1. Relojes desplazados lentamente según la Relatividad Especial

Comenzaremos nuestro análisis recordando que las transformaciones de Lorentz tienen la forma:

$$\left.\begin{array}{c} t'=\gamma\,(t+\frac{v}{c^2}x) \\ x'=\gamma\,(x+v\cdot t) \\ y'=y \\ z'=z \end{array}\right\} \quad (1)$$

donde

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

Ahora, la ecuación del tiempo *t'* para el reloj en el origen del sistema en movimiento, es decir, con *x'=0* y por tanto con *x = -vt* será:

$$t'=\gamma\cdot(t+\frac{v}{c^2}\cdot(-vt))=t\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{t}{\gamma} \quad (3)$$

que es la expresión habitual para la dilatación temporal. Si, además, estamos ante velocidades pequeñas, $v \ll c$ podremos aplicar la aproximación:

$$\sqrt{1\pm x}\simeq 1\pm\frac{x}{2} \quad (4)$$

y llegaremos a que

$$t'\simeq t\cdot(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}) \quad (5)$$

y si expresamos lo anterior como:

$$t'\simeq t+\delta' \quad (6)$$

obtenemos que el retraso entre ambos relojes será:

$$\delta'\simeq t\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2} \quad (7)$$

que es la expresión obtenida por Einstein en su artículo de 1905 donde, además, escribió:

"*Si en los puntos A y B de K existen relojes sincronizados, que se encuentran en reposo con respecto al sistema en reposo, y movemos el reloj de A con velocidad v a lo largo de la línea que una A con B,* ***al llegar al punto B los relojes ya no estarán sincronizados****, sino que el reloj desplazado de A hasta B mostrará, con respecto al reloj que desde el principio se encontraba en B un retraso de ½·t·(v/c)^2 segundos, donde t es el tiempo que necesita el reloj para pasar de A a B.*

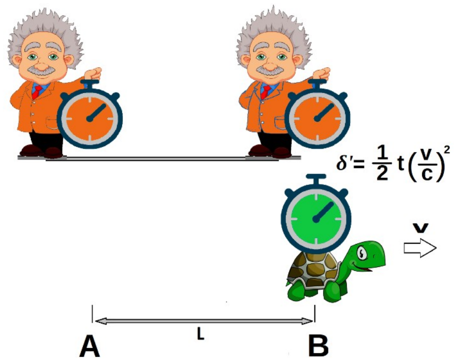

Figura 1: Retraso de un reloj desplazado lentamente.

Inmediatamente se ve que este resultado también es válido cuando el reloj se desplaza desde A hasta B a lo largo de una línea poligonal arbitraria, incluso cuando los puntos A y B coinciden.

Si suponemos que el resultado demostrado para una línea poligonal es válido también para una curva de curvatura continua, obtenemos la siguiente conclusión: ***Si en A se encuentran dos relojes sincronizados y movemos uno de ellos con velocidad constante a lo largo de una curva cerrada hasta regresar al punto A, utilizando para ello un tiempo de t segundos, entonces al arribar al punto A el reloj desplazado mostrará un retraso de ½·t·(v/c)^2 segundos, con respecto al reloj que ha permanecido inmóvil.*** "

2. Relojes desplazados lentamente según un observador externo.

Supongamos que tenemos un sistema de referencia inercial Naranja (N) y que en la posición A hay inicialmente un reloj Verde (V) sincronizado con el reloj allí situado. Imaginemos que, en un momento determinado, el reloj V comienza a moverse en dirección a B que se encuentra a una distancia *L'* de A y sincronizado también con él. La velocidad de V medida en N será *u'* y, al considerar que se desplaza lentamente, podremos suponer que **u'/c ≈ 0**.

Imaginemos que ahora situamos un nuevo observador O (blanco) al que consideraremos en "reposo", para el que el sistema de referencia N se mueve a una velocidad *v* en la dirección creciente de su eje X (véase Figura 2).

Debido a la equivalencia de todos los observadores inerciales, los resultados obtenidos por O deben confirmar la afirmación de Einstein de (7) y, por tanto, el reloj V desplazado lentamente debe retrasar una cantidad $\frac{1}{2}\cdot\Delta t'_N\cdot(u'/c)^2$ con respecto a N, siendo $\Delta t'_N$ el tiempo medido por N que tarda V en recorrer la distancia *L'*.

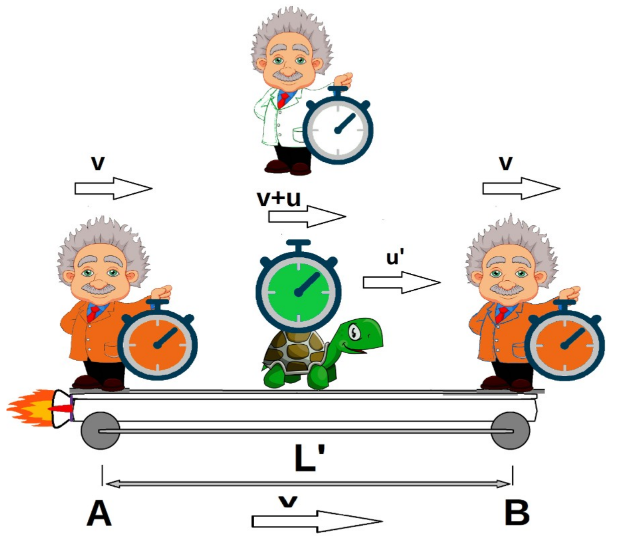

Figura 2: Reloj desplazado lentamente con observador externo.

Para O, si N se mueve a la velocidad *v* respecto a él, entonces el reloj V desplazado lentamente se moverá a velocidad *w=v+u*.

Si tenemos en cuenta la ecuación de transformación de velocidades de Einstein:

$$w=v+u=\frac{u'+v}{1+\frac{u'\cdot v}{c^2}} \tag{8}$$

entonces podemos calcular *u* como:

$$u=\frac{(v+u')}{(1+\frac{u'\cdot v}{c^2})}-v=\frac{(v+u'-v-\frac{u'\cdot v^2}{c^2})}{1+\frac{u'\cdot v}{c^2}} \tag{9}$$

y operando:

$$u=\frac{u'\cdot(1-v^2/c^2)}{1+\frac{u'\cdot v}{c^2}}=\frac{u'}{\gamma^2(1+\frac{u'\cdot v}{c^2})} \tag{10}$$

Desde el punto de vista del observador "estacionario" o externo, O, y aplicando la dilatación temporal (3), el reloj en movimiento V medirá un lapso de tiempo de:

$$\Delta t'_V=\Delta t\cdot\sqrt{1-\frac{(v+u)^2}{c^2}} \tag{11}$$

siendo *Δt* el tiempo, medido por O, que tarda V en recorrer la distancia AB = L'.

Ahora debemos intentar encontrar una ecuación similar a (6) de manera que podamos obtener el desfase δ' del reloj de V con respecto al de N de la forma:

$$\Delta t'_V=\Delta t\cdot\sqrt{1-\frac{(v+u)^2}{c^2}}\simeq\Delta t'_N+\delta' \tag{12}$$

A diferencia de lo que hizo Einstein en su artículo, todavía no es posible aplicar la aproximación (4) ya que no podemos afirmar que *v<<c*. Sin embargo, puesto que estamos en el caso en el que V se desplaza lentamente (*u'/c ≈ 0)* y, como se desprende de (10) *u ≤ u'*, podemos afirmar que *u/c ≈ 0* y aproximar la expresión (11) en series de Taylor hasta la primera potencia de la velocidad *u*. Por tanto, si consideramos que:

$$f(v)=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{\gamma} \tag{13}$$

y aplicamos Taylor obtenemos que:

$$f(v+u)\simeq f(v)+f'(v)\cdot u=\frac{1}{\gamma}+f'(v)\cdot u \tag{14}$$

donde *f'(v)* es su derivada con respecto a *v*:

$$f'(v)=\frac{df}{dv}=\frac{-v/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-\gamma\cdot\frac{v}{c^2} \tag{15}$$

Pero si queremos tener el resultado en función de *u'* (la velocidad medida por N) entonces deberemos sustituir *u* por el valor obtenido en (10):

$$f(v+u)\simeq\frac{1}{\gamma}+\frac{df}{dv}\cdot\frac{u'}{\gamma^2(1+\frac{u'v}{c^2})} \tag{16}$$

y si sustituimos (15) en (16) obtenemos:

$$f(v+u)=\sqrt{1-\frac{(v+u)^2}{c^2}}\simeq\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma\frac{v}{c^2}\cdot u'}{\gamma^2(1+u'\frac{v}{c^2})} \tag{17}$$

y si simplificamos y sacamos factor común *1/*γ:

$$\sqrt{1-\frac{(v+u)^2}{c^2}}\simeq\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{v\cdot u'}{c^2\cdot(1+\frac{u'\cdot v}{c^2})}\right) \tag{18}$$

Ahora veamos cuánto vale Δt. Para O el tiempo empleado por el reloj V en recorrer la distancia L será:

$$\Delta t=\frac{L}{u} \tag{19}$$

Si tenemos en cuenta la contracción de longitudes de Lorentz y el valor de *u* dado por (10) tenemos:

$$\Delta t=\frac{L}{u}=\frac{L'/\gamma}{u}=\frac{L'}{\gamma}\cdot\frac{\gamma^2}{u'}\cdot(1+\frac{u'v}{c^2}) \tag{20}$$

y simplificando

$$\Delta t=\frac{L}{u}=\frac{L'}{u'}\cdot\gamma\cdot\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right) \qquad (21)$$

Puesto que para N el tiempo que tarda V en recorrer la distancia L' es:

$$\Delta t'_N=\frac{L'}{u'} \qquad (22)$$

tendremos que:

$$\Delta t=\gamma\cdot\Delta t'_N\cdot\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right) \qquad (23)$$

A la expresión anterior también podríamos haber llegado sin más que aplicar directamente la ecuación de transformación de Lorentz (1) entre N y O para el tiempo, con *Δx' = L'* (el reloj V recorre la distancia *L'*):

$$\Delta t=\gamma\left(\Delta t'_N+\Delta x\frac{v}{c^2}\right)=\gamma\left(\Delta t'_N+\frac{L'v}{c^2}\right) \qquad (24)$$

Si usamos (22) para obtener *L'* y sacando factor común $\Delta t'_N$ tenemos:

$$\Delta t=\gamma\left(\Delta t'_N+\Delta t'_N\frac{u'v}{c^2}\right)=\gamma\,\Delta t'_N\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right) \qquad (25)$$

que es nuevamente lo obtenido en (23).

Y si ahora sustituimos (18) y (23) en (11) y simplificamos γ obtenemos:

$$\Delta t'_V\simeq\Delta t'_N\cdot\left(1+\frac{v\cdot u'}{c^2}\right)\left(1-\frac{u'v}{c^2\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)}\right) \qquad (26)$$

Y si operamos y simplificamos nuevamente, tendremos que:

$$\Delta t'_V\simeq\Delta t'_N\cdot\left(1+\frac{v\cdot u'}{c^2}\right)-\Delta t'_N\cdot\frac{u'v}{c^2}=\Delta t'_N \qquad (27)$$

Es decir, después de este análisis hemos llegado a que:

$$\Delta t'_V\simeq\Delta t'_N \qquad (28)$$

Luego, si comparamos con (12), tenemos que el desfase δ' será:

$$\delta'\simeq 0 \qquad (29)$$

Es decir, según los cálculos del observador estático, O, cuando un reloj que se desplace lentamente recorra el camino entre A y B, al llegar a B no marcará ningún desfase con el reloj allí situado.

Además, el resultado anterior también es válido si el reloj V se moviera en la dirección contraria, es decir, a velocidad *-u'*.

Y lo aquí calculado es válido para cualquier *v*, es decir, para cualquier observador externo O, ya que el único requisito impuesto en los cálculos ha sido que u'/c ≈ *0* con *u* < *v*.

Debemos aclarar aquí que el resultado $\delta' = 0$ no es consecuencia de que se eliminen o desaparezcan los efectos relativistas de dilatación temporal al hacer u'/c ≈ *0* y regresar nuevamente a los límites de la mecánica de Newton.

Por tanto, tras los cálculos realizados en los apartados anteriores desde el punto de vista de un observador externo O, hemos obtenido las siguientes resultados:

1. ***Un reloj desplazado lentamente que se mueva desde un punto A hasta otro B recorriendo una distancia L', al llegar al punto B no mostrará ningún desfase con el reloj allí situado.***
2. ***Un reloj desplazado lentamente que realice una trayectoria de ida y vuelta tampoco mostrará ningún retraso con respecto al reloj situado en la posición de inicio.***

Estos resultados están en clara contradicción con lo afirmado por Einstein. No obstante, la dilatación temporal de los relojes en movimiento es un hecho verificado varias veces experimentalmente. Ejemplos de ello son el sistema GPS, la vida media de los muones o el experimento de Hafele-Keating, y sin embargo, tanto los cálculos de Einstein como los aquí realizados parecen estar dentro del marco de la Relatividad Especial.