Tema 9. Formulación lagrangiana

1. Lagrangiano

- Se define como la diferencia entre la energía cinética del sistema T y su energía potencial V

$$L = T - V$$

y será función en general de las coordenadas x, de las velocidades $\dot{x}$, y del tiempo t. Aquí, x representa el conjunto de coordenadas necesario para definir de forma unívoca la posición del sistema, y no siempre corresponden a coordenadas de longitud.

2. Integral de acción S

- Se define como la integral respecto al tiempo del lagrangiano

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t)\, dt$$

Es una funcional (función de funciones) de la trayectoria del sistema $x(t)$. Para cada trayectoria particular, la integral de acción entre los tiempos considerados, tiene un valor determinado.

3. Principio de mínima acción

- Establece que la trayectoria real del sistema, entre todas las trayectorias compatibles con las condiciones frontera $x(t_1) = x_1$ y $x(t_2) = x_2$, es aquella que corresponde al valor mínimo de la funcional acción. Es decir, la variación de la acción es nula para la trayectoria real

$$d\,S = 0$$

4. Ecuaciones de Lagrange

- Estudiamos la variación de la acción S, correspondiente a una variación arbitraria de la trayectoria $x(t)$. Ya que el tiempo no se trata como una variable independiente para cada trayectoria, la variación de la acción es directamente

$$d\,S = \int_{t_1}^{t_2} d\,L(x, \dot{x}, t)\, dt$$

Al variar la trayectoria, el lagrangiano varía según

$$d\,L = \frac{\partial L}{\partial x} d\,x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} d\,\dot{x}$$

y además, como t no actúa como variable independiente, la derivada temporal y la variación son operadores intercambiables, con lo cual

$$d\dot{x} = d\,\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}d\,x$$

Por tanto, la variación de la acción queda expresada en la forma

$$d\,S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x}d\,x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}d\,x\right]dt$$

- Integramos el segundo término por partes

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\left[\frac{d}{dt}d\,x\right]dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}d\,x\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]d\,x\;dt$$

con lo cual, la variación de la acción toma la forma definitiva

$$d\,S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]d\,x\;dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}d\,x\Big|_{t_1}^{t_2}$$

- El principio de acción mínima establece que dicha variación es cero para la trayectoria real, elegida entre todas las trayectorias compatibles con $x(t_1) = x_1$ y $x(t_2) = x_2$. Es decir, se exige que $d\,S = 0$, para $d\,x(t_1) = 0$ y $d\,x(t_2) = 0$, con la variación de la trayectoria $d\,x(t)$, función arbitraria del tiempo por lo demás. Concluimos que el segundo sumando es nulo, y así la trayectoria real descrita por el sistema satisface las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

5. Ecuaciones del movimiento

- En la formulación de Lagrange, la ecuación que caracteriza la evolución del sistema es la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

con

$$L = T - V$$

y existe una ecuación de Lagrange para cada coordenada del sistema.

6. Evaluación de la energía cinética

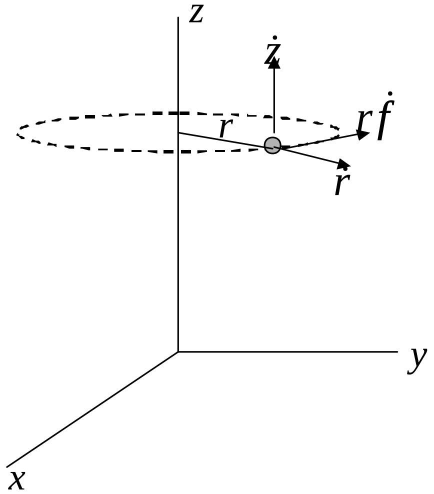
- En la mayoría de los casos,

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

por lo que la dificultad estriba en determinar v^2 en función de las derivadas temporales de las coordenadas del sistema. En coordenadas cartesianas es fácil

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

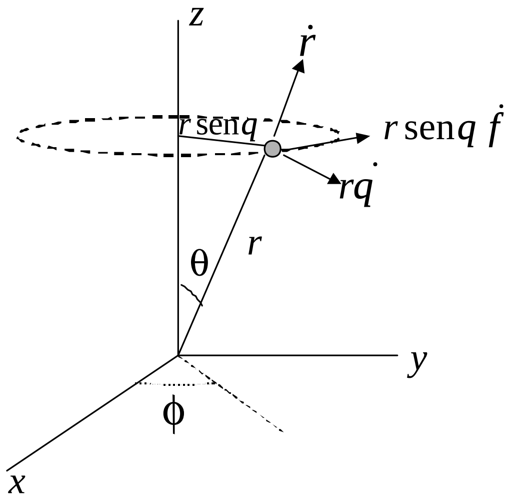
- En coordenadas cilíndricas, la velocidad tiene tres componentes, $\dot{z}$ en la dirección vertical, $\dot{r}$ en la dirección radial y $r\dot{f}$ en la dirección tangente al círculo de radio *r*,



con lo cual

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{f}^2 + \dot{z}^2$$

- En coordenadas esféricas, la velocidad lineal de rotación en torno al eje z es $r\,\mathrm{sen}q\,\dot{f}$, la velocidad lineal de rotación respecto al eje perpendicular al eje *z* es $r\dot{q}$, y la velocidad radial es $\dot{r}$



con lo cual

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{q}^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2 q$$

- Por último, destacar que en el caso de un cuerpo continuo en movimiento, la energía cinética será la suma de la energía cinética de rotación y de la energía cinética de traslación.

7. Evaluación de V

- Si *F* es la fuerza ejercida sobre el sistema en la dirección del eje *x*, la energía potencial viene dada por

$$V = -\int_{x_0}^{x} F dx$$

integrando desde un punto arbitrario x_0. Si la coordenada del sistema es un ángulo q la energía potencial satisface

$$V = -\int_{q_0}^{q} Fr\ dq$$

siendo *r* el radio de giro.

8. Fuerzas de ligadura

- Las ligaduras son las condiciones adicionales que deben satisfacer las coordenadas del sistema, y que limitan el número de coordenadas independientes del sistema. Una partícula de masa *m* que se mueve por el interior de una aro de radio *R* tiene dos coordenadas (r,q), una ligadura $r = R$, y una sola coordenada independiente q .

- Las fuerzas de ligadura l son las fuerzas que obligan al sistema a seguir una ligadura. En un péndulo, la tensión *T* del hilo es la fuerza de ligadura que hace que la longitud del hilo sea constante.

9. Metodología

- Si no nos interesa conocer las fuerzas de ligadura, desde un principio escribimos el lagrangiano en función sólo de las coordenadas independientes y resolvemos las ecuaciones del movimiento.

- Si nos interesa conocer las fuerzas de ligadura, escribimos el lagrangiano como función de todas las coordenadas del sistema, y definimos el lagrangiano modificado

$$L' = L + l\,(ligadura)$$

donde l es la fuerza de ligadura que multiplica a la ecuación de la ligadura expresada en una forma que sea idénticamente nula. Con esto el lagrangiano modificado es estrictamente igual al lagrangiano inicial. Entonces, la condición de acción mínima exigiendo el cumplimiento de la ligadura da lugar a las ecuaciones de Lagrange para el lagrangiano modificado *L'*, más la condición $\partial L'/\partial l = 0$, que nos da de nuevo la ecuación de la ligadura. Así resolvemos las ecuaciones de movimiento y la fuerza de ligadura. Es análogo al cálculo de extremos condicionados en Análisis.

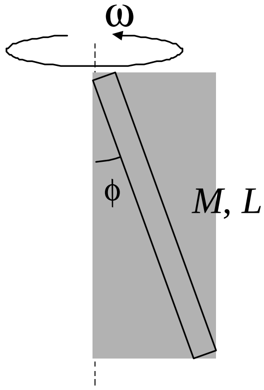
- Como regla general, l debe multiplicar a la ecuación de ligadura resuelta para las coordenadas, no para el cuadrado de las coordenadas, etc. Es decir, si la ligadura es $x^2 + y^2 = a^2$, el lagrangiano modificado se escribe

$$L' = L + l\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)$$

y así l tiene las dimensiones correctas de fuerza.

Problemas Resueltos

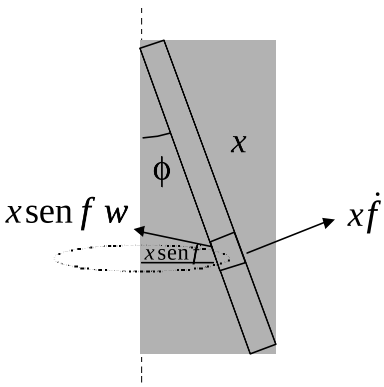
9.1 Determinar por el método lagrangiano la posición de equilibrio de una varilla rígida de masa *M* y longitud *L*, con un extremo fijo a un eje vertical que gira con velocidad angular constante w**.**



- Sea f el ángulo que forma la varilla con el eje vertical. Definimos *x* como la coordenada de posición de un elemento de masa *dm* de la varilla, respecto del punto fijo. La energía cinética de la varilla es

$$T = \frac{1}{2}\int V^2(x)\, dm$$

siendo $V(x)$ la velocidad del elemento de masa *dm*. Dicha velocidad tiene dos componentes,



una perpendicular a la varilla con valor $x\dot{f}$, en la dirección creciente del ángulo f, y otra en dirección horizontal, tangente a la trayectoria circular de *dm*, con valor $wr = wx\,\mathrm{sen}\,f$, siendo $r = x\,\mathrm{sen}\,f$ el radio de giro del elemento *dm*. La primera componente se debe al giro de la varilla sobre el punto fijo, y la segunda al giro de la varilla respecto al eje vertical. Por tanto,

$$V^2(x) = \left(x\dot{f}\right)^2 + (w\, x \operatorname{sen} f)^2 = x^2\left(\dot{f}^2 + w^2 \operatorname{sen}^2 f\right)$$

- Por ser la varilla un cuerpo homogéneo, el elemento de masa es $dm = {}^{M}\!/\!_{L}\, dx$, con lo cual, la energía cinética toma el valor

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int_0^L \left(\dot{f}^2 + w^2 \sin^2 f\right) x^2 \frac{M}{L} dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{M}{L}\left(\dot{f}^2 + w^2 \sin^2 f\right)\int_0^L x^2 dx \\ &= \frac{1}{6} ML^2\left(\dot{f}^2 + w^2 \sin^2 f\right) \end{aligned}$$

- Medimos la energía potencial gravitatoria respecto de la posición horizontal de la varilla $(f = 90^\circ)$

$$V = \int gy\; dm = g\int y dm = Mgy_{cm}$$

siendo y_{cm} la posición vertical del centro de masas respecto del plano horizontal de referencia,

$$y_{cm} = -\frac{L}{2}\cos f$$

con lo cual

$$V = -Mg\frac{L}{2}\cos f$$

- El lagrangiano de la varilla es

$$L = T - V = \frac{1}{6}ML^2\left(\dot{f}^2 + w^2 \operatorname{sen}^2 f\right) + Mg\frac{L}{2}\cos f$$

y la ecuación de Lagrange resulta

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{f}}\right) - \frac{\partial L}{\partial f} = 0$$

ó

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}ML^2\dot{f}\right) = \frac{1}{3}ML^2 w^2 \operatorname{sen} f \cos f - \frac{1}{2}MgL \operatorname{sen} f$$

y para la posición de equilibrio, $\ddot{f} = 0$, obtenemos la condición

$$\frac{1}{3}ML^2 w^2 \operatorname{sen} f \cos f = \frac{1}{2}MgL \operatorname{sen} f$$

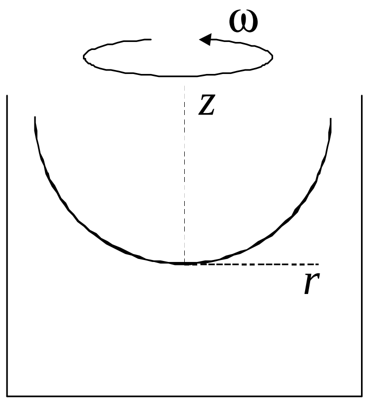
con dos soluciones, una estable

$$\cos f = \frac{3}{2}\frac{g}{Lw^2}$$

y otra inestable,

$$\operatorname{sen} f = 0$$

9.3 Determinar la forma que adquiere la superficie libre de un líquido dentro de una vasija cilíndrica en rotación.



- Por simetría, la forma será $z = f(r)$, donde z es la altura de un punto material de la superficie libre y r su distancia radial al eje de giro. Sin tener en cuenta la ligadura, la velocidad de un elemento de masa m tiene tres componentes perpendiculares, una componente radial $\dot{r}$, una componente vertical $\dot{z}$, y una componente en la dirección tangente a la circunferencia de radio r, de valor wr. Entonces,

$$v^2 = \dot{r}^2 + \dot{z}^2 + w^2 r^2$$

la energía cinética del elemento de masa es

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + w^2 r^2\right)$$

y la energía potencial respecto de la posición de equilibrio $(z = 0)$ es

$$V = mgz$$

- Para tener en cuenta la ligadura, definimos el lagrangiano modificado

$$\begin{aligned} L' &= L + l\left(z - f(r)\right) \\ &= \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + w^2 r^2\right) - mgz + l\left(z - f(r)\right) \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{r} = mw^2 r - l\, f'(r)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{z} = l - mg$$

$$\frac{\partial L'}{\partial l} = 0 \quad \rightarrow \quad z = f(r)$$

- Para calcular la posición de equilibrio del elemento de masa, basta tomar las condiciones $\ddot{z} = 0$, $\ddot{r} = 0$, en las ecuaciones anteriores. Obtenemos la solución

$$mw^2 r = l\, f'(r)$$

$$l = mg$$

$$z = f(r)$$

De las dos primeras, eliminando la fuerza de ligadura l, encontramos la pendiente de la curva de equilibrio

$$f'(r) = \frac{w^2 r}{g}$$

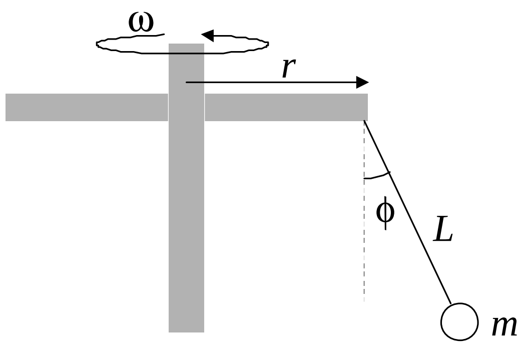
Integrando esta última ecuación con la condición $z = 0$ si $r = 0$, es decir, $f(0) = 0$, obtenemos

$$f(r) = \frac{1}{2}\frac{w^2 r^2}{g}$$

y la forma de la superficie libre resulta ser la de un paraboloide

$$z = \frac{1}{2}\frac{w^2 r^2}{g}$$

9.3 Determinar la posición de equilibrio de una masa *m* unida a una cuerda de longitud *L*, a su vez unida a un volante de radio *r* que gira con velocidad angular constante w.



- La velocidad de la masa *m* tiene dos componentes perpendiculares entre sí, $L\dot{f}$, en dirección perpendicular a la cuerda y $w(r + L\,\mathrm{sen}\,f)$ en dirección tangente a la circunferencia de giro en el plano horizontal de radio $r + L\,\mathrm{sen}\,f$. Con esto, la energía cinética de la masa *m* es

$$T = \frac{1}{2}m\left(L^2\dot{f}^2 + w^2\left(r + L\,\mathrm{sen}\,f\right)^2\right)$$

y la energía potencial respecto al plano horizontal $(f = 90°)$ es

$$V = -mgL\cos f$$

- El lagrangiano del sistema es

$$L = \frac{1}{2}m\left(L^2\dot{f}^2 + w^2\left(r + L\,\mathrm{sen}\,f\right)^2\right) + mgL\cos f$$

y la ecuación del movimiento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{f}}\right) - \frac{\partial L}{\partial f} = 0$$

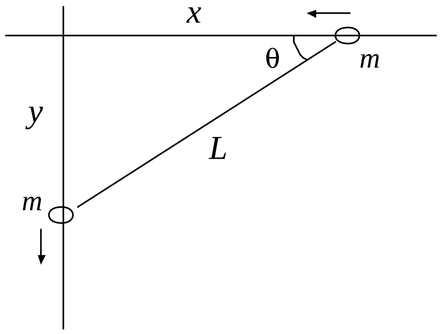
resulta ser

$$\frac{d}{dt}\left(mL^2\dot{f}\right) = mL\left(r + L\,\mathrm{sen}\,f\right)w^2\cos f - mgL\,\mathrm{sen}\,f$$

- Para el equilibrio, $\ddot{\phi} = 0$, obtenemos

$$\tan\phi = \frac{\omega^2}{g}\left(r + L\,\mathrm{sen}\,\phi\right)$$

9.4 Determinar la ecuación del movimiento de un sistema formado por una cuerda de longitud *L*, con una masa *m* en cada extremo, de forma que una de ellas se mueve sobre el eje *x*, y la otra sobre el eje *y*. Inicialmente la cuerda se encuentra en la posición horizontal $(\theta = 0)$



- Si no tenemos en cuenta la ligadura del sistema, la única coordenada del sistema es el ángulo θ que forma la cuerda con el eje *x*. La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

donde

$$x = L\cos\theta$$

$$y = L\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y de aquí, derivando respecto del tiempo, encontramos

$$\dot{x} = -L\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\dot{y} = L\dot{\theta}\cos\theta$$

con lo cual la energía cinética tiene la expresión

$$T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

La energía potencial respecto a la posición de equilibrio horizontal $(\theta = 0)$ es igual a la energía potencial de la masa que desliza por el eje *y*

$$V = -mgy = -mgL\,\mathrm{sen}\,\theta$$

- El lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y la ecuación de movimiento resultante es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \quad\rightarrow\quad mL^2\ddot{\theta} = mgL\cos\theta$$

ó

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L}\cos\theta$$

9.5 Determinar la fuerza de ligadura en el caso anterior.

- Las variables del sistema son (x,y) y la ligadura $L^2 = x^2 + y^2$. El lagrangiano modificado es

$$L' = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgy + l\left(\sqrt{x^2 + y^2} - L\right)$$

siendo l la fuerza de ligadura. Las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} = \frac{x\,l}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{y} = mg + \frac{y\,l}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial l} = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = L$$

- Utilizando la tercera ecuación, las dos primeras quedan

$$m\ddot{x} = \frac{x\,l}{L}$$

$$m\ddot{y} = mg + \frac{y\,l}{L}$$

- Para integrar esta ecuación, nos ayudamos de una ecuación adicional, de conservación de la energía

$$E = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy$$

y como inicialmente la cuerda está en reposo horizontalmente, $E = 0$. Tenemos así las tres ecuaciones

$$m\ddot{x} = \frac{x\,l}{L}$$

$$m\ddot{y} = mg + \frac{y\,l}{L}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2gy$$

de donde podremos obtener la fuerza de ligadura.

- Multiplicando la primera por *x*, la segunda por *y*, sumando el resultado, obtenemos

$$m\left(x\ddot{x} + y\ddot{y}\right) = L\,l + mgy$$

Derivando dos veces la condición de ligadura $L^2 = x^2 + y^2$, encontramos

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = -\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

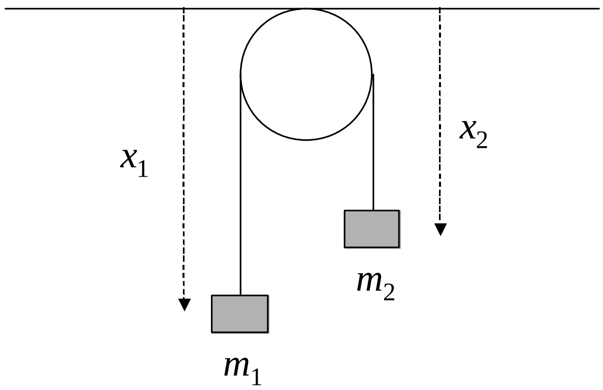
con lo cual, con ayuda de la conservación de energía, la ecuación anterior queda en la forma

$$-m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = L\,l + mgy$$

ó

$$l = -3mg\frac{y}{L} = -3mg\,\mathrm{sen}q$$

9.6 Determinar la tensión de la cuerda y la aceleración de caída de las masas en una máquina de Atwood simple, mediante el método lagrangiano.



- La tensión de la cuerda es la fuerza de ligadura que mantiene unidas las masas a la cuerda de longitud L. Tomamos nuestro origen de coordenadas en el punto más alto de la trayectoria. Sean (x_1, x_2) las coordenadas de ambas masas respecto del punto de referencia. La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{1}{2}m_1x_1^2 + \frac{1}{2}m_2x_2^2$$

la energía potencial se mide respecto al punto de referencia resultando ser

$$V = -m_1gx_1 - m_2gx_2$$

Por último, la ecuación de la ligadura es $x_1 + x_2 = L$

- El lagrangiano modificado es

$$L' = \frac{1}{2}m_1x_1^2 + \frac{1}{2}m_2x_2^2 + m_1gx_1 + m_2gx_2 + l\,(x_1 + x_2 - L)$$

y las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x_1} = 0 \quad \rightarrow \quad m_1\ddot{x}_1 = m_1g + l$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x_2} = 0 \quad \rightarrow \quad m_2\ddot{x}_2 = m_2g + l$$

$$\frac{\partial L'}{\partial l} = 0 \qquad \rightarrow \quad x_1 + x_2 = L$$

- De la condición de ligadura obtenemos $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$. Restando las dos primeras ecuaciones obtenemos la aceleración de caída de las masas

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g$$

ó

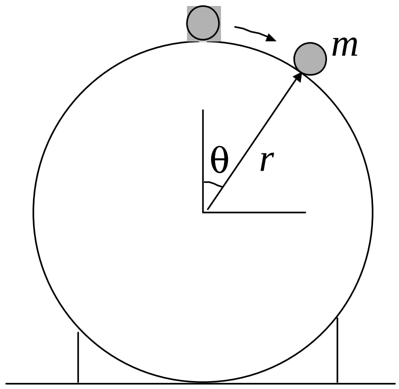
$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

- Entonces, de la primera ecuación se obtiene la fuerza de ligadura, la tensión de la cuerda,

$$l = -\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

El signo menos indica que la tensión está dirigida en el sentido contrario al aumento de las coordenadas x_1, x_2.

9.7 Una masa puntual *m* se encuentra en reposo en el punto más alto de un esfera fijada al suelo de radio *R*. Determinar por el método lagrangiano la ecuación de su movimiento de caída cuando se separa ligeramente del punto de equilibrio, y establecer el punto en el que la masa se separa de la superficie esférica.



- La fuerza que mantiene a la masa sobre la superficie esférica es igual a la reacción normal N de la esfera sobre ella. Tomamos coordenadas polares centradas en el origen de la esfera en el plano de la trayectoria de caída. Las coordenadas de la masa *m* serán (r, q). La energía cinética de la masa *m* está dada por

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2 q^2\right)$$

La energía potencial respecto de la posición de equilibrio está dada por

$$V = -mg\left(R - r\cos q\right)$$

y la condición de ligadura es $r = R$.

- El lagrangiano modificado es

$$L' = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{q}^2\right) + mg\left(R - r\cos q\right) + N\left(r - R\right)$$

y las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{r} = -mg\cos q + N + mr\dot{q}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0 \quad \rightarrow \quad mr^2\ddot{q} = mgr\,\mathrm{sen}\,q$$

$$\frac{\partial L'}{\partial N} = 0 \quad \rightarrow \quad r = R$$

- Con ayuda de la condición de ligadura, de la segunda ecuación obtenemos la ecuación del movimiento para la trayectoria de caída

$$\ddot{q} = \frac{g}{R}\,\mathrm{sen}\,q$$

y de aquí, para la primera ecuación

$$N = mg\cos q - mR\dot{q}^2$$

necesitamos encontrar $\dot{q}$ en función de q. Partimos de la relación

$$\ddot{q} = \frac{d\dot{q}}{dt} = \dot{q}\,\frac{d\dot{q}}{dq}$$

con lo cual, la ecuación de movimiento puede escribirse

$$\dot{q}\,\frac{d\dot{q}}{dq} = \frac{g}{R}\,\mathrm{sen}\,q$$

- Realizamos la integral con la condición inicial, $\dot{q} = 0$ si $q = 0$, resultando

$$\dot{q}^2 = 2\frac{g}{R}(\cos q - 1)$$

con lo cual

$$mR\dot{q}^2 = 2mg(\cos q - 1)$$

y así, la normal adquiere el valor

$$N = 3mg\cos q - 2mg$$

- La partícula abandona la superficie de la esfera cuando la normal se haga cero. Esto es, en la posición angular

$$\cos q = \frac{2}{3}$$

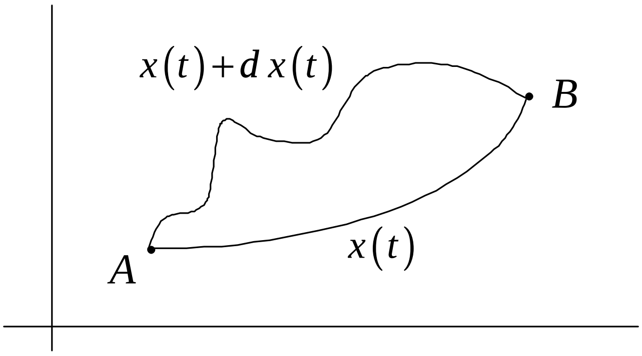
Apéndice

A) Principio de mínima acción

- Establece que la trayectoria real del sistema, entre todas las trayectorias compatibles con las condiciones frontera $x(t_1) = x_A$ y $x(t_2) = x_B$, es aquella que corresponde al valor mínimo de la funcional acción. Es decir, la variación de la acción es nula para la trayectoria real

$$d\,S = 0$$

- Para enunciar de forma matemática precisa lo que implica este principio de acción mínima, vamos a considerar el cambio producido en la acción al pasar de una trayectoria a otra vecina, teniendo las dos sus extremos en los puntos *A* y *B*, según muestra la figura



Ya que las trayectorias comparten extremos comunes, la variación de la acción debe satisfacer la condición adicional

$$d\,x(t_1) = d\,x(t_2) = 0$$

- Suponemos que la variable de tiempo *t* no varía de una trayectoria a otra, y no se considera una coordenada independiente. Por tanto, la acción *S* sólo es funcional de la trayectoria considerada $x(t)$. En consecuencia, su variación es

$$d\,S = \int_{t_1}^{t_2} d\,L(x, \dot{x}, t)\; dt$$

La variación del lagrangiano es

$$d\,L(x, \dot{x}, t) = \frac{\partial L}{\partial x} d\,x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} d\,\dot{x}$$

y en virtud que la coordenada temporal es independiente de la trayectoria elegida, podemos intercambiar el operador de derivada temporal y el operador de variación con lo que

$$d\,\dot{x} = d\,\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} d\,x$$

con lo cual, la variación de la acción queda expresada en la forma

$$dS = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} dx \right) dt$$

- Integrando por partes el último factor, vemos que

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \left(\frac{d}{dt} dx \right) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dx \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dx dt$$

y ya que todas la trayectorias tienen extremos comunes $dx(t_1) = dx(t_2) = 0$, el primer término es nulo. Así, la variación de la acción para un cambio arbitrario en la trayectoria, tiene la forma final

$$dS = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right) dx dt$$

- Según establece el principio de mínima acción, esta variación debe ser nula para cualquier cambio $dx(t)$, respecto de la trayectoria real correspondiente al movimiento real del cuerpo. Esto será así si la trayectoria real es aquella que satisface las ecuaciones de Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0}$$

B) Teorema de E. Noether

- Este teorema relaciona las cantidades conservadas (energía, momento, etc) del movimiento con el tipo de simetría que se conserva en el sistema. Supongamos que la transformación de las coordenadas

$$t \to t' = t + dt$$
$$x(t) \to x'(t')$$

no varía la integral de acción para una trayectoria dada. Veamos que consecuencias podemos extraer de esta simetría.

- La variación de la acción debido a esta transformación de coordenadas es

$$dS = \int L(x', \frac{\partial x'}{\partial t'}, t')\, dt' - \int L(x, \frac{\partial x}{\partial t}, t)\, dt$$

Calculamos las variaciones de las coordenadas por separado. Respecto a la variable de tiempo, tenemos

$$dt' = \left| \frac{dt'}{dt} \right| dt = \left(1 + \frac{d\partial t}{dt} \right) dt$$

Para la variable espacial, su variación es doble, primero por variar la propia coordenada y segundo por variar su dependencia en el tiempo. Obtenemos

$$dx = x'(t') - x(t) = \overline{dx} + \frac{\partial x}{\partial t} dt$$

siendo $\overline{dx} = x'(t) - x(t)$ es la variación de la coordenada manteniendo fijo el tiempo. De la misma forma, la variación del lagrangiano se compone de dos partes

$$d\,L = \overline{d\,L} + \frac{\partial L}{\partial t}dt = \frac{\partial L}{\partial x}\overline{d\,x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{d\,\dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

- La variación de la acción se escribe

$$\begin{aligned} d\,S &= \int L(x',\frac{\partial x'}{\partial t'},t')\frac{d\partial t}{dt}dt + \int\left(L(x',\frac{\partial x'}{\partial t'},t') - L(x,\frac{\partial x}{\partial t},t) \right)dt \\ &= \int L\frac{\partial d\,t}{\partial t}dt + \int\left(\frac{\partial L}{\partial x}\overline{d\,x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{d\,\dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial t}dt \right)dt \\ &= \int \frac{\partial\left(Ld\,t\right)}{\partial t}dt + \int\left(\frac{\partial L}{\partial x}\overline{d\,x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{d\,\dot{x}} \right)dt \end{aligned}$$

- De la misma forma que en el apartado anterior, el operador de derivada temporal puede intercambiarse con el operador de variación a tiempo constante, por lo que

$$\overline{d\,\dot{x}} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{d\,x}$$

con lo cual, podemos escribir el último término en el integrando en la forma

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{d\,\dot{x}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{d\,x} \right) - \overline{d\,x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)$$

y así, la variación de la acción tiene la expresión final

$$\partial S = \int \frac{\partial\left(Ld\,t\right)}{\partial t}dt + \int\left(\frac{\partial L}{\partial x}\overline{d\,x} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{d\,x} \right) - \overline{d\,x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right)dt$$

$$\partial S = \int \frac{\partial}{\partial t}\left(Ld\,t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{d\,x} \right)dt + \int\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right)\overline{d\,x}\,dt$$

- Con la condición de que la variación de la acción sea nula y que el movimiento recorra la trayectoria real, esto es, que se satisfagan las ecuaciones de Lagrange, obtenemos el **teorema de E. Noether**: Si S es invariante bajo la transformación de las coordenadas $t \to t', x \to x'$, entonces

$$\partial S = \int \frac{\partial}{\partial t}\left(Ld\,t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{d\,x} \right)dt = 0$$

Es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(Ld\,t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{d\,x} \right) = 0$$

ó lo que es lo mismo

$$Ld\,t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\overline{d\,x}$$

es una constante del movimiento. Por último, al tener $\overline{d\,x} = d\,x - \frac{\partial x}{\partial t}d\,t$, dicha constante del movimiento se escribe en la forma

$$\boxed{\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} \right)d\,t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}d\,x}$$

1. Simetría frente a traslación temporal

- La transformación temporal es

$$dt = a$$
$$dx = 0$$

y en consecuencia, según el teorema de Noether, existe una cantidad conservada en el movimiento en la forma

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L$$

Para encontrar el significado a esta constante, basta utilizar el lagrangiano habitual

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

y llegamos a

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L = m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E}$$

que es la energía total del sistema. Por tanto, cuando la evolución de un sistema no dependa del tiempo, su energía total se conserva.

2. Simetría frente a traslación espacial

- La traslación espacial es

$$dt = 0$$
$$dx = a$$

Se conserva el momento conjugado p_x definido por

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

Si la coordenada *x* mide una longitud, $p_x = m\dot{x}$ es constante. Es decir, se conserva el momento lineal en la dirección del eje que mantiene invariante al sistema. Si la coordenada *x* es un ángulo, $p_x = I\dot{q}$ es constante. Es decir, se conserva el momento angular de giro respecto al eje que mantiene invariante al sistema.