"Un globo de aire caliente de volumen V_B = 1,1 m^3 está abierto por su parte inferior. La masa de la envoltura es m_H = 0,187 kg y el volumen de la misma se considera despreciable. La temperatura inicial del aire es t_1 = 20ºC y la presión normal del aire exterior es p_0= 1,013·10^5 Pa. En estas condiciones la densidad del aire es ρ_1 = 1,2 kg/m^3.

a)¿A qué temperatura se debe calentar el aire del globo para conseguir que flote?

b) El globo se mantiene sujeto al suelo mediante una cuerda y se calienta el aire hasta una temperatura t_3 = 110ºC ¿Cuál es la fuerza sobre la cuerda?

c) Si el globo se eleva en una atmósfera isoterma de 20ºC con una presión en el suelo p_o= 1,013·10^5 Pa ¿Hasta qué altura puede elevarse?

d) A la altura h de la cuestión c), el globo es empujado y elevado una altura Δh = 10 m y ahí se suelta ¿Qué tipo de movimiento tendrá?"

(*13ª Olimpiada Internacional de Física. Rep. Federal Alemana 1982*)

Apartado a)

Como el globo se encuentra abierto, la presión del gas que contiene será igual a la exterior, p_0. Por otra parte, para que flote, el empuje,

$$E=\rho_a V_B g \quad (1)$$

(aquí ρ_a es la densidad del aire) debe igualar o superar el peso del globo,

$$P_B=(m_H+\rho_B V_B)g \quad , \; (2)$$

donde ρ_B es la densidad del aire en su interior.

Así pues, debe cumplirse que

$$\rho_B \le \rho_1 - \frac{m_H}{V_B} \quad (3)$$

Aplicando al aire la ecuación de estado de los gases perfectos, en la forma

$$p=\frac{\rho}{M} R T \quad (4)$$

donde M es la masa molecular media del aire, la condición (3) puede escribirse como

$$\frac{p M}{R T_B} \le \frac{p M}{R T_a} - \frac{m_H}{V_B}$$

donde T_B es la temperatura del aire en el interior del globo y T_a es la del exterior. Es decir

$$\frac{1}{T_B} \le \frac{1}{T_a} - \frac{m_H}{M} \frac{R}{p V_B} \quad (5)$$

Aunque podemos obtener M a través de la composición del aire, podemos hacer uso de (4)

$$M = \frac{\rho R T}{p} \quad (6)$$

con las condiciones que aparecen en el enunciado, usando T_0 = 293 K, p_0 = 1,013·10^5 Pa y ρ_0 = 1,2 kg/m^3, resulta el valor esperado M = 0,02884 kg/mol.

Trasladando (6) a (5) obtenemos la temperatura buscada mediante una condición más elegante que (5):

$$\frac{1}{T_B} \leq \frac{1}{T_a}\left(1 - \frac{m_H}{\rho_a V_B}\right) \quad (7)$$

Substituyendo, con T_a = 293 K, ρ_a = 1,2 kg/m^3 y V_B = 1,1 m^3 tenemos que T_B >= 341 K = **68 ºC**.

Apartado b)

Si la temperatura en el interior del globo supera a la de equilibrio de flotación, para mantenerlo en reposo hará falta una fuerza que compense la diferencia entre el empuje (1) y el peso (2)

$$F = \left[(\rho_a - \rho_B) V_B - m_H\right] g \quad (8)$$

Con el propósito de manejar los datos del enunciado podemos escribir

$$\rho_B = \frac{p M}{R T_B} = \rho_a \frac{T_a}{T_B} \quad (9)$$

y entonces (8) pasa a ser

$$F = \left[\rho_a \left(1 - \frac{T_a}{T_B}\right) V_B - m_H\right] g \quad (10)$$

Substituyendo, con ρ_a = 1,1 kg/m^3, T_a = 293 K y T_B = 383 K, encontramos que F = **1,2 N**.

Apartado c)

Este apartado exige interpretar el enunciado, puesto que la altura que podrá alcanzar dependerá de la manera en la que se efectúe la suelta del globo.

Así, por ejemplo, si se hace mediante una cuerda de longitud lo suficientemente larga, de peso despreciable, y de manera que la velocidad de ascensión del globo sea siempre constante, la altura máxima que alcanzará sera aquélla para la cual la densidad del aire se corresponda con la igualdad en la condición (7).

Si, en cambio, consideramos que el globo se deja libre repentinamente, con lo que en cada momento estará sometido a una fuerza ascensional neta, *E-P*, que será igual al producto de la masa total del globo y su aceleración, el problema será diferente, pues consistirá en determinar a qué altura se hace nula la velocidad del globo.

Por ello, en primera instancia abordaremos el primer caso, para después analizar brevemente qué enfoque requiere el segundo.

Así pues, nuestro objetivo ahora es determinar a qué altura se cumple que es nula la fuerza (8), que podemos manejar en la forma (10), pues así encontramos que la condición buscada es

$$\frac{1}{T_B}=\frac{1}{T_a}\left(1-\frac{m_H}{\rho_a V_B}\right) \quad (11)$$

Para ello necesitamos conocer cómo varía la densidad del aire con la altura, suponiendo que, como indica el enunciado, la temperatura se mantiene constante.

Aunque la expresión es conocida y fácil de encontrar, abordaremos aquí su deducción, en consideración del nivel del alumnado al que están dirigidas estas pruebas (y que no tendrán a su disposición el acceso a la información correspondiente).

Nuestro punto de partida será, como es obvio la ley de los gases perfectos, que manejaremos en la forma dada por (4). Por otra parte, la variación en la presión debida a un cambio en la altura se deberá a la disminución del peso de la columna de aire sobre una superficie unidad([1]):

$$\mathrm{d}\,p_a=-\rho_a g\,\mathrm{d}\,h \quad (12)$$

Dividiendo miembro a miembro por (4) tenemos que

$$\frac{\mathrm{d}\,p_a}{p_a}=-\frac{M g}{R T_a}\mathrm{d}\,h \quad (13)$$

que podemos integrar entre h = 0 y h resultando

$$\ln p_a-\ln p_0=-\frac{M g}{R T_a}h$$

es decir

$$p_a=p_0\,\mathrm{e}^{-\frac{M g}{R T_a}h} \quad (14)$$

que también podemos escribir, usando (6), aplicado a nivel del suelo,

$$p_a=p_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} \quad (15)$$

1 Obsérvese que esta expresión es simplemente una forma diferencial del teorema fundamental de la estática de fluidos.

Llevando estos resultados a (4), habida cuenta de la constancia de la temperatura del aire, tenemos que su densidad también seguirá la misma dependencia exponencial

$$\rho_a=\rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{Mg}{RT_a}h}=\rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} \quad (16)$$

Como decíamos antes, nuestro objetivo es la altura en la que se cumple (11), esto es,

$$\rho_a=\frac{m_H}{V_B}\frac{T_B-T_a}{T_B} \quad (17)$$

Substituyendo en (16) y despejando h encontramos que la respuesta es

$$h=\frac{p_0}{\rho_0 g}\ln\frac{\rho_0}{\rho_a}=\frac{p_0}{\rho_0 g}\ln\left(\frac{\rho_0 V_B}{m_H}\frac{T_B}{T_B-T_a}\right) \quad (18)$$

De este modo, usando p_0 = 1,013·10^5 Pa, ρ_0 = 1,1 kg/m^3, T_B = 383 K y T_a = 293 K resulta h = **29000 m**([2]).

Terminaremos este apartado analizando brevemente el procedimiento que deberíamos seguir para determinar qué altura alcanzará el globo si se suelta repentinamente (y, como antes, suponiendo la constancia tanto de la temperatura interior como la exterior).

En primer lugar, destacaremos que en todo instante se cumplirá (9), pues procede de la igualdad en las presiones interior y exterior. Por otra parte, (10) será ahora la fuerza resultante sobre el globo, de manera que, por la segunda ley de Newton, tenemos que la aceleración del globo, a, dependerá de la altura a través de

$$F=\left[\rho_a(h)\left(1-\frac{T_a}{T_B}\right)V_B-m_H\right]g=m_B a=\left[m_H+\rho_B(h)V_B\right]a$$

es decir, usando de nuevo (10) y dividiendo ambos miembros por la densidad del aire y por el volumen del globo

$$\left[1-\frac{T_a}{T_B}-\frac{m_H}{\rho_a(h)V_B}\right]g=\left[\frac{m_H}{\rho_a(h)V_B}+\frac{T_B}{T_A}\right]a$$

---

2 Quizá en este caso el lector encontrará más fácil visualizar este resultado efectuando el cálculo en dos etapas. Así, en primer lugar, por (17) tenemos que el punto buscado se corresponde con una densidad del aire de 0,040 kg/m^3, es decir, unas 30 veces menor que a nivel del suelo. Por otra parte, la primera igualdad de (18) es de la forma $h=8610\,\mathrm{m}\cdot\ln\rho_0/\rho_a$ con lo que la respuesta buscada es 8610 m · ln 30.

de donde resulta que

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}\,t^2} = g\left[1 - \frac{T_a}{T_B} - \frac{m_H}{\rho_a(h) V_B}\right]\left[\frac{m_H}{\rho_a(h) V_B} + \frac{T_B}{T_A}\right]^{-1} \quad (18)$$

y donde la densidad del aire, $\rho_a(h)$, seguirá la dependencia exponencial (16).

Como vemos, la integración de esta expresión y su posterior derivación de la condición correspondiente a una velocidad nula parece ser una tarea demasiado complicada como para considerar que ésa era la intención de los autores del problema.

Apartado d)

De nuevo recurriremos a aplicar la segunda ley de Newton al globo, usando como fuerza resultante (8), que manejaremos en la forma (10).

Para facilitar el estudio tendremos en cuenta que en el punto calculado en el apartado anterior dicha fuerza es nula. Es decir, se cumple que

$$0 = \left[\rho_a(h)\left(1 - \frac{T_a}{T_B}\right) V_B - m_H\right] g$$

y por otra parte

$$F(\Delta h) = \left[\rho_a(h + \Delta h)\left(1 - \frac{T_a}{T_B}\right) V_B - m_H\right] g$$

Restando miembro a miembro ambas expresiones, tenemos que

$$F(\Delta h) = \Delta \rho_a \left(1 - \frac{T_a}{T_B}\right) V_B\, g \quad (20)$$

Para determinar la variación de la densidad del aire exterior al globo, habida cuenta de que el cambio en altura propuesto es muy pequeño en comparación con la de equilibrio ($\Delta h \ll h$), podemos recurrir a asimilar las diferencias finitas con diferenciales. Así, de la ecuación de estado del gas ideal, (4), podemos escribir que

$$\Delta \rho_a \simeq \frac{M}{R T_a} \Delta p_a = \frac{\rho_0}{p_0} \Delta p_a$$

Como por (13)

$$\Delta p_a \simeq - p_a(h) \frac{M g}{R T_a} \Delta h = - p_a(h) \frac{\rho_0}{p_0} g \Delta h$$

entonces

$$\Delta \rho_a \simeq -\frac{\rho_0^2}{p_0^2} p_a(h) g \Delta h$$

En consecuencia, (20) puede aproximarse como

$$F(\Delta h) = -\left(1 - \frac{T_a}{T_B}\right) g^2 \frac{\rho_0^2}{p_0^2} p_a(h) V_B \Delta h \quad (21)$$

que podemos expresar como

$$F(\Delta h) = -m_B \omega^2 \Delta h \quad (22)$$

donde m_B es la masa del globo,

$$m_B = m_H + \rho_B V_B$$

Así pues, (21) evidencia que la fuerza resultante es restauradora y proporcional a la elongación, con lo que el movimiento será armónico simple.

La pulsación angular de la oscilación será

$$\omega^2 = \left(1 - \frac{T_a}{T_B}\right) g^2 \frac{\rho_0^2}{p_0^2} p_a(h) \frac{V_B}{m_B}$$

Como en la altura de equilibrio la densidad del aire iguala a la densidad media del globo, esta expresión puede escribirse como

$$\omega^2 = \left(1 - \frac{T_a}{T_B}\right) g^2 \frac{\rho_0^2}{p_0^2} \frac{p_a(h)}{\rho_a(h)}$$

Por último, teniendo en cuenta que el cociente entre presión y densidad es constante,

$$\frac{p_a(h)}{\rho_a(h)} = \frac{p_0}{\rho_0}$$

puesto que la temperatura lo es, finalmente resulta que

$$\omega = g \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0} \left(1 - \frac{T_a}{T_B}\right)} \quad (23)$$

Substituyendo los valores del enunciado encontramos que la pulsación es de 0,016 rad/s y, entonces, un período de oscilación de <u>**6,7 minutos**</u>.