Decremento logarítmico δ. Debido al rozamiento, el sistema pierde energía y la amplitud del movimiento decrece. Definimos $e^{-\delta}$ como el factor por el que disminuye la amplitud después de un ciclo. Es decir,

$$\boxed{x(t+T)=e^{-\delta}x(t)}$$

Como la parte que depende de la función coseno no varía al cabo de un ciclo, esta igualdad se debe satisfacer para la función amplitud

$$\boxed{\begin{array}{l} Ae^{-\omega_0\zeta(t+T)}=e^{-\delta}Ae^{-\omega_0\zeta t} \\ \delta=\omega_0\zeta T \end{array}}$$

siendo T el período del movimiento subamortiguado

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{T_0}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Factor de calidad Q. Aunque en este tema apenas se hable de Q, su importancia radica en su aplicación práctica. Cuanto mayor sea el factor Q para un sistema, menor será el rozamiento sufrido y mayor el número de oscilaciones del sistema antes de que su amplitud disminuya de forma considerable. En los sistemas reales, el factor Q depende de numerosos parámetros físicos del sistema, que deben ajustarse de manera que sea lo mayor posible. En nuestro caso, para sistemas simples, se define por

$$\boxed{Q=\frac{\omega_0}{\gamma}=\frac{1}{\zeta}}$$

6. Movimiento con amortiguamiento seco

- La fuerza de rozamiento seco entre dos superficies sólidas en contacto puede tomarse independiente de la velocidad, eso sí, siempre actúa en dirección contraria al movimiento. En general, $F=-\mu N$ siendo N la fuerza de contacto entre las dos superficies, y μ el coeficiente de rozamiento supuesto constante. La característica más importante de este tipo de movimiento es que conserva la oscilación libre, es decir, oscila con el mismo período T_0 pero su amplitud se ve progresivamente disminuida por la disipación de energía en forma de calor.

6.14 Una masa *m* que desliza sobre una superficie horizontal rugosa, está unida a un muelle de constante elástica *k* con uno de sus extremos fijo en la pared. Determinar el movimiento de la masa *m*, la variación de su amplitud al cabo de un período, y su posición final de equilibrio. El coeficiente de rozamiento entre el suelo y el cuerpo es μ.

- La ecuación del movimiento debe incluir la fuerza elástica del muelle y la fuerza de rozamiento. Ya que dicha fuerza de rozamiento es contraria al movimiento, su dirección dependerá de la dirección del movimiento. Tenemos dos ecuaciones del movimiento: cuando la masa se dirige de izquierda a derecha, su velocidad $\dot{x}$ es positiva y la fuerza de rozamiento es negativa, dirigida de derecha a izquierda. La ecuación de movimiento para esta dirección es

$$\boxed{\begin{array}{l} m\ddot{x} = -kx - \mu mg \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\mu g \end{array}}$$

- De forma análoga, cuando la masa se mueve de derecha a izquierda, la fuerza de rozamiento va en la dirección x positiva, y la ecuación de movimiento es

$$\boxed{\begin{array}{l} m\ddot{x} = -kx + \mu mg \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu g \end{array}}$$

- Resolvemos ahora las ecuaciones de movimiento suponiendo que inicialmente la masa se separa una distancia positiva x_0 de la posición de equilibrio, por lo que inicialmente se mueve de derecha a izquierda. La solución de la ecuación del movimiento es suma de una oscilación libre más una solución $x = cte.$ Cuando se mueve de derecha a izquierda la solución es

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

Las condiciones iniciales son $x = x_0, \dot{x} = 0,$ por lo que tenemos

$$x_0 = A\cos\varphi + \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$
$$0 = -A\omega_0 \operatorname{sen}\varphi$$

con la solución

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi = 0 \\ A = x_0 - \dfrac{\mu g}{\omega_0^2} \\ x = \left(x_0 - \dfrac{\mu g}{\omega_0^2} \right)\cos\omega_0 t + \dfrac{\mu g}{\omega_0^2} \end{array}}$$

- El movimiento de derecha a izquierda no termina en la posición $x = -x_0$ tal y como sería si no existiera rozamiento. El rozamiento hace perder energía al sistema, y la amplitud del movimiento va decreciendo progresivamente. Para determinar el punto donde termina el movimiento inicial de derecha a izquierda, averiguamos en que punto se para, para iniciar así su movimiento de izquierda a derecha completando su primer ciclo. El punto donde se para satisface $\dot{x} = 0.$ Es decir, $\operatorname{sen}\omega_0 t = 0$. La solución $\cos\omega_0 t = 1$ corresponde al punto de partida y la solución $\cos\omega_0 t = -1$ corresponde al punto de retorno $x_1 < 0$

$$\boxed{x_1 = -\left(x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2} \right) + \frac{\mu g}{\omega_0^2} = -\left(x_0 - 2\frac{\mu g}{\omega_0^2} \right)}$$

Podemos decir entonces que el sistema ha perdido una amplitud $2\mu g/\omega_0^2$ al recorrer el viaje de ida en su primer ciclo.

- Análogamente se determina la ley de movimiento para el viaje de vuelta del primer ciclo. La solución general es

$$x = B\cos\left(\omega_0 t + \delta\right) - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

con las condiciones de salida $\cos\omega_0 t = -1, \text{sen}\, ?_0 t = 0, x = x_1, \dot{x} = 0.$ Es importante subrayar que el tiempo se mide siempre desde el instante inicial, es decir, el movimiento de vuelta no comienza de nuevo en $t = 0$ sino en un tiempo tal que $\cos\omega_0 t = -1$. Obtenemos la solución

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta = 0 \\ B = -x_1 - \dfrac{\mu g}{\omega_0^2} = x_0 - 3\dfrac{\mu g}{\omega_0^2} \\ x = \left(x_0 - 3\dfrac{\mu g}{\omega_0^2}\right)\cos\omega_0 t - \dfrac{\mu g}{\omega_0^2} \end{array}}$$

De nuevo, la posición donde se para tras concluir el primer ciclo corresponde al valor $\cos\omega_0 t = 1,\ \left(\dot{x} = 0\right)$, resultando

$$\boxed{x_2 = x_0 - 4\frac{\mu g}{\omega_0^2}}$$

Podemos concluir entonces que la amplitud perdida en cada ciclo es igual a $4{\mu g}/{\omega_0^2}$.

- Para determinar la posición final de la masa, supondremos que el coeficiente de rozamiento no sólo es dinámico, es decir, genera una fuerza de rozamiento cuando las dos superficies se mueven entre sí, si no que también es un coeficiente de rozamiento estático, es decir, genera una fuerza de rozamiento que la masa debe superar al ponerse en movimiento. Entonces, la masa se quedará en reposo en cualquiera de sus puntos de retorno si en esa posición la fuerza elástica no es capaz de superar a la fuerza estática $-\mu mg$. Es decir, se para cuando el punto de retorno n-ésimo satisfaga

$$\boxed{kx_n < \mu mg}$$

Esto es,

$$\boxed{\begin{array}{l} k\left(x_0 - 2n\dfrac{\mu g}{\omega_0^2}\right) < \mu mg \\ n > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{kx_0}{\mu mg} - 1\right) \end{array}}$$

La fuerza de rozamiento dinámica no es capaz de hacer pararse a la masa m, sólo actúa de forma progresiva quitándole energía que transforma en calor. Es la fuerza de rozamiento estática la que obliga a pararse a la masa, y esto sólo puede suceder en uno de los extremos del movimiento, cuando la masa retorna su movimiento.