente como la diferencial de un tiempo absoluto  $T$  definido sobre la variedad (esto es,  $\Omega = dT$ ). Sin embargo, incluso en este caso, la conexión paralelizante sin torsión no estaría definida unívocamente: sería necesario introducir un «campo vectorial gravitatorio» y una «2-forma vorticidad» (ambos sobre el núcleo de  $\Omega$ ) para fijar una tal conexión (véase [5]).

En resumen, en el caso leibniziano serían necesarias estructuras geométricas adicionales para desarrollar conceptos tan familiares como el de aceleración. Sin embargo, la métrica lorentziana  $g$  será mucho más eficiente: basta para ese propósito concreto y, de hecho, para todo el desarrollo de la Relatividad General.

Es de señalar que esta diferencia matemática entre  $g$  y  $(\Omega, h)$  está relacionada con una controversia histórica entre Newton y Leibniz.<sup>4</sup> Simplificando, Leibniz argumentaba que los SRI introducidos por Newton carecían de sentido porque, desde el punto de vista de la geometría euclidiana tridimensional, el espacio «es el mismo» para cualesquiera observadores y no podemos distinguir si uno de ellos «no gira o está girando» (lo que ayudaría a declarar si tal observador es o no inercial). Newton, empero, respondió que la inclinación del agua en un cubo rotante permitía distinguir si un SRI (solidario con el cubo) estaba girando o no.

La Historia de la Ciencia nos dice que, si se nos permite la expresión, Newton se llevó el gato al agua con ese argumento. No obstante, podemos revisar tal dictamen a la luz de la geometría moderna. Newton podía afirmar que el giro de los observadores era detectable porque, desde el punto de vista matemático, estaba usando implícitamente la estructura de espacio afín (¡de todo el espaciotiempo!); recuérdese que todo espacio afín admite de manera natural una conexión afín. Leibniz, empero, no lo consideraba detectable porque no suponía esa estructura, sino sólo la (más explícita) «leibniziana».

### 2.3. MODELO LORENTZIANO Y RELATIVIDAD GENERAL

Como hemos visto, la existencia automática de la conexión de Levi-Civita  $\nabla$  da un apoyo matemático adicional al modelo lorentziano y, esencialmente, el par  $(M, g)$  es el modelo de e.t. de la Relatividad General. De hecho, el *Principio de Equivalencia* de Einstein, considerado por él mismo como el sustento de la Relatividad General desde un punto de vista físico, implicaría aquí la siguiente afirmación: las partículas, cuando no están sujetas a más fuerzas que la gravitatoria<sup>5</sup> se mueven siguiendo las geodésicas de una conexión que es precisamente la de Levi-Civita para  $g$ . Y, posiblemente, el mejor argumento físico para este principio es el mismo por el que

<sup>4</sup>Para los matemáticos es de sobra conocida la polémica entre ambos reclamando la paternidad del Cálculo Diferencial. No obstante, los dos pensadores se enzarzaron también en discusiones acerca de sus distintas visiones del espacio y tiempo.

<sup>5</sup>Esto es, están en «caída libre», no sujetas, por ejemplo, a una fuerza como la que el suelo ejerce habitualmente sobre nuestros pies, que es de tipo electromagnético.

un geómetra riemanniano usará normalmente la conexión de Levi-Civita: el principio de simplicidad o, si se prefiere más filosóficamente, el de la navaja de Ockham.

Así, en Relatividad General: (a) la conexión de Levi-Civita  $\nabla$  de  $g$  se identifica con el campo gravitatorio, (b) ciertas geodésicas representan partículas no aceleradas (salvo por este campo), y (c) la curvatura de  $g$  se relacionará con la distribución de materia y energía en el e.t., así como con las trayectorias de las partículas en caída libre (desviación relativa de las geodésicas). Nos centraremos en lo que sigue en este modelo de espaciotiempo.

### 3. RELATIVIDAD GENERAL: PREDICTABILIDAD Y AGUJEROS NEGROS

A continuación haremos un breve repaso de algunos elementos geométricos asociados a la descripción relativista del e.t. (véase por ejemplo los libros [2, 22], escritos para una audiencia matemática). Empecemos considerando un espacio vectorial  $V$  dotado con un producto escalar lorentziano  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ , esto es, con signatura  $(-, +, \dots, +)$ . Un vector  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , se dice

$$\begin{array}{ll} \text{temporal si } \langle v, v \rangle_1 < 0, & \text{causal si } \langle v, v \rangle_1 \leq 0, \\ \text{luminoso si } \langle v, v \rangle_1 = 0, & \text{espacial si } \langle v, v \rangle_1 > 0. \end{array}$$

Los vectores causales se distribuyen en dos conos; una *orientación temporal* es la elección de uno de ellos, al que se llamará *cono futuro* (y por contraposición, al no escogido, *cono pasado*).

Una *variedad lorentziana* es una variedad diferenciable  $M$  dotada de una métrica lorentziana  $g$  (que asigna un tal producto  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  para cada punto). Un *espaciotiempo (relativista)* es una variedad lorentziana conexa dotada de una *orientación temporal*, esto es, una elección continua de uno de los dos conos en cada punto; esta orientación temporal se suele suponer implícitamente, por lo que denotaremos un e.t. simplemente como  $(M, g)$ .

Consistentemente, se dice que una curva  $\gamma$  en un e.t. es temporal (resp., luminosa o causal) y dirigida al futuro o pasado, cuando así lo es su velocidad  $\gamma'$  en todo punto. En Relatividad las partículas con masa se modelan mediante curvas temporales dirigidas al futuro, mientras que para las sin masa (rayos de luz) se reemplaza ser temporal por ser luminosa. Dados  $p, q \in M$  diremos que  $p$  está en el pasado cronológico (resp., causal) de  $q$ , denotado  $p \ll q$  (resp.,  $p \leq q$ ) cuando existe una curva temporal dirigida al futuro (resp., causal o constante) de  $p$  a  $q$ , y definimos los futuros cronológico y causal de  $p$  como, respectivamente,

$$I^+(p) = \{q \in M : p \ll q\}, \quad J^+(p) := \{q \in M : p \leq q\}$$

(y análogamente los pasados  $I^-(p)$ ,  $J^-(p)$ ).

#### 3.1. ESPACIOTIEMPOS GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

La clase más importante de los e.t. relativistas es la de los *globalmente hiperbólicos*. Esto significa que el e.t.  $(M, g)$  satisface: (i) ser *causal* y (ii) *no contener*

*singularidades (conformes) desnudas.*<sup>6</sup> La condición (i) significa que no existen curvas causales (temporales o luminosas) cerradas, esto es, que ni materia ni energía pueden viajar al pasado. La condición (ii) tiene una formalización matemática muy sencilla:  $J^+(p) \cap J^-(q)$  debe ser compacto para todo  $p, q \in M$ . Físicamente, significa que no puede haber una pérdida (o aparición) súbita de materia/energía/información (esto es, una «singularidad») que sea visible por otros (que esté «desnuda»); singularidades como la del Big-Bang, que se nos aparecerán en el Teorema 3.2, sí son admisibles.<sup>7</sup>

Un importante teorema sobre e.t. globalmente hiperbólicos, demostrado por Geroch [12] en su versión topológica y con conclusiones extendidas diferenciable y métricamente por los autores [7], proporciona las siguientes caracterizaciones.

TEOREMA 3.1. *Para un e.t.  $(M, g)$ , equivalen:*

1. *Ser globalmente hiperbólico, según la definición anterior.*
2. *Admitir una hipersuperficie espacial de Cauchy, esto es, una hipersuperficie diferenciable  $\Sigma$  tal que la métrica  $g$  restringida a  $\Sigma$  es definida positiva ( $\Sigma$  es «espacial») y tal que toda curva causal inextensible corta a  $\Sigma$  en exactamente un punto ( $\Sigma$  es «de Cauchy», es decir, el «espacio en un instante» donde se pueden plantear condiciones iniciales para ecuaciones que predigan la evolución del e.t. y la materia que contenga).*
3. *Admitir una función temporal de Cauchy, esto es, una función diferenciable suprayectiva  $t : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que: (a) su gradiente es temporal y dirigido al pasado (por lo que  $t \circ \gamma$  es estrictamente creciente si  $\gamma$  es cualquier curva causal dirigida al futuro) y (b) todas las hipersuperficies  $\Sigma_{t_0} = t^{-1}(t_0)$  son hipersuperficies espaciales de Cauchy.*<sup>8</sup>

Resumiendo, el teorema asegura que en e.t. globalmente hiperbólicos se puede hablar de elementos *física y filosóficamente atractivos*:

- De la definición: no existen paradojas asociadas a viajes al pasado y no se observa la aparición o desaparición súbita de materia o información.
- Usando las caracterizaciones del teorema:
  - (a) En principio, es posible asegurar predictabilidad (determinismo): el «presente» sería una hipersuperficie de Cauchy espacial, por lo que su conocimiento (y el de todos los datos necesarios sobre ella) permitiría, en principio, determinar el futuro (digamos, supuesto que el comportamiento de la materia se rige por ecuaciones hiperbólicas).
  - (b) Espacio y tiempo globales emergen a través de la función de Cauchy temporal (aunque no sean únicos).

<sup>6</sup>En la literatura clásica, como [2, 14, 22], se pide una condición más restrictiva que la de ser causal (i), concretamente, ser fuertemente causal. No obstante, al satisfacerse (ii), esa definición resulta ser simplificable, como se demostró en [8].

<sup>7</sup>Estas singularidades no estarían «desnudas» porque los observadores también nacen de ellas, esto es, nadie vería surgir el Universo de la nada.

<sup>8</sup>Es decir, un tiempo (no-único)  $t$  emerge, y cada hipersuperficie de nivel  $\{t = \text{constante}\}$  es el «espacio en cada instante».

En adelante, los e.t. se supondrán siempre globalmente hiperbólicos.

### 3.2. LA ECUACIÓN DE EINSTEIN

Como se sugirió al final de la Sección 2, una idea sobresaliente de la Relatividad General consiste en conectar la curvatura del espaciotiempo con la distribución de materia y energía en él. La forma precisa de esta conexión es la *ecuación de campo de Einstein* [11], cuyo centenario es el principal hito que celebramos aquí.

Esta ecuación se escribe en términos del tensor de Ricci, que denotaremos  $\text{Ric}$  (el cual se construye contrayendo el tensor curvatura  $R$  de Riemann asociado a la métrica  $g$ ), la curvatura escalar  $S$  (que es a su vez la contracción métrica de Ricci) y el tensor impulso energía  $T$ , que se construye a partir de la distribución de materia. Explícitamente, la ecuación (en unidades físicas apropiadas y suponiendo, como en la versión más estándar, que la constante cosmológica es nula) se escribe

$$\text{Ric} - \frac{1}{2} S g = 8\pi T.$$

No nos preocupará aquí la forma concreta de la ecuación ni cómo se dedujo,<sup>9</sup> aunque sobre esto merece comentarse que Einstein se apoyó en razones de simetría y analogías newtonianas, mientras que Hilbert, casi simultáneamente, la dedujo a partir de un principio variacional sobre la curvatura escalar. Lo que nos importará es percatarnos de que el miembro izquierdo de la ecuación es un campo tensorial construido a partir de la geometría del espaciotiempo, mientras que el derecho es un campo tensorial construido a partir de la materia/energía. Así, las condiciones físicas razonables que debieran de cumplir la materia y su distribución implicarán condiciones geométricas (física y matemáticamente interesantes) sobre la curvatura y viceversa.

De entre estas condiciones, destaca la *condición dominante de energía*, cuyo significado físico es que la densidad de energía debe ser no negativa y que la materia/energía no deben viajar más rápidamente que la luz. No entraremos en explicar cómo se traducen algebraicamente estas propiedades sobre  $T$ , pero sí tendremos en cuenta que, gracias a la ecuación de Einstein, esta condición produce, para casos simples de e.t., la no-negatividad de la curvatura escalar:

$$S \geq 0. \tag{3}$$

No es ésta la única condición interesante sobre el tensor  $T$ . Así, al menos hasta que en la década de los 90 se descubrió la expansión acelerada del Universo, parecía natural imponer la llamada *condición fuerte de energía* (sobre  $T$ ), la cual equivalía a la *condición de convergencia temporal* (sobre Ricci). Concretamente, esta última condición es  $\text{Ric}(v, v) \geq 0$  sobre todo vector  $v$  temporal, y tiene la interpretación natural de que *la gravedad, en promedio, atrae*. Usando esta condición Hawking demostró su celebrado teorema de singularidades, considerado como un fuerte soporte a la existencia de una singularidad inicial o *Big Bang*. Para que el lector más avezado

<sup>9</sup>Remitimos encarecidamente a los capítulos 9–12 del excelente libro [24].

en Geometría Diferencial compruebe hasta qué punto ha profundizado en la Geometría Lorentziana, escribimos a continuación la forma precisa de este teorema.<sup>10</sup> Informalmente, el teorema asegura que todas las curvas temporales van a ser incompletas hacia el pasado bajo las hipótesis de predictabilidad, convergencia temporal y existencia de una expansión estrictamente positiva para la totalidad del espacio.<sup>11</sup> El lector menos familiarizado puede obviar la forma precisa y pasar directamente a la siguiente subsección.

TEOREMA 3.2. *Sea  $(M, g)$  un e.t. que verifica:*

1. *es globalmente hiperbólico,*
2. *satisface la condición de convergencia temporal,*
3. *admite una hipersuperficie de Cauchy  $\Sigma$  con ínfimo de su expansión  $C > 0$  (esto es, con curvatura media  $H \geq C > 0$  siendo el vector curvatura media  $\vec{H} = H\vec{n}$ , con  $\vec{n}$  ortogonal a  $\Sigma$  y dirigido al futuro).*

*Entonces, cualquier curva temporal pasada que empiece en  $\Sigma$  tiene longitud  $\leq 1/C$ .*

### 3.3. DESIGUALDAD DE PENROSE Y FALSABILIDAD DE LA EXISTENCIA DE AGUJEROS NEGROS

Nuestro siguiente objetivo es dar una breve idea sobre una conjetura geométrica, la *desigualdad de Penrose*, la cual permanece abierta en su versión más general. La sola formulación de esta desigualdad resulta un tanto enrevesada, pero nuestro objetivo no tiene una intención técnica (recomendamos [10] para una excelente introducción para matemáticos, [21] para una presentación simplificada o [19] para una exhaustiva actualización de resultados, incluyendo otros conceptos físicos). Por el contrario, nos contentaremos con hacer ver al lector que esta desigualdad sugiere una reflexión sobre el papel de los matemáticos. La desigualdad de Penrose es tal vez el caso más espectacular en el que una teoría física produce una sorprendente predicción geométrica. Así, tomando esta predicción como una conjetura, su solución contribuye a refutar o validar aspectos fundamentales de la teoría, esto es, ¡el papel de los matemáticos resulta aquí equiparable al de los físicos experimentales!<sup>12</sup>

La historia empieza a principio de los setenta, cuando Roger Penrose [23] considera que la teoría de los agujeros negros se está desarrollando de manera rápida y poco rigurosa. Esta teoría predice un modo muy concreto de evolución del agujero hasta un estado final. Agudamente, Penrose se percata de que, comparando la geometría del estado inicial y final del agujero, y teniendo en cuenta su modo de evolución,

<sup>10</sup>Véase [22, Theorem 55A] para un tratamiento matemático cuidadoso. Recomendamos también al lector experto en Geometría Riemanniana la referencia [20], donde se demuestra tanto el teorema de Hawking como un teorema puramente riemanniano cuyas hipótesis y conclusiones resultan ser isomorfias al de Hawking.

<sup>11</sup>Esta última hipótesis está asegurada por observaciones astronómicas para nuestro punto del espacio, y se admite que es cierta para otros puntos por la homogeneidad e isotropía a gran escala que se observa en él.

<sup>12</sup>Sobre esto, véase el controvertido artículo de Jaffe y Quinn [17] acerca del papel de las «matemáticas teóricas» en Física.

se obtenía un cierto tipo de desigualdad geométrica (para una clase de variedades diferenciables, no sólo lorentzianas sino también riemannianas). Esta desigualdad resultaba totalmente inesperada desde el punto de vista puramente geométrico, por lo que Penrose pretendía así atacar el «establishment viewpoint» de la teoría.

Para establecer la desigualdad, Penrose usó tres elementos fundamentales, que describimos brevemente a continuación: el concepto de masa, el de agujero negro y la teoría sobre la evolución de los agujeros negros.

### 3.3.1. MASA EN RELATIVIDAD GENERAL

El concepto de *masa*, con el que nos sentimos familiarizados en la vida cotidiana, resulta ser muy sutil en Relatividad General. Recordemos que la distribución de materia y energía se describía mediante un campo tensorial  $T$ , pero la intuición de la Mecánica Clásica sugiere que la masa debiera de ser un número real  $m \geq 0$  calculable a partir de  $T$  o (equivalentemente gracias a la ecuación de Einstein) de la curvatura del espaciotiempo. Además, cuando hablamos de la masa total o energía del e.t., sería razonable pensar que esa masa se calculara para cada hipersuperficie de Cauchy  $\Sigma$  (interpretándose esto como el cálculo de la masa en la «totalidad del espacio») y que fuera independiente de la hipersuperficie escogida (la masa del Universo no debiera de variar, puesto que es un «sistema aislado», en el sentido de que no interactúa con otro sistema exterior a él). Este tipo de ingenuos requisitos resulta excesivamente restrictivo, por lo que no existe una definición general de masa para un e.t. arbitrario.

Sin embargo, sí existe una clase de e.t., los llamados *asintóticamente llanos*, que permiten una definición consistente de lo que es la masa (al menos, bajo la antes comentada condición dominante de energía). No entraremos ni en la definición general de tales e.t. ni en la de su masa. No obstante, sí señalaremos que existen casos particulares simples de tales espaciotiempos, donde la masa se puede calcular en términos puramente riemannianos. En estos casos simples el espaciotiempo se puede ver como un producto ortogonal  $\mathbb{R} \times \Sigma$ , con una métrica lorentziana independiente de la coordenada  $t$  (técnicamente,  $t$  es una función de Cauchy temporal obtenida como la proyección sobre  $\mathbb{R}$ ) y una métrica  $h$  sobre la 3-variedad  $\Sigma$ . En estos e.t.: (a) la condición fuerte de energía implica que la curvatura escalar  $S_h$  de  $h$  sea no negativa y (b) la asintoticidad llana del e.t. genera la asintoticidad euclidiana de la métrica riemanniana  $h$  sobre  $\Sigma$ . Esto último significa que la métrica  $h$  es completa y, fuera de una bola de radio grande, se pueden encontrar unas *coordenadas asintóticamente euclidianas*, en las que la expresión de la métrica  $h$  y sus dos primeras derivadas convergen rápidamente (al tender a infinito con la distancia radial) hacia la expresión de la métrica euclidiana usual. Para estos e.t., la masa (o, más propiamente, energía ADM o de Arnowitt, Deser y Misner) se calcula mediante la integral

$$m = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^3 \int_{S_r} (\partial_i h_{ij} - \partial_j h_{ii}) n^j dA, \quad (4)$$

donde  $S_r$  representa una esfera de radio  $r$  en coordenadas asintóticamente llanas y  $n$  es el vector unitario normal a  $S_r$  que apunta al exterior. Obsérvese que la definición de  $m$  depende exclusivamente de la parte riemanniana, por lo que también llamaremos a (4) *masa riemanniana* o *masa intrínseca* de  $(\Sigma, h)$ .

Se pueden buscar algunas interpretaciones newtonianas a la anterior definición, del tipo: (a) la integral (4) tiene analogías con la que se utiliza en mecánica newtoniana para calcular la masa a partir del flujo del campo gravitatorio a través de cualquier superficie que la contenga, o (b) asintóticamente, las geodésicas de  $(\Sigma, h)$  proporcionan la mejor aproximación a las trayectorias newtonianas de  $\mathbb{R}^3$  aceleradas gravitatoriamente por una partícula clásica puntual de masa  $m$ .

Merece además comentarse que el requisito físico básico de que *la masa debe ser positiva*, sugiere el siguiente resultado:

**TEOREMA 3.3.** *Sea  $(\Sigma, h)$  una 3-variedad riemanniana asintóticamente euclidiana con  $S_h \geq 0$ . Entonces,  $m \geq 0$  y la igualdad se verifica si y sólo si  $(\Sigma, h)$  es  $\mathbb{R}^3$ .*

Este teorema fue uno de los hitos de la Geometría Diferencial del siglo XX. Fue demostrado primero por Schoen y Yau [26] para variedades de dimensión  $n \leq 7$  y, poco después, por Witten [30], con una demostración diferente válida para todas las variedades espín (aquéllas cuya segunda clase de Stiefel-Whitney se anula).

Sin embargo, no nos interesará tanto el significado preciso de lo que es la masa como el hecho evidente de la complejidad de la propia definición<sup>13</sup> en la fórmula (4). Esta complejidad hará que las conclusiones sobre la desigualdad de Penrose resulten muy sorprendentes.

### 3.3.2. AGUJEROS NEGROS

Intuitivamente, los agujeros negros son regiones del espaciotiempo con una densidad de materia tan grande que determinan un «horizonte de sucesos»; éste se percibe como una superficie acotada del espacio que envuelve al agujero y que es de «no retorno», en el sentido de que una vez cruzada desde el exterior (por una partícula o rayo de luz), no se puede cruzar desde el interior. Se interpreta así que nada puede escapar a la atracción gravitatoria en la región delimitada por el horizonte de sucesos. La Figura 1 permite entender el significado de esta idea intuitiva desde el punto de vista del e.t. relativista (véase [29] para una introducción desde el punto de vista físico).

Según la teoría de agujeros negros, éstos tienen una masa  $m_{AN}$  que se puede calcular a partir del *área* de la superficie de no retorno  $S_{\min}$ , concretamente:

$$m_{AN} = \sqrt{\frac{\text{Área}(S_{\min})}{16\pi}}. \quad (5)$$

<sup>13</sup>Por ejemplo, un primer paso para que esta definición sea consistente es demostrar que resulta independiente de las coordenadas asintóticas elegidas, lo cual se consigue usando que éstas tienden lo suficientemente rápido a ser euclídeas.

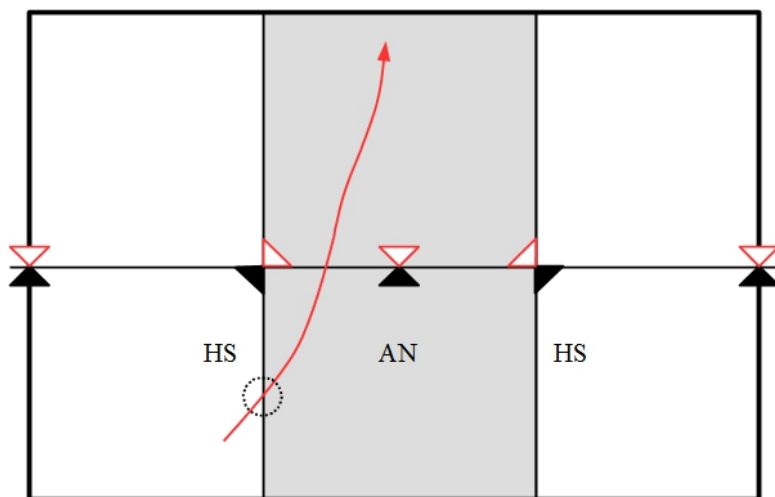


Figura 1: En este e.t. bidimensional, los conos blancos proporcionan la dirección de los vectores temporales futuros y su distribución es independiente de la coordenada vertical. La región gris AN representa un agujero negro: cualquier partícula que siga una trayectoria temporal (como la representada por la curva) o luminosa, una vez entre en la región AN, no la puede abandonar (téngase en cuenta que su velocidad debe apuntar siempre al cono futuro). Las dos líneas verticales HS representan el horizonte de sucesos; si se construye un ejemplo análogo en dimensión 3 o 4, este horizonte sería, respectivamente, una 2- o una 3-hipersuperficie conexa. La intersección del horizonte de sucesos con la línea horizontal dibujada proporciona dos puntos; en dimensión 4, el papel de la línea lo representaría con más generalidad una hipersuperficie de Cauchy  $\Sigma$ , y la intersección proporcionaría una 2-superficie  $S_{\text{mín}} \subset \Sigma$ . Esta superficie  $S_{\text{mín}}$  se percibiría como la superficie de no retorno del agujero negro (en el espacio instantáneo  $\Sigma$ ).

En el caso simple de un e.t. asintóticamente llano como los que hemos visto (para los cuales, en particular, resulta válida la expresión (4)), esta superficie  $S_{\text{mín}} \subset \Sigma$  resulta ser una superficie mínima, esto es, con curvatura media 0 (como las superficies de las pompas de jabón de  $\mathbb{R}^3$ ).

### 3.3.3. EVOLUCIÓN DE AGUJEROS NEGROS

La teoría sobre los agujeros negros predice que cuando éstos evolucionan se cumplen dos propiedades. La primera es que su masa (y, por tanto, su área) nunca decrece. La segunda es que se verifican los llamados «teoremas de no-pelo». Éstos afirman que los agujeros negros deben estabilizarse rápidamente, llegándose a un estado final que debe ser uno de los espaciotiempos de Kerr-Newman. Notablemente, tales e.t. quedan determinados exclusivamente por tres constantes, que representan la masa, el momento angular y la carga eléctrica del agujero. En la imaginería de los relativistas, tal evolución se describe diciendo que los agujeros negros «no tienen



pelos». Castizamente, podemos decir en español que la evolución de los agujeros negros echa los pelillos (esto es, los detalles iniciales en su formación) a la mar.

Por supuesto, uno espera desde el punto de vista físico que la masa  $m(t)$  del e.t. en cada instante  $t$  sea mayor que la masa en ese instante de cualquier agujero negro  $m_{AN}(t)$  (pues éste está contenido en aquél). Sin embargo, semejante afirmación no resulta nada obvia matemáticamente: la primera masa  $m(t)$  se obtiene de (4) como una integral en  $\infty$ , mientras que la segunda  $m_{AN}(t)$  proviene de (5), donde se usa el área de una superficie. Una computación directa en los espaciotiempos de Kerr-Newman prueba que, efectivamente, esta desigualdad se verifica en el estadio final  $t = \infty$  de la evolución del agujero negro, esto es,  $m(\infty) \geq m_{AN}(\infty)$ . No obstante, como argumentó Penrose, si la teoría es consistente matemáticamente, esta desigualdad debería mantenerse en cualquier momento de la evolución, e incluso con más motivo que en el estadio final. De hecho, para llegar a este estadio, la masa del agujero negro sólo podría haber crecido,  $m_{AN}(\infty) \geq m_{AN}(t)$ , mientras que la masa  $m(t)$  del espaciotiempo no podría haberlo hecho,  $m(t) \geq m(\infty)$  (una sutileza del proceso de evolución contempla la posibilidad de que la desigualdad sea estricta, al poder perderse materia en forma de radiación hacia el infinito). Por tanto, se concatenan las desigualdades

$$m(t) \geq m(\infty) \geq m_{AN}(\infty) \geq m_{AN}(t), \tag{6}$$

esto es, siempre  $m(t) \geq m_{AN}(t)$ .

### 3.3.4. LA DESIGUALDAD DE PENROSE

En resumen, la mezcla de argumentos físicos y matemáticos que conduce a (6) implica que la desigualdad físicamente obvia  $m \geq m_{AN}$  no es algo que se tenga que imponer a mano en la teoría, sino que siempre se debe poder constatar dentro del formalismo que describe a los e.t. asintóticamente llanos y sus posibles agujeros negros. En particular, para el caso simple que se reduce a una 3-variedad riemanniana  $(\Sigma, h)$  (bajo las hipótesis de ambiente derivadas de la asintoticidad llana y condición dominante de energía), la desigualdad se escribe, usando (4) y (5):

$$\frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^3 \int_{S_r} (\partial_i h_{ij} - \partial_j h_{ii}) n^j dA \geq \sqrt{\frac{\text{Área}(S_{\min})}{16\pi}}, \tag{7}$$

donde  $S_{\min}$  es el área de la mayor superficie mínima cerrada incluida en  $(\Sigma, h)$ . A esta desigualdad se la llama *desigualdad riemanniana de Penrose*, por poder formularse en términos estrictamente riemannianos. No obstante, existen otras desigualdades más generales sobre e.t. que se obtienen aplicando los mismos principios físicos; la versión más general de estas desigualdades es propiamente la *desigualdad de Penrose*. Dada la muy distinta naturaleza de los dos miembros de la desigualdad, no son de extrañar las expectativas de Penrose sobre la existencia de un contraejemplo a (7).

No obstante, tales contraejemplos se mostraban esquivos. En 2001 se publicó la primera demostración de la desigualdad riemanniana de Penrose (7), obtenida por

Huisken e Ilmanen [15]. Como en el caso del teorema de masa positiva, el resultado incluía una caracterización de la igualdad. Concretamente:

**TEOREMA 3.4.** *Sea  $(\Sigma, h)$  una 3-variedad riemanniana asintóticamente euclídea con curvatura escalar  $S_h \geq 0$ . Entonces, la desigualdad (7) se verifica para la superficie mínima  $S_{\min}$  más exterior cerrada (conexa, compacta y sin borde) y embebida en  $\Sigma$ . Más aún, la igualdad se verifica si y sólo si  $(\Sigma, h)$  es la parte espacial del e.t. de Schwarzschild (esto es, el espaciotiempo de Kerr-Newman con masa  $m \geq 0$  y carga y momento angular iguales a 0).*

Casi simultáneamente, Bray [9] dio una demostración totalmente distinta y ciertamente más general, ya que se puede aplicar a la suma de las masas de todos los agujeros negros (esto es, sin requerir que la superficie  $S_{\min}$  sea conexa).

Remarquemos que, como su nombre sugiere, la desigualdad riemanniana de Penrose se reduce a un problema puramente riemanniano, donde resulta obvio el papel de guía que la intuición relativista ha supuesto para obtener resultados puramente geométricos. Sin embargo, aún está abierta la desigualdad de Penrose general (formulada en el caso lorentziano), lo cual supone un excitante reto en investigación. E, independientemente de cuál sea su solución, se tiene una enseñanza sobre el papel de las Matemáticas en Física: el caso ya resuelto sirve para una primera validación de la teoría de los agujeros negros (¿por qué se iba a verificar (7) si no?), mientras que el caso abierto puede servir de (modesto y barato) «laboratorio» donde validar la teoría o refutar alguno de sus aspectos.

## EPÍLOGO

Sobre un tema como el espacio y el tiempo, algo que a todo ser humano fascina e incluso preocupa en algún momento de su vida, la anterior reflexión físico-matemática puede parecer un tanto coja, pues queda aparentemente muy alejada de otras ciencias humanas o de «las Letras». Y, desde luego, poco podemos hacer para conectarla con artes como la Poesía: si, por ejemplo, Goethe decía de un instante «detente, eres tan hermoso», la aportación de nuestro estudio podría resultar desoladora (¿se refiere un *instante* a la totalidad del espacio, por lo que se corresponde con una hipersuperficie de Cauchy  $\Sigma$ ?, ¿tiene su belleza que ver con las simetrías intrínsecas o extrínsecas de  $\Sigma$ ?). A pesar de esto, atrevámonos a reflexionar un poco con algunas consideraciones filosóficas.

Es célebre la frase de San Agustín de Hipona: «¿Qué es, pues, el tiempo? Si nadie me lo pregunta, lo sé; si quiero explicarlo a quien me lo pide, no lo sé». Concluía este pensador que el tiempo es un «pasar desde un pasado, que ya no existe, a un presente cuyo ser consiste en pasar al futuro, que todavía no es»<sup>14</sup> y que el tiempo se da subjetivamente en el alma humana. La primera frase refleja perfectamente la perplejidad que sentimos al reflexionar sobre el tiempo. Einstein mismo expresa su propia perplejidad en otra conocida frase, escrita a la muerte de su amigo Michele

<sup>14</sup>Más emotivo, Quevedo diría: «Ayer se fue; mañana no ha llegado; / hoy se está yendo sin parar un punto: / soy un fue, y un será, y un es cansado».

Besso: «para nosotros, físicos creyentes, la distinción entre pasado, presente y futuro es sólo una ilusión, aunque persistente». Como San Agustín, podemos entender que Einstein insiste en el carácter subjetivo del tiempo. No obstante, la frase de éste sugiere algo más técnico que la mera perplejidad: si el lector analiza el modelo de e.t. que hemos introducido, se percatará de que el Universo entero viene dado de golpe, como un bloque, y que el tiempo que íntimamente uno cree percibir (ése que está y desaparece al instante, y que tal vez sea la percepción más obvia de nuestra propia existencia), no se modela en ningún momento.

La posibilidad relativista de que existan diferentes tiempos no aparece muy seriamente en la filosofía desarrollada hasta el siglo XX aunque, por ejemplo, los escolásticos distinguían entre tres tipos de tiempo: el de nosotros, seres mortales (*tempus*), el de los ángeles (*aevum*) y el de Dios (*aeternitas*). Tanto para Aristóteles como para Newton, el tiempo transcurre de una manera, digamos, homogénea, si bien para el primero está ligado al cambio, mientras que, para el segundo, «el tiempo absoluto, verdadero y matemático, en sí y por su propia naturaleza sin relación a nada externo, fluye uniformemente». La idea resulta cautivadora, y Newton la acompaña de un espacio absoluto, que forma parte del *sensorio divino*, con lo que va más allá del concepto de espacio necesitado para su propia Mecánica. Estas últimas ideas (como otras de Newton que llevaron a Keynes a calificarlo como el último de los grandes magos, más que como el primero de los grandes de la razón) pueden resultarnos hoy extrañas. Sin embargo, sin ellas quizás nunca habría podido vislumbrar la grandiosa Mecánica cuyos elementos más primordiales hemos repasado aquí.

Según Kant, el espacio y el tiempo no son rasgos que las cosas tengan independientemente de nuestro conocimiento de ellas, sino que son formas a priori o intuiciones puras (el espacio de la sensibilidad externa, de las cosas físicas, y el tiempo de la interna, de la propia vida psíquica); esto es, no se extraen de la experiencia sensible, sino que la hacen posible. Podríamos preguntarnos por qué habitan en nosotros estas formas a priori de la sensibilidad. Hoy día evitaríamos atribuírselas directamente a un Creador, y se las achacaríamos a nuestra adaptación evolutiva al medio; esto indicaría que, de algún modo, espacio y tiempo también debieran de estar presentes en ese medio. Desde una tal perspectiva, los principios de sencillez que aparecen en nuestros postulados sobre SRI (como la sencillez matemática del Postulado 1) pueden considerarse más como principios sobre cómo somos capaces de medir espacio y tiempo que sobre la naturaleza de los mismos. E incluso podría aventurarse que nuestro Postulado 2 sobre la «igualdad de derechos» entre los SRI está también imbuido de otros principios y convencionalismos en el espíritu de nuestro tiempo.

## APÉNDICE: SOLUCIÓN DEL EJERCICIO

Por el algoritmo para calcular la matriz inversa,

$$a = \tilde{a} = d / \det A, \quad d = \tilde{d} = a / \det A, \quad \tilde{b} = -b / \det A \quad \text{y} \quad \tilde{c} = -c / \det A,$$

de donde resulta

1.  $d \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \Leftrightarrow \det^2 A = 1$ . Luego como  $a \neq 0$ ,  $\det^2 A = 1$ .
2.  $\tilde{b} = 0$  (resp.,  $\tilde{c} = 0$ )  $\Leftrightarrow b = 0$  (resp.,  $c = 0$ ), en cuyo caso  $\det A = ad$ ,  $a^2 = 1 = d^2$ .

Si  $\tilde{b} \neq 0$ , sea  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $c = k\tilde{b}$ . En este caso, también

$$\tilde{c} = -c/\det A = -k\tilde{b}/\det A = -k\tilde{b} \det A/\det^2 A = kb.$$

La solución se sigue entonces directamente de la igualdad

$$A^t \cdot I^{(k)} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & \tilde{b} \\ \tilde{c} & d \end{pmatrix} = I^{(k)} \cdot A^{-1},$$

completando la discusión con el caso  $\tilde{b} = 0$ , para el cual  $A^{-1} \cdot I^{(0)} = I^{(0)} \cdot A^t$ .

**AGRADECIMIENTOS** Agradecemos la lectura cuidadosa del manuscrito por Marc Mars de la Universidad de Salamanca, José M. M. Senovilla de la Universidad del País Vasco, Ángel Ferrández y Miguel A. Javaloyes, ambos de la Universidad de Murcia, así como la invitación y excelente acogida del Departamento de Matemáticas de esta universidad a impartir una conferencia sobre el tema del artículo. Asimismo, agradecemos a LA GACETA la invitación a colaborar con ocasión de este centenario. Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto MTM2013-47828-C2-1-P con fondos Mineco-Feder.

## REFERENCIAS

- [1] J. A. DE AZCÁRRAGA, Albert Einstein (1879–1955) y su ciencia, *La Gaceta de la RSME* **8**(1) (2005), 53–92.
- [2] J. K. BEEM, P. EHRLICH Y K. EASLEY, *Global Lorentzian Geometry*, 2.<sup>a</sup> ed., Marcel Dekker, 1996.
- [3] A. N. BERNAL, M. P. LÓPEZ Y M. SÁNCHEZ, Fundamental Units of Length and Time, *Found. Phys.* **32**(1) (2002), 77–108.
- [4] A. N. BERNAL, M. LÓPEZ Y M. SÁNCHEZ, Unidades fundamentales de tiempo y longitud, *Proceedings of the X Fall Workshop on Geometry and Physics* (Miraflores de la Sierra, Madrid, 2001), Vol. 4, 65–75, *Publicaciones de la RSME*, 2003.
- [5] A. N. BERNAL Y M. SÁNCHEZ, Leibnizian, Galilean and Newtonian structures of spacetime, *J. Math. Phys.* **44** (2003), 1129–1149.
- [6] A. N. BERNAL Y M. SÁNCHEZ, Estructuras leibnizianas, galileanas y newtonianas del espaciotiempo, *Proceedings of the X Fall Workshop on Geometry and Physics* (Miraflores de la Sierra, Madrid, 2001), Vol. 4, 49–64, *Publicaciones de la RSME*, 2003.
- [7] A. N. BERNAL Y M. SÁNCHEZ, Smoothness of Time Functions and the Metric Splitting of Globally Hyperbolic Spacetimes, *Commun. Math. Phys.* **257** (2005), 43–50.

- [8] A. N. BERNAL Y M. SÁNCHEZ, Globally hyperbolic spacetimes can be defined as ‘causal’ instead of ‘strongly causal’, *Class. Quantum Grav.* **24** (2007), 745–750.
- [9] H. L. BRAY, Proof of the Riemannian Penrose Inequality Using the Positive Mass Theorem, *J. Differential Geom.* **59**(2) (2001), 177–267.
- [10] H. L. BRAY, Black holes, Geometric Flows, and the Penrose Inequality in General Relativity, *Notices of the AMS* **49** (2003), 1372–1381.
- [11] A. EINSTEIN, Die Feldgleichungen der Gravitation, *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss.* **48** (1915), 844–847.
- [12] R. P. GEROGH, Domain of dependence, *J. Math. Phys.* **11** (1970), 437–449.
- [13] J. B. HARTLE Y S. W. HAWKING, Wave function of the Universe, *Phys. Rev. D* **28** (1983), 2960.
- [14] S. W. HAWKING Y G. F. R. ELLIS, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973.
- [15] G. HUISKEN Y T. ILMANEN, The Inverse Mean Curvature Flow and the Riemannian Penrose Inequality, *J. Differential Geom.* **59**(3) (2001), 353–437.
- [16] W. v. IGNATOWSKY, Einige allgemeine Bemerkungen über das Relativitätsprinzip, *Phys. Zeits.* **11** (1910), 972–976. Disponible en [https://de.wikisource.org/wiki/Einige\\_allgemeine\\_Bemerkungen\\_%C3%BCber\\_das\\_Relativit%C3%A4tsprinzip](https://de.wikisource.org/wiki/Einige_allgemeine_Bemerkungen_%C3%BCber_das_Relativit%C3%A4tsprinzip)
- [17] A. JAFFE Y F. QUINN, “Theoretical mathematics”: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics, *Bull. Am. Math. Soc.* **29** (1993), 1–13.
- [18] H. P. KÜNZLE, Galilei and Lorentz structures on space-time: comparison of the corresponding geometry and physics, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)* **17** (1972), 337–362.
- [19] M. MARS, Present status of the Penrose inequality, *Class. Quantum Grav.* **26** (2009), 193001.
- [20] P. MORALES ÁLVAREZ Y M. SÁNCHEZ, Myers and Hawking Theorems: Geometry for the Limits of the Universe, *Milan J. Math.* **83** (2015), 295–311.
- [21] O. MÜLLER Y M. SÁNCHEZ, An Invitation to Lorentzian Geometry, *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **115**(3-4) (2013), 153–183.
- [22] B. O’NEILL, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, N.Y., 1983.
- [23] R. PENROSE, Naked singularities, *Ann. New York Acad. Sci.* **224** (1973), 125–134.
- [24] J. M. SÁNCHEZ RON, *El origen y desarrollo de la relatividad*, Alianza Editorial, Madrid, 1983.
- [25] J. M. SÁNCHEZ RON, Einstein, la relatividad y las matemáticas, *La Gaceta de la RSME* **7**(1) (2004), 153–184.
- [26] R. SCHOEN Y S.-T. YAU, On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, *Comm. Math. Phys.* **65**(1) (1979), 45–76.
- [27] J. M. M. SENOVILLA, La Cosmología y los matemáticos, *La Gaceta de la RSME* **8**(3) (2005), 597–636.

- [28] VV. AA., *Einstein*, Investigación y Ciencia, Temas **40**, Barcelona, 2005.
- [29] R. M. WALD, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.
- [30] E. WITTEN, A new proof of the positive energy theorem, *Comm. Math. Phys.* **80**(3) (1981), 381–402.

ANTONIO N. BERNAL, DPTO. DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA, UNIVERSIDAD DE GRANADA  
Correo electrónico: [anbernal@no-gravity.eu](mailto:anbernal@no-gravity.eu)

MIGUEL SÁNCHEZ CAJA, DPTO. DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA, UNIVERSIDAD DE GRANADA  
Correo electrónico: [sanchezm@ugr.es](mailto:sanchezm@ugr.es)  
Página web: <http://gigda.ugr.es/sanchezm/index.html>