Problemas de Cálculo. Parte I.
Manuel Falconi

0.1. Introducción

Para resolver los problemas de esta semana es necesario entender el concepto de derivada por lo que es conveniente que revisen un libro de cálculo diferencial. Sobre este tema existe una bibliografía muy extensa y sólo para fijar un nivel de conocimientos se les recomiendan los libros: 1.- Cálculo Diferencial e Integral, C. H. Edwards y D. E. Penney, Prentice Hall Latinoamericana, Cuarta edición; 2.- Cálculo. Primer Curso, Arizmendi, Carrillo, Lara, Addison Wesley Iberoamericana. Ahora recordaremos en un lenguaje informal algunas cuestiones básicas .

En lo que sigue sólo se considerarán funciones definidas en un intervalo y con derivada en cada punto de su dominio (funciones diferenciables). La gráfica de una función $y = f(x)$, es una curva en el plano cartesiano determinada por el conjunto de puntos de la forma $\{(x, f(x))|x \in Dom(f)\}$. La derivada de f en un punto x es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $(x, f(x))$. La función $f(x)$ es creciente en cada intervalo donde la pendiente de la recta tangente es positiva y decreciente si la pendiente es negativa. Cuando en un punto (necesariamente con derivada cero) la pendiente cambia de signo, la función obtiene un valor máximo si el cambio es de positivo a negativo, y tiene un valor mínimo si el cambio es de negativo a positivo. Esta observación da un método para resolver problemas de máximos y mínimos: 1) se encuentran los puntos donde la derivada vale cero; 2) se determina el cambio de signo de la derivada alrededor de cada uno de esos puntos . Si el cambio de la derivada fue de positivo a negativo se tiene un máximo; si fue de negativo a positivo, se tiene un mínimo.

Ejercicio 1.-

De un ejemplo de una función con un punto donde la derivada sea cero y no tenga ni un máximo ni un mínimo. ¿Cómo es la derivada de la función alrededor del punto?

Ejercicio 2.-

Supóngase que una jarra cuyo contorno es como el de la Figura 1, se está vaciando a razón de a litros/min, a través de un agujero hecho en el fondo. Haga una gráfica que muestre la rapidez con la que varía la profundidad conforme pasa el tiempo. *Sugerencia: puede considerar primero hacer la gráfica de la profundidad respecto al tiempo.*

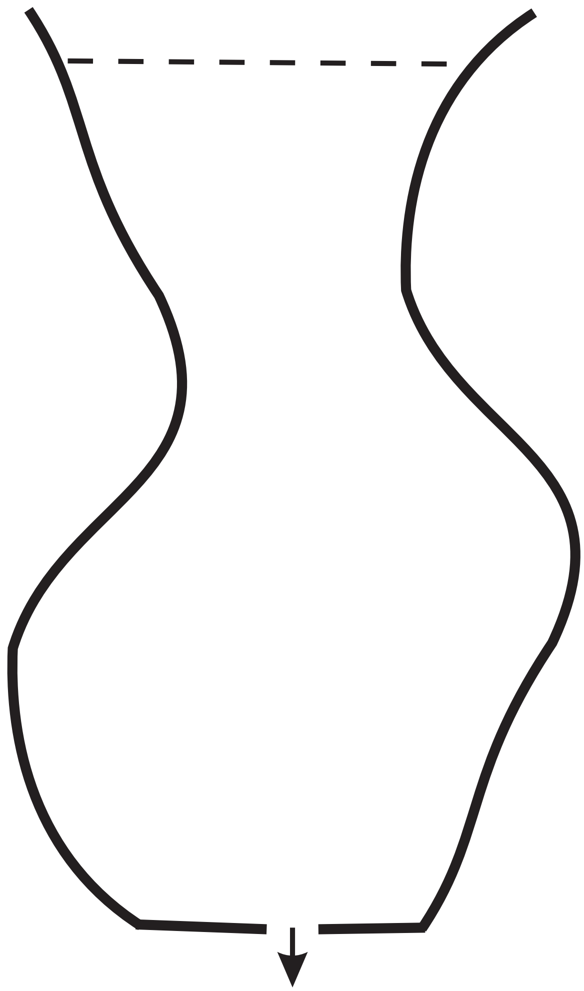

Figura 1:

Con el surgimiento del cálculo apareció un nuevo tipo de ecuaciones: *Ecuaciones Diferenciales*. Una ecuación diferencial de primer orden es una igualdad que relaciona el valor de una función desconocida con su derivada y la variable independiente. Un ejemplo de una ecuación diferencial es

$$\frac{dy}{dx} = ay.$$

Esta ecuación aparece como modelo del crecimiento de una población de bacterias, en la que se supone que la razón de crecimiento de la población $\frac{dy}{dx}$ es proporcional al tamaño $y(x)$ de la población al tiempo x.

Un problema importante en el estudio de las ecuaciones diferenciales es encontrar métodos para encontrar a la función que satisface a una ecuación diferencial dada. Sin embargo, en algunos casos es posible encontrar la solución por simple observación. Por ejemplo, una solución de la ecuación $y' = a$ es cualquier función de la forma $y(x) = ax + c$, donde c es una constante arbitraria. Esto se verifica fácilmente, ya que derivando $y(x) = ax + c$, obtenemos $y' = a$. Otro ejemplo, es la ecuación $y' = 4y/x$, cuya solución es $y(x) = cx^4$.

Ejercicio 3.-
Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = ay.$$

Problema 1.-
Una mancha de aceite de forma aparentemente circular se expande en una zona marina. Se sabe que a las doce empezó a fluir por un boquete en el casco de un barco. En el Cuadro 1 se muestran algunos valores aproximados que se tomaron sobre el radio de la mancha . A los 80 minutos de ocurrido

Cuadro 1:

tiempo(min)	35	45	5	65	75
Radio($\frac{1}{sqrt[10]}$metros)	21	32.3	51.7	70.1	92.4

el percance, se decide contratar un equipo para eliminar la mancha antes de que en total transcurran 10 horas y que el costo sea lo menor posible. Se sabe que el costo c del equipo depende de la velocidad conque limpia y está dado

$$c = .4(v - 1.5)^2(v + .5) + .5,$$

con las unidades de la velocidad dadas en hectáreas por hora (Ha/h).

Indicaciones para resolver el Problema 1.
Uniformice las unidades. Por ejemplo, convierta los datos a horas y metros y el área exprésela en hectáreas. En particular, 80 minutos es igual a x_0 hrs. Calcule el valor de x_0. Dada una velocidad v, calcule el area limpiada A_L en un tiempo t, mayor o igual a 0 y menor o igual a $10 - x_0$. La velocidad v es adecuada si el área limpiada al tiempo t es igual al área manchada A_M al tiempo $t + x_0$. De esta igualdad se obtiene el tiempo de limpieza como función de la velocidad v. Note que las velocidades adecuadas son aquellas que hacen que el tiempo de limpieza sea menor o igual a $10 - x_0$ horas. De

la relación del costo como función de la velocidad v, se escoge la velocidad para la cual el costo sea menor.

Problema 2.-

Dado un recipiente con la forma de un paraboloide, encontrar aquel que al vaciarse por un agujero requiere mayor cantidad de energía, si el proceso de vaciado se da de acuerdo con la siguiente descripción. La superficie del recipiente se obtiene al rotar alrededor del eje **y** como se indica en la Figura 2, a una parábola dada por $y = ax^2$. Al inicio el tanque tiene 15 litros y se vacía con una velocidad de $240cm^3/min$. Se quiere saber cual es el tanque que requiere mayor gasto de energía para vaciarlo hasta que el líquido tenga una profundidad de 10 cm, si el gasto de energía por unidad de tiempo E está relacionado con el parámetro a a través de la ecuación

$$a^4 - a^2E = -E^4 + E^3.$$

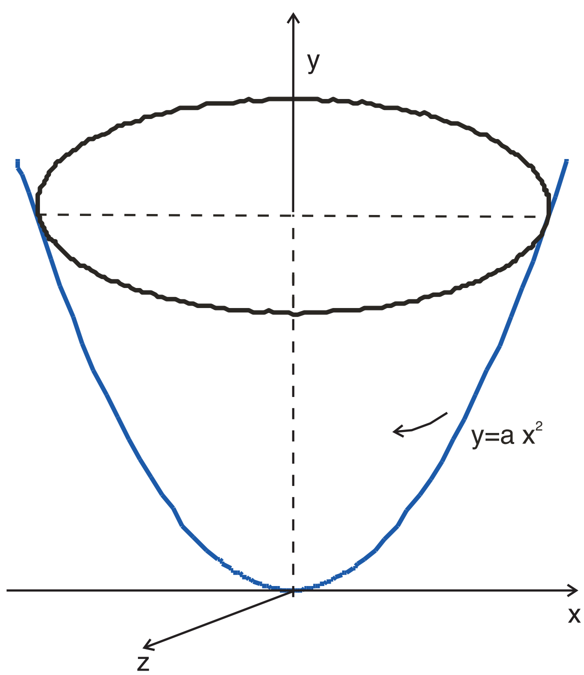

Figura 2:

Indicaciones para resolver el problema 2.

Recuerde que el volumen V de un cuerpo de altura H (ver Figura 3), cuya área de la sección transversal a la altura h es $A(h)$, es igual a

$$V = \int_0^H A(h)dh.$$

Dado un paraboloide generado por $y = ax^2$, calcule el área $A(x)$ de la sección

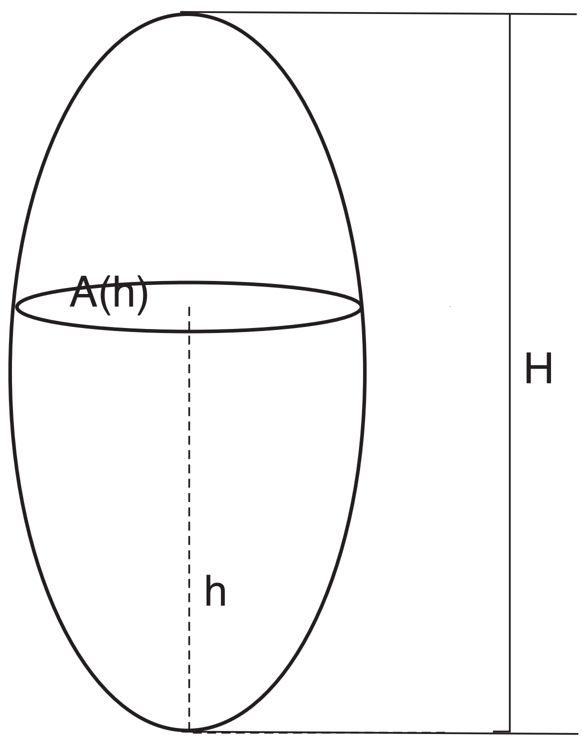

Figura 3:

transversal. La profundidad inicial h_0 del líquido se obtiene de la igualdad

$$15000cm^3 = \int_0^{h_0} A(x)dx.$$

Observe que h_0 queda en términos del parámetro a. Ahora calcule el tiempo T necesario para que el líquido tenga la profundidad de 10 cm. Para esto, debe calcular el volumen que hay entre la profundidad h_0 y la profundidad de 10 cm. y utilizar la velocidad de vaciado. Nuevamente, T queda en función del parámetro a. La energía total gastada $\bar{E}$ está dada por

$$\bar{E} = ET.$$

Finalmente, obtenga a para el cual $\bar{E}$ alcanza su valor máximo.