

Sobre las dimensiones extras espaciales



César Mora y O. Pedraza

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria del Instituto Politécnico Nacional, Legaria #694. Col. Irrigación, CP.11500, México D. F.

E-mail: cmoral@ipn.mx

(Recibido el 5 de Octubre de de 2007; aceptado el 7 de Diciembre de 2007)

Resumen

En este artículo damos una introducción a los escenarios de dimensiones extras. Empezamos por definir el concepto de dimensión y enfatizamos el hecho de por qué en Física es importante trabajar con teorías que requieren de un espacio tiempo de más de cuatro dimensiones. Presentaremos los dos modelos más importantes de los mundos brana. Finalmente, se dará un ejemplo en el cual se considera una sola dimensión espacial extra.

Palabras claves: Cosmología, teoría de cuerdas, teorías multidimensionales.

Abstract

In this article we give an introduction to the scenarios of extra dimensions. We begin by defining the concept of dimension and emphasize the fact why in Physics is important to work with theories that require a space-time of more than four dimensions. We show the two models most important of the brane worlds. Finally, we give an example in which consider only one extra spatial dimension.

Keywords: Cosmology, string theory, multidimensional theories.

PACS: 01.55.+b, 01.30.-y, 95.10.-a, 98.80.-k

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

En la Física la idea de dimensiones extras se remonta por lo menos a principios del siglo XX y tiene su origen en la búsqueda de una teoría que permita unificar la fuerza electromagnética y gravitacional. Hoy en día este objetivo se mantiene, aunque ampliado a incluir todas las fuerzas conocidas en la naturaleza (electromagnética, débil, fuerte y gravitacional). No hay una respuesta definitiva a esta cuestión, no obstante, las teorías de cuerdas, englobadas en la teoría M [1], se consideran el mejor candidato para este fin. Por otro lado, consideramos que es importante introducir temas de Física de frontera de una manera accesible para profesores y alumnos de los niveles educativos anteriores a la universidad y en carreras de ingeniería, en parte con el fin de despertar la curiosidad de los alumnos para conocer algunos de los últimos avances y para innovar el curriculum de Física [2]; ya que por la misma naturaleza de la ciencia se tiene que es una necesidad actualizar la Física escolar, y esto se puede hacer introduciendo temas que en los últimos años han revolucionado a la Física y a la tecnología, pero que han quedado fuera de los contenidos regulares de los cursos de Física por considerarse “demasiado técnicos”[3]. Ejemplos de omisión de temas trascendentales en el curriculum de Física son, la teoría de la relatividad general y la mecánica cuántica, que diversos autores han señalado, recalcando que seguimos enseñando la misma Física de hace 300 años [4]. No obstante su complejidad, algunas teorías como las de

unificación despiertan interés, y sin embargo no son incluidas en los cursos de Física, posiblemente puedan ser consideradas a través de seminarios o clubes científicos. Motivados por ello, presentamos una breve revisión sobre el tema de las dimensiones extra espaciales y su importancia en la Física actual.

El artículo está organizado como sigue, en la Sección II tratamos en concepto de dimensión espacial, en la Sección III menciona por qué se necesitan dimensiones extras, la Sección IV trata sobre mundos brana, en la Sección V abordamos la cuestión sobre si es posible detectar las dimensiones extra, finalmente en la Sección VI presentamos nuestras conclusiones.

II. EL CONCEPTO DE DIMENSIÓN ESPACIAL

Pero ¿qué entendemos por dimensión? Podemos explicar esto de una manera simple. De la figura 1 observamos que la línea (unidimensional) necesita de un número o coordenada para poder identificar un punto sobre ella. Para un plano (bidimensional) necesitamos de dos números o coordenadas para identificar cada punto. Para un espacio tridimensional, cada punto tiene tres coordenadas, es decir, la dimensión de un espacio puede pensarse como el número de coordenadas que necesitamos para especificar la localización de cada punto en dicho espacio.

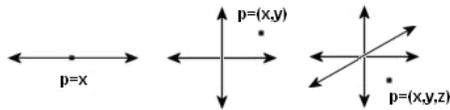


FIGURA 1. Coordenadas en una, dos y tres dimensiones.

Sin embargo, a partir de que Einstein dio a conocer la teoría especial de la relatividad [5] en 1905, el tiempo se integra como una dimensión más, es decir, nuestro mundo tiene entonces tres dimensiones espaciales y una temporal.

La historia de las dimensiones extras, como suele llamarseles, comienza con los trabajos de Gunna Nordström [6], Theodor Kaluza [7] y Oskar Klein [8] en el primer cuarto del siglo XX, estos dos últimos introdujeron, de manera independiente, una quinta dimensión como un intento para unificar las interacciones gravitacional y electromagnética (únicas fuerzas conocidas en ese tiempo). En los trabajos de Kaluza-Klein se considera a la quinta coordenada compacta, ¿qué significa esto? esto significa que la quinta dimensión es enrollada en un círculo, un círculo muy pequeño cuyo radio es del tamaño de la escala de Planck 10^{-33} cm. Las dimensiones extra son entonces dimensiones pequeñas tanto que no pueden verse.

Para entender mejor la idea de dimensión pequeña veamos la figura 2. En ella se encuentra un equilibrista sobre una cuerda. El equilibrista puede desplazarse sobre la cuerda, es decir, para él su mundo es la cuerda (un mundo unidimensional). Sin embargo, si sobre la cuerda se encuentra una hormiga ésta puede desplazarse sobre la cuerda y alrededor de ella, es decir, existe otra dimensión, con la diferencia de que la dimensión adicional se cierra, en otras palabras, es compacta y muy pequeña. Por lo tanto, el equilibrista no puede ver la dimensión extra, por ser muy pequeña.

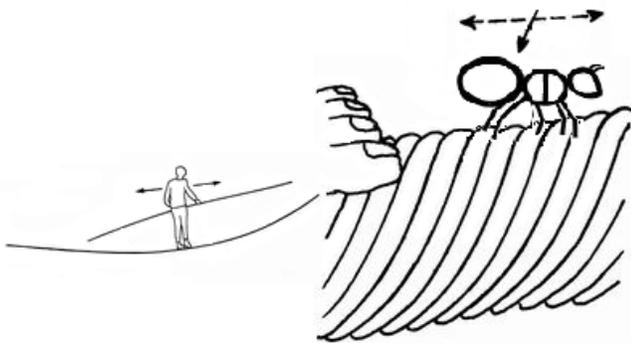


FIGURA 2. Para una persona la cuerda parece unidimensional, mientras que a una distancia más cerca la cuerda parece bidimensional. La dimensión extra es un círculo muy pequeño que no se puede observar.

Después de un receso de casi medio siglo la idea de dimensiones extras resurge en las teorías de supergravedad [9], y posteriormente en las teorías de cuerdas, hoy incluidas dentro de la llamada teoría M [1]. En todos estos casos el intento ha consistido en unificar la gravitación con el Modelo Estándar el cual a su vez incorpora la interacción electromagnética, débil y fuerte. El interés por considerar escenarios con dimensiones extras radica en la posibilidad de

identificar la presencia de estas dimensiones extras mediante algún experimento.

III. ¿POR QUÉ SE NECESITAN DIMENSIONES EXTRAS?

En la sección anterior se mencionó que el Modelo Estándar (ME) unifica a la fuerza electromagnética, débil y fuerte pero no a las interacciones gravitacionales. Actualmente la teoría de cuerdas parece ser un buen candidato para unificar los efectos gravitacionales con las interacciones del ME de forma consistente a nivel cuántico. En la teoría de cuerdas los elementos básicos de la materia (leptones y quarks) dejan de ser descritos como partículas puntuales y son descritos por objetos unidimensionales llamadas cuerdas. En esta descripción cada modo de vibración representa una partícula distinta (figura 3). En la teoría de cuerdas hay un modo que tiene las propiedades del gravitón, lo cual significa que la gravedad está incluida en la teoría.

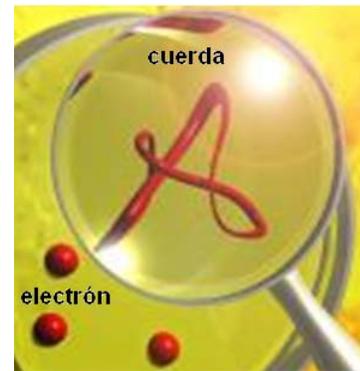


FIGURA 3. Diversos modos de vibración representan una partícula diferente. El tamaño de las cuerdas es muy pequeño (10^{-33} cm), mucho más pequeño que el electrón.

Las cuerdas pueden ser cerradas o abiertas, como lo muestra la figura 4.



FIGURA 4. En la teoría de cuerdas las cuerdas pueden ser abiertas o cerradas.

Originalmente la primera teoría de cuerdas fue formulada sin supersimetría y requería de un espacio tiempo de 26 dimensiones para su consistencia. Aquí las dimensiones espaciales adicionales eran compactificadas implementando la idea de Kaluza-Klein e inaccesibles a bajas energías (es decir se espera que sus efectos ocurran a escalas de energías del orden de la masa de Planck M_{Planck}). Esta teoría no contenía grados de libertad fermiónicos. Esta teoría recibe el nombre de cuerda bosónica. En 1984 Michael Green y John Schwartz y otros autores se percataron de que cuando se incorporaba la supersimetría a la teoría de cuerdas la

mecánica cuántica no tenía problemas con los infinitos. A esta teoría se le denominó de supercuerdas y requirió de un espacio tiempo de 10 dimensiones para su formulación, donde nuevamente las seis dimensiones extras eran compactificadas de acuerdo con la idea de Kaluza-Klein (KK). A esta serie de eventos suele llamársele la primera revolución de las teorías de cuerdas.

Uno de los obstáculos principales para poner a prueba la teoría de cuerdas consiste en que la escala de energía, masa de Planck $M_{Planck}=1.2 \times 10^{19}$ GeV, (aquí $c=1$) en la que sus efectos se manifiestan, está abrumadoramente fuera del alcance de los aceleradores de partículas actuales.

A finales de 1990 Joe Polchinski [10] y otros autores mostraron que las teorías de cuerdas contienen además objetos extendidos. Estos son llamados Dp-branas, D por Dirichlet, y p es el número de sus dimensiones espaciales. Por ejemplo, en la figura 5 se muestran tres objetos; una 0-brana es una partícula puntual, una 1-brana es una cuerda y una 2-brana es una membrana.

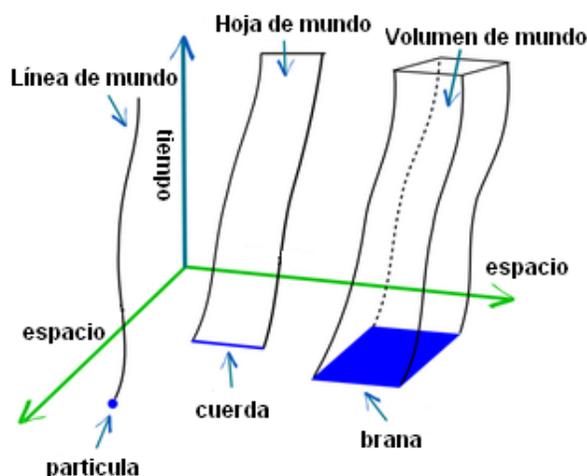


FIGURA 5. La evolución de una partícula, cuerdas y brana en un espacio tiempo hiperdimensional describen una línea de mundo, hoja de mundo y volumen de mundo.

El interés en las p-branas radica en el hecho de que poseen simetría de norma. Dicha simetría se origina debido a que uno de los extremos de la cuerda abierta finaliza en la brana. Consistente con esta idea Petr Hovara y Edward Witten [11] consideraron teorías de cuerdas con dos 10-branas encajadas en un espacio tiempo de 11 dimensiones. A bajas energías la gravedad se propaga en todo el espacio-tiempo multidimensional mientras el resto de los campos se localiza en las branas (en la siguiente sección especificaremos más la noción de localización).

Es importante enfatizar que estas ideas habían aparecido en años anteriores independientemente de las teorías de cuerdas en los trabajos de Rubakov y Shaposhnikov [12] y de Akama [13]. En estos casos, el confinamiento es implementado a través del acoplamiento de la materia a campos escalares. Motivado por estos trabajos Visser mostró que la materia puede también ser confinada debido a la gravedad de la brana [14].

IV. MUNDOS BRANA

Inspirados por la teoría de cuerdas se han propuesto modelos denominados mundos brana que adoptan la idea de dimensiones espaciales extras. En estos modelos se estudia la contribución de las dimensiones extras a procesos físicos. Aunque ha sido estudiado el problema de conectar esos modelos con la teoría de cuerdas, esto aun sigue siendo un proceso muy complejo. Sin embargo, debido a que aún no es posible obtener predicciones fenomenológicas contundentes de la teoría de cuerdas es viable explorar estos modelos como una primera aproximación a la fenomenología de cuerdas.

Los modelos de mundos brana resurgieron con gran impacto después de los trabajos de Arkani-Hamed, Dimopoulos y Dvali (ADD) [15] y de Randall y Sundrum (RS) [16] en 1998 y 1999, respectivamente. En estos modelos nuestro mundo es considerado como una hipersuperficie llamada brana cuya dimensión es 3+1, es decir, tres dimensiones espaciales y una temporal, la cual reside en un espacio tiempo hiperdimensional de dimensión $D=4+n$, aquí 4 representa la dimensión de nuestro mundo cuatro dimensional y n el número de dimensiones espaciales adicionales. Una característica de los mundos brana radica en que la gravedad se propaga en todo el espacio tiempo hiperdimensional, mientras que los campos del ME están localizados en ella. ¿Qué entendemos por localización de campo del ME? Por localización entendemos que las interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes, así como la materia de nuestro universo deben estar atrapadas en una superficie hiperdimensional llamada brana. Únicamente la gravedad puede escapar de esta superficie y propagarse a través del volumen del espacio tiempo de dimensión D, como puede verse en la figura 6.

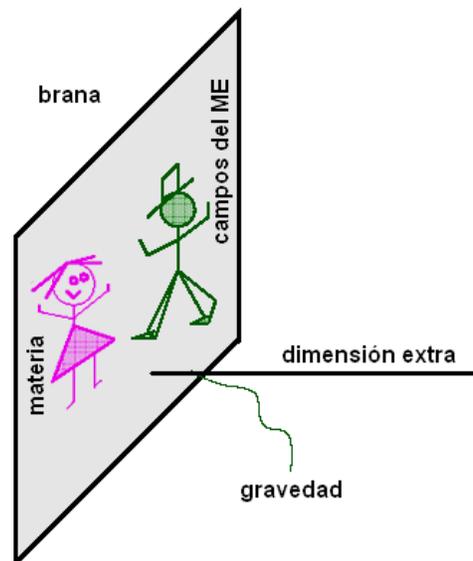


FIGURA 6. La superficie llamada brana representa nuestro mundo cuatro dimensional en donde la materia y las interacciones del ME están confinadas en ella. La dirección perpendicular representa la dimensión extra. La gravedad es la única que puede escapar y propagarse en todo el bulto (volumen del espacio tiempo de dimensión D).

La localización de la materia a lo largo de la brana explica por qué la física a bajas energías es efectivamente cuatro

dimensional para todas las interacciones excepto para la gravedad y por lo tanto estas dimensiones extras no pueden verse. Existen diferentes mecanismos que permiten localizar los campos del ME en la brana, el más simple es considerar la gravedad de la brana [16], también se consideran simetrías especiales en las dimensiones extra llamadas orbifold [17] ó se consideran defectos topológicos como tipo vórtices [18] y pared [19].

En el escenario ADD se desprecia la tensión de la brana (densidad de energía por unidad de tres-volumen de la brana) y se consideran dimensiones extras compactas grandes; similarmente al caso de KK, pero difiriendo de este en que el tamaño de las dimensiones extras R no necesita ser microscópico. En este modelo el tamaño de las dimensiones extras es dado por

$$R = M_{EW}^{-1} (M_{Pl}/M_{EW})^{n/2} = 10^{32/n-17} \text{ cm.} \quad (1)$$

Aquí M_{EW} es la escala electrodébil (10^{13} GeV), M_{Pl} es la masa de Planck (10^{19} GeV) y n el número de dimensiones extras. Tomando $n=1$ en la ecuación (1), R es del orden de 10^{15} cm, lo cual llevaría a conflictos con las observaciones del comportamiento del sistema solar. Para $n=2$, R es del orden de milímetros.

En contraposición el modelo RS parte del uso de la tensión de la brana produciendo gravedad y en presencia de una constante cosmológica. La solución de las ecuaciones de Einstein en estas condiciones incorpora además condiciones de frontera apropiadas a la presencia de una o dos branas conocidas como condiciones de Israel [20]. Notablemente es posible encontrar una solución que preserva la invariancia de Poincaré cuatro-dimensional. En este tipo de modelos las dimensiones extras no tienen límite de tamaño.

V. ¿SE PUEDEN DETECTAR LAS DIMENSIONES EXTRAS?

Debido a que la gravedad es la única que puede escapar de la brana (existen otros modelos de dimensiones extras llamadas dimensiones extras universales en donde al menos el campo electromagnético puede también escapar de la brana), podemos usar esta interacción para detectar la presencia de las dimensiones extras. Es decir, la gravedad debe cambiar su forma funcional usual.

Es conveniente primero mostrar un ejemplo; por consiguiente consideremos el modelo de ADD, incluyendo una sola dimensión extra grande espacial. En este modelo la dimensión extra es compacta (está enrollada en un círculo), por tanto el momento a lo largo de la dimensión extra está cuantizado, como se muestra en la figura 7, y toma los valores $p_5 = n/R$, mientras que el momento tridimensional es continuo.

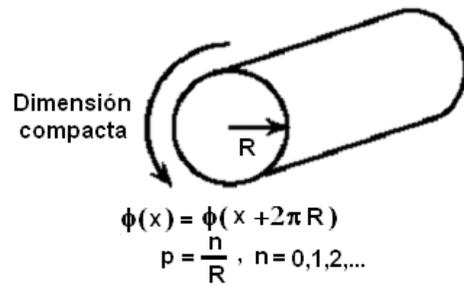


FIGURA 7. El momento en la quinta coordenada es discreto. El campo está sujeto a las condiciones de frontera mostrada.

Es decir, el momento tiene la forma $p = (p_0, p_x, p_y, p_z, p_5)$, aquí como en relatividad tenemos $p^2 = 0$ y usando la signatura (+ - - -) implica que

$$p_0^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + p_5^2 \quad \square \quad E^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_n^2. \quad (2)$$

Aquí $c=1$. ¿Cómo podemos entender la ecuación (2)?, desde el punto de vista de un observador situado en la brana (el cual representa nuestro mundo cuatro dimensional), el momento discreto de la quinta coordenada se asemeja a una partícula masiva, cuya masa es dada por

$$m_n = n/R, \text{ con } n=0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Esta partícula puede ser el gravitón, el fotón o un campo escalar. Estos estados forman una torre llamada “torre de Kaluza-Klein”, la que se muestra en la figura 8.

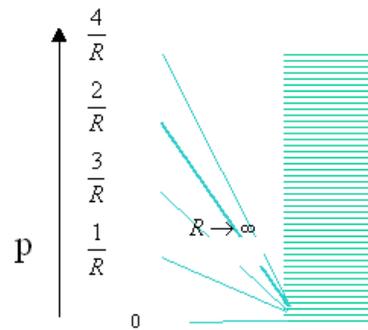


FIGURA 8. Torre de estados de Kaluza-Klein.

A bajas energías ($E < 1/R$) solamente las partículas sin masa pueden ser producidas, mientras que a energías ($E > 1/R$) las dimensiones extras pueden manifestarse. Aquí nuevamente hemos tomado $c=1$ y $\square=1$.

Conociendo el espectro de Kaluza-Klein, se puede calcular el potencial gravitacional entre dos partículas de masas m_1 y m_2 localizadas en la brana, este potencial es gobernado por el intercambio del modo cero ($n=0$) y el resto de los modos ($n \neq 0$). El potencial gravitacional es dado por [21,27]

$$V(r) = \begin{cases} -R^n G m^1 m^2 / r^{n+1} & r \ll R, \\ -G m^1 m^2 / r & r \gg R. \end{cases} \quad (4)$$

Aquí G es la constante de gravitación universal, n el número de dimensiones extras, r es la separación entre las dos masas

m_1 y m_2 . En la ecuación (4) estamos suponiendo que todas las dimensiones extras tienen el mismo tamaño R .

Esto motivó el desarrollo de experimentos de gran precisión para detectar alguna desviación de la ley de la gravitación de Newton que permita descubrir (o descartar) la existencia de dimensiones adicionales. Estos experimentos se realizaron en el rango de milímetros [22]. También se ha estudiado la fenomenología a bajas energías de algunos escenarios de dimensiones extras; el efecto Casimir [23] y el corrimiento Lamb [24], entre otros.

VI. CONCLUSIONES

Se ha mencionado que la principal motivación para considerar dimensiones extras, fue el hecho de unificar a la gravedad con las otras interacciones. Como sabemos el candidato más viable para este fin es la teoría de cuerdas, la cual naturalmente requiere dimensiones extras. La idea o noción de dimensiones extras está profundamente influenciada por la teoría de cuerdas, es decir, introduce el concepto de compactificación, localización de campos del ME empleando defectos topológicos o en puntos fijos del espacio compacto, branas, entre otros.

Recientemente se han desarrollado herramientas teóricas al desarrollar teoría de campos en escenarios de dimensiones extras. Por ejemplo, se han desarrollado herramientas de rompimiento espontáneo de simetría y supersimetría, como los mecanismos Scherk-Schwarz [25] y Hosotani [26], entre otros. Toda la riqueza matemática y conceptual desarrollada en este contexto permite reconsiderar varios problemas que no han sido resueltos completamente en el contexto cuatro dimensional (ver [27]). Estos son: el problema de jerarquía, es decir cómo explicar la enorme diferencia entre, la escala de Planck y la escala electro débil. Problemas convencionales de teorías de gran unificación, el tiempo de vida media del protón, relaciones de masas. El problema de la constante cosmológica, entre otros. Finalmente, concluimos con las siguientes observaciones:

- Las dimensiones extras grandes tienen una motivación fundamentalmente teórica.
- Los escenarios de dimensiones extras pueden ayudar a resolver algunos problemas de la física de partículas (problemas de jerarquía, rompimiento espontáneo de la simetría).
- Los escenarios de dimensiones extras tienen implicaciones fenomenológicas en nuestro mundo cuatro dimensional. Como desviaciones de la ley de gravitación de Newton para cuerpos masivos en la brana, entre otras.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado mediante el apoyo del proyecto de investigación SIP-20071482. Los autores son becarios EDI y COFAA-IPN, y agradecen a R. Sánchez por los comentarios y sugerencias para mejorar el manuscrito.

REFERENCIAS

- [1] Miemiec, A. and Schnakenburg, I., *Basics of M-theory*, Fortsch.Phys. **54**, 5-72 (2006).
- [2] Sher, M. and Sullivan, K. A., *Experimentally probing the shape of extra dimensions*, Am. J. Phys. **74**, 145 (2006).
- [3] Hartle, J. B., *General relativity in the undergraduate physics curriculum*, Am. J. Phys. **74**, 14 (2006).
- [4] Marolf, D., *Resource Letter NSST-1: The nature and status of string theory*, Am. J. Phys. **72**, 730 (2004); Rosner, J. L., *Resource Letter: SM-1: The standard model and beyond*, Am. J. Phys. **71**, 302 (2003).
- [5] Einstein, A., *On the electrodynamics of moving bodies*, Annalen Phys. **17**, 891-921 (1905).
- [6] Nordstrom, G., *On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields*, Phys. Z. **15**, 504-506 (1914).
- [7] Kaluza, Th., *Zum unitatsproblem der physik (on the problem of unity in physics)* (Sitzungsber Preuss. Akad.Wiss. Berlin, Math. Phys. 1921), pp. 966-972.
- [8] Klein O., *Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity*, Z. Phys. **37**: 895-906 (1926).
- [9] Van Nieuwenhuizen, P., *Supergravity*, Phys.Rept. **68**, 189-398 (1981).
- [10] Polchinski, J., *Dirichlet-branes and ramond-ramond charges*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4724 (1995), [hep-th/9510017]. Polchinski, J., *Lectures on d-branes*, (1996), hep-th/9611050
- [11] Horava, P. and Witten, E., *Heterotic and type i string dynamics from eleven dimensions*, Nucl. Phys. **B 460**, 506-524 (1996), [hep-th/9510209]. Horava, P. and Witten, E., *Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary*, Nucl. Phys. **B 475**, 94-114 (1996), [hep-th/9603142].
- [12] Rubakov, V. A. and Shaposhnikov, M. E., *Do we live inside a domain wall?*, Phys. Lett. **B 125**, 136-138 (1983).
- [13] Akama, K., *An early proposal of 'brane world'*, Lect. Notes Phys. **176**, 267-271 (1982), [hep-th/0001113].
- [14] Visser, M., *An exotic class of kaluza-klein models*, Phys. Lett. **B 159**, 22 (1985), [hep-th/9910093].
- [15] Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S. and Dvali, G. R., *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, Phys. Lett. **B 429**, 263-272 (1998), [hep-ph/9803315].
- [16] Randall, L. and Sundrum, R., *An alternative to compactification*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690-4693 (1999), [hep-th/9906064].
- [17] Muck, A., Pilaftsis, A. and Ruckl, R., *An introduction to five-dimensional extensions of the standard model*, Lect. Notes Phys. **647**, 189-211 (2004).
- [18] Randjbar-Daemi, S. and Shaposhnikov, M., *QED from six-dimensional vortex and gauge anomalies*, JHEP **04**, 16 (2003), [hep-th/0303247].
- [19] Rubakov, V. A. and Shaposhnikov, M. E., *Do we live inside a domain wall?*, Phys. Lett. **B 125**, 136-138 (1983).
- [20] Berezhin, V. A. Kuzmin, V. A. and Tkachev, I. I., *Dynamics of bubbles in general relativity*. Phys. Rev. **D 36**, 2919 (1987).
- [21] Ito, M., *Newton's law in brane worlds with an infinite extra dimension* Phys. Lett. **B 528**, 269-273 (2002).
- [22] Hoyle, C. D. et al., *Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law: A search for 'large' extra dimensions*, Phys. Rev. Lett. **86**, 1418-1421 (2001), [hep-

ph/0011014]. Hoyle, C. D. *et al.*, *Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law*, Phys. Rev. **D 70**, 042004 (2004).

[23] Linares. R., Morales-Tecotl, H. A. and Pedraza, O., *Casimir effect in a six-dimensional vortex scenario*, Phys. Lett. **B 633**, 362-367 (2006).

[24] Morales-Tecotl, H. A., Pedraza, O. Pimentel, L. O., *Low-energy effects in brane worlds: Liennard-Wiechert potentials and Hydrogen Lamb shift*, Gen. Rel. Grav. **39**, 1185-1202 (2007).

[25] Scherk, J. and Schwarz, J. H., *Spontaneous breaking of supersymmetry through dimensional reduction*, Phys. Lett. **B 82**, 60-64 (1979).

[26] Hosotani, Y., *Dynamical mass generation by compact extra dimensions*, Phys. Lett. **B 126**, 309-313 (1983).

[27] Feruglio, F., *Extra dimensions in particle physics*, Eur. Phys. J. **C 33**, 114-128, (2004), [hep-ph/0401033]. Perez-Lorenzana, A., *An introduction to extra dimensions*, J. Phys. Conf. Ser. **18**, 224-269 (2005), [hep-ph/0503177]. Burgess, C. P., *Extra Dimensions and the Cosmological Constant Problem* (2007) [hep-ph/0708.0911].