

Contenido

Tema 1. Números reales.	1
Ejercicios	13
Soluciones	16
Tema 2. Trigonometría.	19
Ejercicios	23
Soluciones	24
Tema 3. Números complejos.	25
Ejercicios	29
Soluciones	31
Tema 4. Funciones elementales.	33
Ejercicios	50
Soluciones	52
Tema 5. Álgebra matricial.	57
Tema 6. Geometría básica.	81
Ejercicios	86
Soluciones	91
Tema 7. Geometría vectorial.	99
Ejercicios	106
Soluciones	108
Tema 8. Derivación.	111
Ejercicios	116
Soluciones	118
Tema 9. Integración.	119
Ejercicios	125
Soluciones	126

1 NÚMEROS.

1.1 Números reales

- Aquí tenemos una lista de números de diferentes tipos:

$$0, 1, 17, -4, \frac{5}{3}, -\frac{2}{7}, \pi, \sqrt{2}, e, \pi^3.$$

- Los *números naturales* son los siguientes:

$$1, 2, 3, 4 \dots$$

- Otra clase de números la forman *números enteros*:

$$\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots$$

Evidentemente, todos los números naturales son enteros.

- A partir de los enteros se obtienen las *fracciones* (cocientes de enteros). Por ejemplo:

$$\frac{5}{3}, -\frac{2}{7}, \frac{1}{4}, \frac{-6}{1}.$$

Las fracciones se llaman *números racionales*.

- Hay muchas formas de escribir un número racional. Ejemplos:

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \dots = \frac{-5}{-3} = \frac{-10}{-6} = \frac{-15}{-9} = \dots$$

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \dots = \frac{-3}{-1} = \frac{-6}{-2} = \frac{-9}{-3} = \dots$$

Todo número entero (luego, todo número natural) es un número racional.

- Los siguientes números, además de otros muchos, son *números irracionales*:

$$\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, e.$$

- Los números racionales y los números irracionales forman la clase de los *números reales*.

Un número real o es racional o es irracional.

- Hay una clase aún mayor de números: los *números complejos*, que se estudian más adelante.

Ejercicios

1. Indicar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones: (a) 2 es entero; (b) 3 es racional; (c) 0 es real; (d) $\sqrt{2}$ es real; (e) π es racional; (f) e es natural.

1.2 Operaciones

- Con los números reales hay dos operaciones muy importantes: la *suma* (o *adición*) y el *producto* (o *multiplicación*).

- La *diferencia* (o *resta*) puede verse como una suma:

$$x - y = x + (-y) \quad .$$

- Hay que tener en cuenta las siguientes propiedades:

$$x + 0 = x \quad ; \quad -(-x) = x \quad ; \quad x + (-x) = 0 \quad ; \quad -(x + y) = -x - y \quad .$$

- **Ejemplo.** Se verifican las siguientes igualdades:

$$a - (a - b) = a - a + b = b \quad .$$

- **Ejemplo.** Las siguientes igualdades son correctas:

$$(a - b) - a = a - b - a = -b \quad .$$

- El producto de dos números se representa de varias maneras:

$$a \times b = a.b = ab \quad ,$$

$$3 \times 4 = 3.4 = 12 \quad ,$$

$$2 \times a = 2.a = 2a \quad ,$$

$$a \times x = a.x = ax \quad .$$

- Algunas propiedades del producto son:

$$1x = x \quad , \quad 0x = 0 \quad , \quad xy = 0 \implies x = 0 \text{ ó } y = 0 \quad .$$

- La *propiedad distributiva* o *propiedad del factor común* relaciona la suma y el producto:

$$x(y + z) = xy + xz$$

- **Ejemplo.** Se cumple lo siguiente:

$$a - b(a + 1) = a - ba - b \quad .$$

- **Ejemplo.** Se verifican las siguientes igualdades:

$$(1 - b)a + a = a - ba + a = 2a - ba = (2 - b)a \quad .$$

También se puede hacer así:

$$(1 - b)a + a = [(1 - b) + 1]a = (1 - b + 1)a = (2 - b)a \quad .$$

- El *cociente* (o *división*) de dos números se suele escribir de varias formas

$$a : b = \frac{a}{b} = a/b \quad .$$

- No tiene significado la división por 0, así que no se debe escribir $\frac{1}{0}$, ni $\frac{0}{0}$.
- El cociente se puede contemplar como un producto:

$$\frac{x}{y} = x \frac{1}{y} \quad .$$

- Se verifican las siguientes propiedades:

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x}} \quad ; \quad \frac{x}{1} = x \quad ; \quad \frac{\frac{x}{y}}{\frac{u}{v}} = \frac{xv}{yu} \quad ; \quad \frac{x}{y} = \frac{u}{v} \iff xv = yu \quad .$$

- **Ejemplo.** Se tiene lo siguiente:

$$\frac{a}{\frac{a}{b}} = \frac{ab}{a} = b \quad .$$

- **Ejemplo.** Se verifica que

$$\left(\frac{a}{b} + a \right) b = \frac{ab}{b} + ab = a + ab = a(1 + b) \quad .$$

- El producto repetido de un mismo factor da lugar a las *potencias* (de exponente natural):

$$x^n = x \, x \, x \, \dots \, x \quad (n \text{ veces})$$

Conviene definir $x^0 = 1$, para $x \neq 0$. Ejemplos: (a) $x^3 = xxx$; (b) $a^2 = aa$; (c) $m^1 = m$.

- Varias igualdades muy importantes son:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad , \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad , \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad , \\ a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \quad , \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad . \end{aligned}$$

- **Ejemplo.** Se verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} x(1+y+y^2) - y(1+x+x^2) &= x + xy + xy^2 - y - yx - yx^2 = \\ &= x - y + xy(y-x) = (x-y) - xy(x-y) = (x-y)(1-xy) \quad . \end{aligned}$$

- **Ejemplo.** Se cumplen las siguientes igualdades:

$$ab^3 + 2a^2b^2 + a^3b = ab(b^2 + 2ab + a^2) = ab(a+b)^2 \quad .$$

- Para $x \neq 0$ se definen las potencias de exponente entero negativo:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

No está definido 0^{-n} . Ejemplos: (a) $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$; (b) $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Ejercicios

1. Escribir como diferencias las siguientes sumas: (a) $5+7$; (b) $2+(-\pi)$; (c) $e+1$; (d) $2+\sqrt{2}$; (e) $4+(-1)$; (f) $-2+3$.
2. Escribir como cocientes los siguientes productos: (a) $2 \cdot \frac{1}{7}$; (b) $3 \cdot \frac{-11}{2}$; (c) $3 \cdot 2$; (d) $4 \cdot (-1)$; (e) $-6 \cdot 7$; (f) $2 \cdot 2$.
3. Simplificar las siguientes expresiones: (a) $(a-b) - (a+b)$; (b) $a+b - (a-b)$; (c) $-a + x - (2x+a)$; (d) $-(u-v) - (v-u)$; (e) $v-x + (-v-u)$; (f) $x - [(x-y) + (y-x)]$.
4. Efectuar: (a) $a + \frac{1}{x}$; (b) $u - \frac{1}{v}$; (c) $b^2 - \frac{1}{1-b}$; (d) $\frac{b}{w} + b$; (e) $\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}$; (f) $\frac{x+y}{x} - \frac{x+y}{y}$.
5. Simplificar: (a) $x^{-2}x^3$; (b) $x^{-2}y^{-1} + x^{-1}y^{-2}$; (c) $\frac{x^3}{x^2}$; (d) $\frac{x^{-3}}{x^2}$; (e) $\frac{x^{-3}}{x^{-2}}$; (f) $\frac{x^3}{x^{-2}}$.

1.3 Forma decimal

- Todos los números reales se pueden escribir en *forma decimal*. Por ejemplo:

$$327'18 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 + \frac{1}{10} + \frac{8}{100} \quad ;$$

aquí 327 es la *parte entera* y 0'18 es la *parte decimal*.

- En ocasiones la parte decimal es *periódica*, como en los siguientes ejemplos:

$$8'\widehat{75} = 8'757575\dots \quad (\text{periódica pura})$$

$$165'\widehat{03} = 165'0333\dots \quad (\text{periódica mixta})$$

- Si la parte decimal es finita, se puede escribir como periódica. Por ejemplo:

$$25'6 = 25'\widehat{60} = 25'6000\dots \quad (\text{periódica mixta})$$

- Los números que tienen una parte decimal periódica son exactamente los números racionales. En los siguientes ejemplos se ve cómo se pasa de decimal a fracción y de fracción a decimal.

- **Ejemplo.** Dado $x = 8'75$, claramente se puede escribir

$$x = \frac{875}{100} \quad .$$

- **Ejemplo.** Para pasar a fracción $x = 8'\widehat{75}$ se hace lo siguiente: llamamos

$$x = 8'\widehat{75} = 8'75757575\dots$$

Como el periodo tiene 2 cifras multiplicamos por $10^2 = 100$:

$$100x = 875'757575\dots$$

Observemos que x y $100x$ tienen la misma parte decimal. Restamos y se obtiene $100x - x = 99x = 875 - 8$. Luego $x = \frac{875 - 8}{100 - 1} = \frac{867}{99}$.

- **Ejemplo.** Para escribir como fracción $x = 165'20\widehat{3}$ realizamos lo siguiente. En primer lugar, pasamos a una expresión decimal periódica pura:

$$x = 165'20\widehat{3} = 165'2030303\dots$$

$$10x = 1652'0\widehat{3} = 1652'030303\dots$$

Como $10x$ es periódico puro, hacemos algo similar al ejemplo anterior:

$$1000x = 165203'030303\dots$$

Restamos: $1000x - 10x = 165203 - 1652$. Por tanto $x = \frac{165203 - 1652}{1000 - 10} = \frac{163\,551}{990}$.

- **Ejemplo.** Dada la fracción $\frac{2}{5}$, se utiliza el algoritmo de la división y se obtiene

$$\frac{2}{5} = 0'4 \quad .$$

- **Ejemplo.** La fracción $\frac{5}{3}$ se escribe, después de realizar la división, del siguiente modo:

$$\frac{5}{3} = 1'\widehat{6} \quad .$$

- Hemos dicho que todo número real tiene un desarrollo decimal, pero no siempre es único. Hay que tener en cuenta que

$$0'\widehat{9} = 0'9999\dots = 1 \quad .$$

Por ejemplo: $2'47 = 2'46\widehat{9}$. Otro ejemplo: $13'\widehat{9} = 14$.

- Los números irracionales son los que tienen un desarrollo decimal infinito no periódico:

$$\pi = 3'14159\dots \quad ; \quad \sqrt{2} = 1'41421\dots \quad ; \quad \sqrt{3} = 1'73205\dots \quad ; \quad e = 2'71828\dots$$

Por tanto, al escribir un número irracional en forma decimal siempre estamos haciendo una aproximación y nunca es una representación exacta.

- **Notación científica.** Es habitual utilizar las potencias de 10 para escribir números grandes y números pequeños, tal como se hace en los siguientes ejemplos:

$$2'3 \times 10^{10} = 23 \times 10^9 = 23 \times 1\,000\,000\,000 = 23\,000\,000\,000$$

$$2'3 \times 10^{-10} = 23 \times 10^{-11} = 23 \times 0'000\,000\,000\,01 = 0'000\,000\,000\,23$$

- **Representación geométrica.** Se toma una recta y en ella dos puntos cualesquiera, a los que asociamos los números 0 y 1 (lo haremos quedando el 0 a la izquierda y el 1 a la derecha). Entonces se pueden representar todos los números reales en esa recta, de modo que a cada punto le corresponde un número y a cada número le corresponde un punto. Ese número se suele llamar *abscisa* del punto.
- También los números reales se pueden representar como vectores. Por ejemplo, el número 2 se corresponde con un vector de módulo 2, orientado de izquierda a derecha, y situado con origen en cualquier punto de la recta.

Ejercicios

1. Escribir como fracción los siguientes números: (a) $2'3$; (b) $0'\widehat{12}$; (c) $3'\widehat{14}$; (d) $51'23\widehat{4}$; (e) $6'\widehat{11}$; (f) $-11'2\widehat{3}$.
2. Escribir en forma decimal: (a) $\frac{7}{2}$; (b) $\frac{6}{3}$; (c) $\frac{1}{4}$; (d) $\frac{5}{6}$; (e) $\frac{-3}{5}$; (f) $\frac{-1}{7}$.
3. Indicar cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles irracionales: (a) $2'676767\dots$; (b) $8'123321123321\dots$; (c) $5'55999\dots$; (d) $0'010101\dots$; (e) $0'010010001\dots$; (f) $0'0100101001\dots$.
4. Escribir de forma más simple: (a) $0'0\widehat{9}$; (b) $3'45\widehat{9}$; (c) $10'\widehat{9}$; (d) $9'\widehat{9}$; (e) $0'08\widehat{9}$; (f) $9'8\widehat{9}$.
5. Calcular: (a) $1'2 \cdot 10^9 + 2 \cdot 10^{10}$; (b) $1'2 \cdot 10^9 - 2 \cdot 10^{10}$; (c) $2 \cdot 10^{10} \cdot 1'2 \cdot 10^9$; (d) $\frac{1'2 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^{10}}$; (e) $(1'2 \cdot 10^9)^2$; (f) $(1'2 \cdot 10^9)^{-2}$.
6. Dibujar en una recta los números: (a) $3'2$; (b) $-2'3$; (c) $0'6$; (d) $\sqrt{2}$; (e) $\frac{5}{3}$; (f) π .

1.4 Orden e inecuaciones

- Los números reales están ordenados. Se utilizan los cuatro símbolos: $<$ (menor), \leq (menor o igual), $>$ (mayor), \geq (mayor o igual). Por ejemplo: $1 < 2$; $3 \leq 4$; $6 > 5$; $7 \geq 7$.
- Existen las siguientes relaciones:

$$a \leq b \iff b \geq a \iff a < b \text{ ó } a = b \iff b > a \text{ ó } a = b \quad .$$

- Escribir $x > 0$ significa que x es *positivo*, mientras que $x < 0$ quiere decir que x es *negativo*. Debe quedar claro que 0 no es positivo ni negativo.
- Los números naturales $(1, 2, 3, \dots)$ son los enteros positivos.
- Al operar con desigualdades hay que tener en cuenta ciertas propiedades, como se ve en los ejemplos siguientes.
- Al sumar desigualdades se conserva el orden. Ejemplo: si sumamos

$$\begin{cases} 3 + x < 1 \\ -1 + 3x < -2 \end{cases}$$

se obtiene

$$2 + 4x < -1 \quad .$$

- Al multiplicar una desigualdad por un número positivo se conserva el orden. Ejemplo: si

$$2 - x < x - 7 \quad ,$$

entonces, al multiplicar por 3 se obtiene

$$6 - 3x < 3x - 21 \quad .$$

- Al multiplicar una desigualdad por un número negativo se invierte el orden. Ejemplo: si

$$2 + x < -x + 8 \quad ,$$

entonces, al multiplicar por -2 resulta

$$-4 - 2x > 2x - 16 \quad .$$

- Al hallar los inversos de dos números del mismo signo se invierte el orden. Ejemplos:

$$3 < x \implies \frac{1}{3} > \frac{1}{x} \quad ,$$

$$x < -1 \implies \frac{1}{x} > -1 \quad .$$

- Para resolver una inecuación se debe “despejar” la incógnita, tal como se hace en los siguientes ejemplos.
- **Ejemplo.** La inecuación $2 + 4x < -1$ es equivalente a $4x < -3$, es decir $x < \frac{-3}{4}$. Por tanto, cualquier número menor que $-\frac{3}{4}$ es solución de la inecuación.
- **Ejemplo.** Para resolver $2 - x < x - 7$, se obtiene primero $9 < 2x$, así que $x > \frac{9}{2}$.

- **Ejemplo.** Las soluciones de $2 + x \leq -x + 8$ se pueden obtener así: $2x \leq 6$, luego $x \leq 3$.

- **Ejemplo.** La inecuación

$$\frac{x+1}{2} < \frac{1}{x-1}$$

exige considerar los casos $x - 1 > 0$ ($x > 1$) y $x - 1 < 0$ ($x < 1$). No tiene sentido $x = 1$. Para $x > 1$: $(x+1)(x-1) = x^2 - 1 < 2$, luego $x^2 < 3$, así que $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, luego $1 < x < \sqrt{3}$. Para $x < 1$: $(x+1)(x-1) = x^2 - 1 > 2$, por tanto $x^2 > 3$, de donde $x < -\sqrt{3}$ ó $x > \sqrt{3}$, luego $x < -\sqrt{3} < 1$. En resumen, las soluciones son $x < -\sqrt{3}$ y $1 < x < \sqrt{3}$.

Ejercicios

- Indicar cuáles de los siguientes números son positivos: (a) π ; (b) $3 - \pi$; (c) 0 ; (d) $3 \cdot \frac{-1}{4}$; (e) $-5 + 7$; (f) $\frac{-3}{-5}$.
- Resolver las siguientes inecuaciones: (a) $x - 1 \leq 1 - x$; (b) $3x - 1 \leq \frac{x}{-3}$; (c) $\frac{1}{x} > 2$; (d) $\frac{1}{x} < 7x - 4$; (e) $x + 2 < 3x + 4$; (f) $\frac{1}{x^2} \geq 7$.

1.5 Valor absoluto y distancia

- Se define el *valor absoluto* $|x|$ del número real x del siguiente modo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo: $|-3| = |3| = 3$; $|\sqrt{2}| = |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$.

- Propiedades del valor absoluto:

$$* |x| \geq 0$$

$$* |x| = 0 \iff x = 0$$

$$* |x| = |-x|, \quad |x - y| = |y - x|$$

$$* |xy| = |x||y|, \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

$$* |x + y| \leq |x| + |y|, \quad |x - y| \leq |x| + |y|$$

- La *distancia* entre dos números reales se expresa usando el valor absoluto:

$$d(x, y) = |x - y| = |y - x|.$$

Ejemplos: $d(-2, 3) = 5$; $d(3, 7) = 4$.

- Una propiedad muy útil es la siguiente:

$$d(x, y) = |x - y| < r \iff x - r < y < x + r \iff y - r < x < y + r \quad .$$

Por ejemplo: $|2 - x| < 1 \iff 1 < x < 3$. Otro ejemplo: $|x - 1| < 2 \iff -1 < x < 3$.

Ejercicios.

1. Hallar: (a) $|-7|$; (b) $\left|\frac{-1}{2}\right|$; (c) $\left|\frac{-1}{-3}\right|$; (d) $|\pi|$; (e) $|e - \pi|$; (f) $|\sqrt{2} - 1|$.
2. Hallar: (a) $|x^2|$; (b) $|1 + x^2|$; (c) $\left|\frac{-1}{1 + x^2}\right|$; (d) $|a^2 + b^2|$; (e) $\left|\frac{1 + u^2}{v^2}\right|$; (f) $\left|\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right|$.
3. Determinar todos los números que cumplan las desigualdades: (a) $|x - 2| < 3$; (b) $|x - 2| < 2$; (c) $|x - 4| < 5$; (d) $|x + 1| < 3$; (e) $|x + 2| \leq 2$; (f) $|x + 1| \leq 0$.
4. Escribir usando valores absolutos: (a) $-1 < x < 1$; (b) $-7 \leq x \leq 1$; (c) $-5 \leq x \leq 8$; (d) $1 < x < 8$; (e) $-5 < x < -1$; (f) $-2 \leq x \leq 0$.

1.6 Fórmula del binomio de Newton

- Queremos calcular las potencias de un binomio $a + b$. Ya sabemos que

$$(a + b)^0 = 1 = 1a^0b^0$$

$$(a + b)^1 = a + b = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$$

- Vemos que se obtienen sumas en las que las potencias de a disminuyen, mientras las de b aumentan. Con los coeficientes podemos formar el siguiente *triángulo de Tartaglia*:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & & & & & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

- La regla de formación es que cada número es suma de los dos que están encima y que en los extremos aparece siempre el 1. Podemos continuar el triángulo de Tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
 \end{array}$$

- Entonces se tiene

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

- Es habitual escribir

$$\binom{n}{k}$$

para referirnos al número que está en la fila n ($n = 0, 1, 2, \dots$) y que ocupa en ella el lugar k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Por ejemplo:

$$\binom{0}{0} = 1 \quad , \quad \binom{1}{0} = 1 \quad , \quad \binom{2}{1} = 2 \quad , \quad \binom{3}{1} = 3 \quad , \quad \binom{5}{2} = 10 \quad , \quad \binom{6}{4} = 15$$

- Observamos las siguientes propiedades

$$* \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$* \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$* \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$* \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- Para $n = 1, 2, 3, \dots$, el *factorial* de n es

$$n! = n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad .$$

Conviene escribir $0! = 1$. Ejemplos: $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$.

- Hay varias expresiones para $\binom{m}{n}$ en las que se utilizan los factoriales:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \quad .$$

Ejemplo: $\binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$.

- Ahora podemos escribir la igualdad para $(a+b)^n$, llamada *fórmula del binomio de Newton*:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n \quad .$$

Se escribe de forma abreviada así:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \quad .$$

Ejercicios

1. Escribir el desarrollo de: (a) $(1+x)^2$; (b) $(1-u)^3$; (c) $(x-y)^3$; (d) $\left(x - \frac{1}{y}\right)^3$; (e) $(v-1)^4$; (f) $(1+x)^5$.
2. Desarrollar: (a) $(2-x)^2$; (b) $(3+x)^3$; (c) $\left(3 - \frac{1}{x}\right)^3$; (d) $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^4$; (e) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$; (f) $(2-x)^4$.
3. Calcular: (a) $\binom{17}{0}$; (b) $\binom{155}{2}$; (c) $\binom{13}{4}$; (d) $\binom{11}{6}$; (e) $\binom{11}{3}$; (f) $\binom{4}{2}$.
4. Calcular el coeficiente de x^{15} en el desarrollo de $(1+x)^{20}$.

1.7 Variaciones, permutaciones y combinaciones

- **Ejemplo.** En un club de 20 personas hay que nombrar un presidente, un secretario y un tesorero. Se puede hacer de muchas formas. El presidente puede ser cualquiera de las 20; elegido el presidente, el secretario puede ser cualquiera de las 19 restantes; elegidos presidente y secretario, el puesto de tesorero lo puede ocupar cualquiera de las otras 18. En total hay

$$V_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = \frac{20!}{17!}$$

maneras de hacer las designaciones. Hay que observar que la elección de Juan como presidente, Andrea como secretaria y Yomina como tesorera, es diferente de Andrea como presidenta, Juan como secretario y Yomina como tesorera; es decir, resulta importante el orden (presidente, secretario y tesorero) en el que se elijan las personas.

- Se llama *variación* de m objetos de tamaño n a cualquiera de los grupos ordenados de n objetos que se pueden formar con los m . Dos variaciones son diferentes si tienen objetos distintos o están en orden diferente.

- El número total de variaciones de tamaño n que se pueden formar con m objetos es

$$V_{m,n} = m(m-1)\dots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} \quad .$$

- Un caso especial de variación es la *permutación*, que se tiene cuando $m = n$:

$$P_n = V_{n,n} = \frac{n!}{0!} = n!$$

- **Ejemplo.** Hay que colocar a cinco personas en una fila; se puede hacer de $P_5 = 5! = 120$ maneras distintas.

- A veces nos interesan grupos sin orden. Se llama *combinación* de m objetos de tamaño n a cualquiera de los grupos de n objetos que se pueden formar con los m , sin importar el orden. Dos combinaciones son diferentes si tienen objetos distintos.

- El número de combinaciones de tamaño n que se forman con m elementos es

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} = \binom{m}{n} \quad .$$

La última igualdad motiva que a las expresiones $\binom{m}{n}$ se les llame *números combinatorios*.

- **Ejemplo.** Una persona sólo puede llevar 3 de sus 12 libros en una maleta. En total tiene

$$C_{12,3} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} = 220$$

elecciones diferentes.

Ejercicios

1. Una persona tiene 4 pantalones y 5 camisas. ¿De cuántas formas puede vestirse?
2. Hay 8 bebidas diferentes. Una persona elige 2 de esas 8 bebidas para mezclarlas. ¿Cuántas mezclas distintas de bebidas puede hacer?
3. ¿De cuántas formas distintas pueden oírse 4 discos?
4. Una persona que posee 7 camisas decide llevar 2 a un viaje que va a realizar. ¿Cuántas posibilidades tiene?

5. ¿De cuántas modos distintos se pueden meter tres objetos en tres cajas si sólo se puede meter un objeto en una caja?
6. Ángel, Belinda, Carlos, Diana y Ernesto desean hacerse una fotografía poniéndose todos en la misma fila. ¿Cuántas formas hay de colocarse?
7. Ángel, Belinda, Carlos, Diana y Ernesto desean hacerse una fotografía de modo que alternen chico y chica. ¿Cuántas formas hay de colocarse?
8. Una línea de guagua sale de la parada 1, pasa por otras 5 (paradas 2,3,4,5 y 6) y llega a la última (la parada 7). ¿Cuántos billetes diferentes habrá que imprimir si se desea que en cada billete figure la parada en la que se sube el pasajero y la parada en la que se baja?

1.8 Ejercicios

1. Indicar cuáles de los siguientes números son enteros: (a) $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt{2}-2\sqrt{2}$; (c) $\sqrt{2}+2-\sqrt{2}$; (d) $\frac{2}{3}-\frac{5}{3}$; (e) $\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{2}$; (f) $\frac{\sqrt{2}}{3}:\frac{\sqrt{2}}{6}$.
2. Simplificar las siguientes expresiones:

(a) $yb - y(1 - b)$

(b) $xy - x^2y + xy^2$

(c) $a - \{a - [a - (a - 1)]\}$

(d) $a - \{u - [a - (u - a)]\}$

(e) $(1 - a) - (1 - a)^2$

(f) $(a^2 - x^2)(a^2 + x^2)$

3. Simplificar

(a) $\frac{a}{b} + ab$

(b) $\frac{a}{u^2} + \frac{u}{a^2}$

(c) $1 - \frac{1}{x}$

(d) $\frac{\frac{a}{b}}{c} - \frac{a}{\frac{b}{c}}$

(e) $\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

(f) $\frac{a-b}{c} \frac{c^2}{a^2-b^2}$

4. Simplificar

$$(a) \ 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}}}$$

$$(b) \ \frac{\frac{a-b}{a}}{a+b}b$$

$$(c) \ \frac{\frac{a^2-b^2}{a}}{\frac{a+b}{b^2}}$$

$$(d) \ \frac{v \frac{1}{v}}{x \frac{1}{x}}$$

$$(e) \ \frac{(x+y)^2(x^2-y^2)}{(x-y)^2(x^2+y^2)}$$

$$(f) \ \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$$

$$5. \text{ Calcular } 0'\widehat{23} + 0'\widehat{456}$$

$$6. \text{ Hallar } 0'\widehat{23} + 0'\widehat{456}, \text{ escribiendo primero los sumandos en forma de fracción.}$$

$$7. \text{ Hallar } \frac{0'\widehat{29} + 0'\widehat{39}}{0'\widehat{99} - 0'\widehat{89}}$$

8. Resolver las inecuaciones siguientes:

$$(a) \ x + 2 < 6 - x$$

$$(b) \ 4x - 2 > 7 - 5x$$

$$(c) \ x^2 + 1 < 0$$

$$(d) \ -\frac{1}{x} \geq x + 2$$

$$(e) \ \frac{1}{x^2} \geq 2$$

$$(f) \ \frac{1}{1-x} \leq 1 + x$$

9. Resolver las siguientes inecuaciones:

$$(a) \ |x - 1| \leq 0$$

$$(b) \ |x - 2| \leq 3$$

$$(c) \ |x + 5| > 5$$

$$(d) \ |x - 5| < |x + 1|$$

$$(e) \ |x + 1| + |x + 2| > 1$$

$$(f) \ |x - 1| \cdot |x - 2| \leq 3$$

10. Demostrar la identidad

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

11. Calcular x sabiendo que verifica $\binom{94}{78} = \binom{94}{x}$

12. Hallar $\binom{15}{8} + \binom{15}{9}$

13. Simplificar la expresión

$$\frac{\binom{16}{1} + \binom{16}{2}}{\binom{17}{14} + \binom{17}{15}}$$

14. ¿Qué relación existe entre m y n para que se verifique la igualdad

$$\binom{m}{n} = 2 \binom{m-1}{n}$$

15. Encontrar el valor de x para que se cumpla la siguiente igualdad $\binom{12}{x} = \binom{12}{3}$

16. Calcular el valor de x en la igualdad $\binom{x}{16} = \binom{x}{7}$

17. Hallar el coeficiente de x^{15} en el desarrollo de $(x+2)^{20}$

18. Desarrollar $(3+2x)^5$

19. Calcula el término independiente (en el que no figura x) en el desarrollo de $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^{15}$

20. Desarrollar las siguientes potencias:

$$(a) (2+x)^5; \quad (b) (4-x)^7; \quad (c) \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)^3; \quad (d) (-3+2x^2)^5$$

21. Tenemos 5 juguetes diferentes que deseamos entregar a 5 niños, uno a cada uno. ¿De cuántas formas puede realizarse el reparto?

22. ¿Cuántas diagonales hay en un polígono de 17 lados?

23. Hay tres niños, a cada uno de los cuales se le da un juguete de los 7 distintos que hay en una tienda. ¿De cuántas formas puede hacerse?

1.9 Soluciones

1.1 **Números reales.** (1a) Cierta. (1b) Cierta. (1c) Cierta. (1d) Cierta. (1e) Falsa. (1f) Falsa.

1.2 **Operaciones.** (1a) $5 - (-7)$. (1b) $2 - \pi$. (1c) $e - (-1)$. (1d) $2 - (-\sqrt{2})$. (1e) $4 - 1$. (1f) $-2 - (-3)$. (2a) $\frac{2}{7}$. (2b) $\frac{3}{2/-11}$. (2c) $\frac{3}{1/2}$. (2d) $\frac{4}{-1}$. (2e) $\frac{-6}{1/7}$. (2f) $\frac{2}{1/2}$. (3a) $-2b$. (3b) $2b$. (3c) $-2a - x$. (3d) 0 . (3e) $-x - u$. (3f) x . (4a) $\frac{ax+1}{x}$. (4b) $\frac{uv-1}{v}$. (4c) $\frac{b^2-b^3-1}{1-b}$. (4d) $\frac{b(1+w)}{w}$. (4e) $\frac{x^3-y^3}{xy}$. (4f) $\frac{y^2-x^2}{xy}$. (5a) x . (5b) $\frac{x+y}{x^2y^2}$. (5c) x . (5d) x^{-5} . (5e) x^{-1} . (5f) x^5 .

1.3 **Forma decimal.** (1a) $\frac{23}{10}$. (1b) $\frac{12}{99}$. (1c) $\frac{283}{90}$. (1d) $\frac{46111}{900}$. (1e) $\frac{550}{90}$. (1f) $-\frac{1011}{90}$. (2a) $3'5$. (2b) 2 . (2c) $0'25$. (2d) $0'8\hat{3}$. (2e) $-0'6$. (2f) $-0'1428\hat{5}7$. (3a) Racional. (3b) Racional. (3c) Racional. (3d) Racional. (3e) Irracional. (3f) Racional. (4a) $0'1$. (4b) $3'46$. (4c) 11 . (4d) 10 . (4e) $0'09$. (4f) $9'9$. (5a) $21'2 \times 10^9$. (5b) $-18'8 \times 10^9$. (5c) $2'4 \times 10^{19}$. (5d) $0'06$. (5e) $1'44 \times 10^{18}$. (5f) $69'\hat{4} \times 10^{-20}$.

1.4 **Orden e inecuaciones.** (1a) Positivo. (1b) No positivo. (1c) No positivo. (1d) No positivo. (1e) Positivo. (1f) Positivo. (2a) $x \leq 1$. (2b) $x \leq 0'3$. (2c) $0 < x < 0'5$. (2d) $\frac{2-\sqrt{11}}{7} < x < 0$ y $\frac{2+\sqrt{11}}{7} < x$. (2e) $-1 < x$. (2f) $-\frac{1}{\sqrt{7}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{7}}$.

1.5 **Valor absoluto y distancia.** (1a) 7 . (1b) $\frac{1}{2}$. (1c) $\frac{1}{3}$. (1d) π . (1e) $\pi - e$. (1f) $\sqrt{2} - 1$. (2a) x^2 . (2b) $1 + x^2$. (2c) $\frac{1}{1+x^2}$. (2d) $a^2 + b^2$. (2e) $\frac{1+u^2}{v^2}$. (2f) $\frac{|1-x^2|}{1+x^2}$. (3a) $-1 < x < 5$. (3b) $0 < x < 4$. (3c) $-1 < x < 9$. (3d) $-4 < x < 2$. (3e) $-4 \leq x \leq 0$. (3f) $x = -1$. (4a) $|x| < 1$. (4b) $|x+3| \leq 4$. (4c) $|x-1'5| \leq 6'5$. (4d) $|x-4'5| < 3'5$. (4e) $|x+3| < 2$. (4f) $|x+1| \leq 1$.

1.6 **Binomio de Newton.** (1a) $1+2x+x^2$. (1b) $1-3u+3u^2-u^3$. (1c) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$. (1d) $x^3 - \frac{3x^2}{y} + \frac{3x}{y^2} - \frac{1}{y^3}$. (1e) $v^4 - 4v^3 + 6v^2 - 4v + 1$. (1f) $1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$. (2a) $4 - 4x + x^2$. (2b) $27 + 27x + 9x^2 + x^3$. (2c) $27 - \frac{27}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{1}{x^3}$. (2d) $1 - \frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^6} + \frac{1}{x^8}$. (2e) $x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$. (2f) $16 - 32x + 24x^2 - 8x^3 + x^4$. (3a) 1 . (3b) $11\ 935$. (3c) 715 . (3d) 462 . (3e) 165 . (3f) 6 . (4) $15\ 504$.

1.7 **Variaciones, permutaciones y combinaciones.** (1) 20 . (2) 28 . (3) 24 . (4) 21 . (5) 6 . (6) 120 . (7) 12 . (8) 21 .

1.8 **Ejercicios.** (1a) No entero. (1b) No entero. (1c) Entero. (1d) Entero. (1e) Entero. (1f) Entero. (2a) $y(2b-1)$. (2b) $xy(1-x+y)$. (2c) 1 . (2d) $3a-2u$. (2e) $a(1-a)$. (2f) $a^4 - x^4$. (3a) $\frac{a(1+b^2)}{b}$. (3b) $\frac{a^3+u^3}{a^2u^2}$. (3c) $\frac{x-1}{x}$. (3d) $\frac{a(1-c^2)}{bc}$. (3e) $\frac{1}{x^2} - 1$.

(3f) $\frac{c}{a+b}$. **(4a)** $\frac{3+5a}{2+3a}$. **(4b)** $\frac{(a-b)b}{(a+b)a}$. **(4c)** $\frac{(a-b)b^2}{a}$. **(4d)** 1. **(4e)** $\frac{(x+y)^3}{(x-y)(x^2+y^2)}$.
(4f) $\frac{1}{x-y}$. **(5)** $0'\widehat{688779}$. **(6)** $\frac{841}{1221}$. **(7)** 7. **(8a)** $x < 2$. **(8b)** $x > 1$. **(8c)** No tiene
 solución. **(8d)** $x < 0$. **(8e)** $0 < |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. **(8f)** $x = 0$ y $1 < x$. **(9a)** $x = 1$. **(9b)**
 $-1 \leq x \leq 5$. **(9c)** $x < -10$ y $0 < x$. **(9d)** $2 < x$. **(9e)** $x < -2$ y $-1 < x$. **(9f)**
 $\frac{3-\sqrt{13}}{2} \leq x \leq 1$ y $2 \leq x \leq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. **(11)** 78 y 16. **(12)** $\binom{16}{9}$. **(13)** $\frac{1}{6}$. **(14)** $m = 2n$.
(15) 3 y 9. **(16)** 23. **(17)** 496 128. **(18)** $243 + 810x + 1\,080x^2 + 720x^3 + 240x^4 + 32x^5$.
(19) 5 674 372 704. **(20a)** $32 + 80x + 80x^2 + 40x^3 + 10x^4 + x^5$. **(20b)** $16\,384 - 28\,672x +$
 $21\,504x^2 - 8\,960x^3 + 2\,240x^4 - 336x^5 + 28x^6 - x^7$. **(20c)** $\frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{27}{32}x + \frac{27}{64}$. **(20d)**
 $32x^{10} - 240x^8 + 720x^6 - 1\,080x^4 + 810x^2 - 243$. **(21)** 120. **(22)** 119. **(23)** 210.

2 TRIGONOMETRÍA.

2.1 Ángulos y razones

Un ángulo viene determinado por dos semirrectas, llamadas *lados*, con un mismo origen llamado *vértice*.

Medida de ángulos.

En el sistema sexagesimal se toma como unidad el ángulo recto. Un ángulo recto se divide en 90 partes llamadas *grados sexagesimales*.

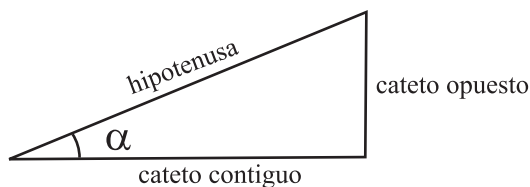
En el sistema circular la unidad de medida es el *radián*. Un ángulo mide un radián cuando la longitud del arco es igual al radio.

$$360^\circ = 2\pi \text{ radianes}$$

Si la medida de un ángulo es de g grados sexagesimales y r en radianes, se verifica:

$$\frac{g}{180} = \frac{r}{\pi}$$

Razones trigonométricas de un ángulo agudo.



$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\text{cos}\alpha = \frac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha} = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha}$$

Además se definen las razones secante (sec), cosecante (cosec) y cotangente (ctg) de la forma:

$$\text{seca}\alpha = \frac{1}{\text{cos}\alpha}$$

$$\text{coseca}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$$

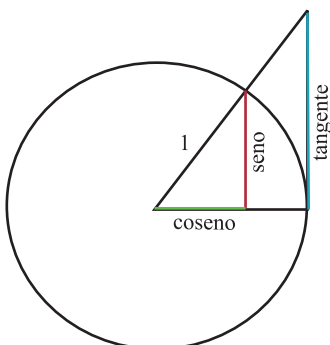
$$\text{ctg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$$

Razones de los ángulos de 0° , 30° , 45° , 60° y 90° .

	0°	30°	45°	60°	90°
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no definida

Relación fundamental de la trigonometría.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$



Como se puede observar esta relación es consecuencia inmediata del **Teorema de Pitágoras**

$$h^2 = C^2 + c^2,$$

es decir, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Ejercicios

1. Calcula la altura que alcanza una escalera de 6m de longitud cuando descansa sobre una pared y forma un ángulo de 60° con el suelo.

Solución: $x = 6\operatorname{sen}60^\circ$.

2. Se quiere medir la altura de una estatua situada sobre un pedestal. Desde un punto que se encuentra a 20m del pedestal, éste se observa bajo un ángulo de 12° y el extremo superior de la estatua bajo un ángulo de 28° . ¿Qué altura tiene la estatua?

Solución: $y = 20(\operatorname{tg}28^\circ - \operatorname{tg}12^\circ)$

3. Calcula la altura de un edificio sabiendo que, desde cierto punto, la cúspide del edificio forma un ángulo de 30° con la horizontal y cuando nos aproximamos 70m el ángulo es de 60° .

Solución: $y = \frac{70\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}30^\circ}{\operatorname{tg}60^\circ - \operatorname{tg}30^\circ}$.

Relaciones entre las razones de ángulos distintos.

Complementarios	Suplementarios	Difieren en 180°	Opuestos
$\cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
$\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$	$\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$	$\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$	$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$
$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

Fórmulas de adición.

Razones de la suma	Razones de la diferencia
$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$	$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$
$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$	$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$

Fórmulas del ángulo doble y mitad.

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$	$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$	$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

Fórmulas de transformación en producto.

$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2\operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\cos \alpha - \cos \beta = -2\operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$

Ejercicios

1. Resuelve la ecuación $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$.

Solución: $2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} x(2\cos x - 1) = 0$.

Por tanto, $\operatorname{sen} x = 0$ o $2\cos x - 1 = 0$, es decir $\cos x = \frac{1}{2}$. Luego las soluciones son: $k\pi$, $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ y $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

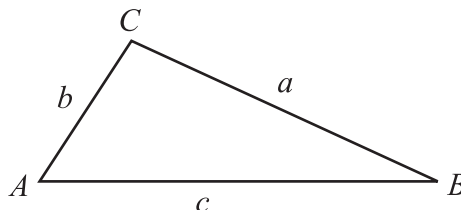
2. Resuelve la ecuación $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$.

Solución: $\operatorname{sen} x + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = 1$, por tanto $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = 1 - \operatorname{sen} x$, y elevando al cuadrado obtenemos: $1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 + \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x$

$2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$; $2\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 1) = 0$. Por tanto $\operatorname{sen} x = 0$ o $\operatorname{sen} x = 1$, es decir, $x = k\pi$ y $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

2.2 Resolución de triángulos

Sea ABC un triángulo, donde denotamos por A, B, C los ángulos y por a, b, c , los lados enfrentados a los ángulos A, B, C , respectivamente.



Se verifica:

$$A + B + C = 180^\circ = \pi \text{ radianes}$$

Teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$$

siendo R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$$

$$S = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B$$

$$S = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A$$

Dado $p = \frac{a + b + c}{2}$,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{Fórmula de Herón})$$

Ejercicios

1. Un barco que se encuentra frente a un golfo es observado desde los dos cabos que lo forman y que distan 10km. Desde cada cabo se ve el barco con ángulos de 28° y 32° . Calcula la menor distancia a que se encuentra el barco de la costa.

Solución: $\frac{\text{sen}120^\circ}{10} = \frac{\text{sen}28^\circ}{a}$

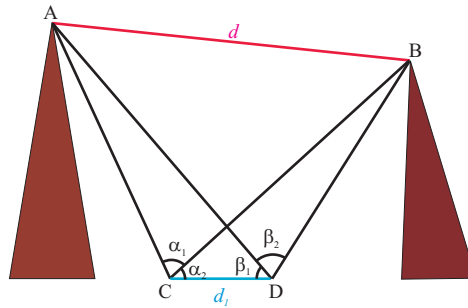
2. Desde un aeropuerto C se observan dos aviones A y B bajo un ángulo de 38° . Si los aviones distan 5 y 8 km del aeropuerto, calcula la distancia que separa a los aviones.

Solución: $a^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \cos 38^\circ$

2.3 Ejercicios

1. Cuando el Sol está a 30° por encima del horizonte, ¿cuánto mide la sombra proyectada por un árbol de 15m de altura?
2. Halla el área de un hexágono regular de 10cm de lado.
3. Calcular el área de un octógono regular de lado 7cm.
4. La diferencia entre la longitud de una circunferencia y el perímetro de un hexágono regular inscrito es de 28m. Halla el radio de la circunferencia.
5. De un triángulo se conocen dos ángulos que miden 55° y 45° y el lado opuesto al de 45° que mide 100m. Calcula los otros dos lados.
6. Calcula la longitud de un puente que se quiere construir sobre un barranco, conociendo que los ángulos que forman los extremos del barranco A y B con un punto en el fondo del barranco O son $ABO = 32^\circ$ y $OAB = 48^\circ$ y que la distancia entre A y O es de 120m.
7. Encuentra un ángulo agudo tal que $\text{sen}(x + 30^\circ) = \cos x$.
8. Desde un barco se ve la torre de un faro bajo un ángulo de 30° . Cuando el barco ha recorrido 200m en la dirección del faro dicho ángulo es de 45° . Calcula la altura de la torre sobre el nivel del mar y la distancia a la que se encuentra el barco del faro en el momento de la segunda medición.
9. Se quiere medir la altura de una montaña cercana a un pueblo. A la salida de éste han medido el ángulo de elevación que es de 30° . Han avanzado 100m hacia la base y han vuelto a medir el ángulo de elevación siendo ahora 45° . Calcula la altura de la montaña.

10. Juan y Rosa se encuentran a ambos lados de la orilla de un río. Rosa se aleja hasta una caseta distante 100m del punto A, desde la que dirige visuales a los puntos A y B (donde se encuentra Pedro) que forman un ángulo de 30° y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de 120° . ¿Qué distancia hay entre A y B?
11. Dos montañeros que han ascendido en fines de semana sucesivos a dos picos querían saber qué distancia hay entre ellos. Para ello han medido desde la base del pico A los ángulos $\alpha_1 = 85^\circ$ y $\alpha_2 = 30^\circ$, después han caminado hasta la base del pico B y han medido los ángulos $\beta_1 = 40^\circ$ y $\beta_2 = 93^\circ$. La distancia que hay entre dichas bases es de 600m. ¿Podrías calcularla?



12. Enunciar y resolver un problema donde se quiera medir un objeto situado en un pedestal al que no tenemos acceso a la base.

2.4 Soluciones

1. $x = \frac{15}{\operatorname{tg} 30^\circ}$.

2. $A_H = 6A_T = 6 \frac{10\sqrt{75}}{2} = 30\sqrt{75}$.

3. $A_H = 8A_T = 8 \frac{7 \frac{3.5}{\operatorname{tg} 22.5}}{2} = \frac{28 \times 3.5}{\operatorname{tg} 22.5}$.

4. $2\pi R - 6l = 28$, puesto que $R = l$, tenemos $(2\pi - 6)R = 28$.

Por tanto, $R = \frac{28}{2\pi - 6}$.

5. $\frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{100} = \frac{\operatorname{sen} 55^\circ}{b} \quad \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{100} = \frac{\operatorname{sen} 80^\circ}{c}$

6. $\frac{\operatorname{sen} 100^\circ}{c} = \frac{\operatorname{sen} 32^\circ}{120}$

5. $\operatorname{sen}(x + 30^\circ) = \operatorname{sen} x \cos 30^\circ + \cos x \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x$.

Por tanto la ecuación se convierte en: $\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \cos x$; $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Luego $x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{y}{x}$; $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{y}{200+x}$;

Luego $y = \frac{200 \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}$.

9. $h = 136,4\text{m}$

10. $d = 100\text{m}$

11. $d = 1687\text{m}$

3 NÚMEROS COMPLEJOS.

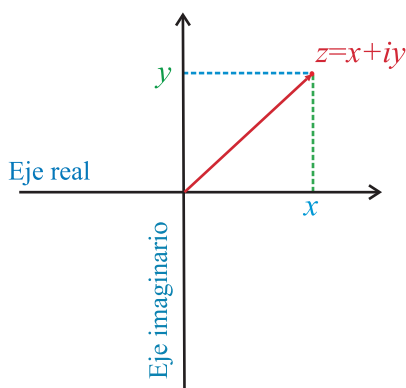
3.1 Introducción.

Si intentamos resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ nos encontramos que no tiene solución ya que ésta debería ser $x = \sqrt{-1}$ y, como sabemos, la raíz cuadrada de un número negativo no existe en \mathbb{R} , conjunto de los números reales. Denotemos $\sqrt{-1}$ por i y definamos un *número complejo* como una expresión de la forma $x + iy$, donde x e y son números reales. Dado un número complejo $z = x + iy$, a x e y se les denomina *parte real* y *parte imaginaria* de z respectivamente y se denotan por

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{e} \quad y = \operatorname{Im} z.$$

En caso de que $z = x + i0$ escribiremos $z = x$ y diremos que z es *real*. Por otro lado, si $z = 0 + iy$, escribiremos $z = iy$ y le llamaremos *imaginario puro*. En particular $0 = 0 + i0$ e $i = 0 + i1$. El conjunto de todos los números complejos se denota por \mathbb{C} y éste contiene al conjunto \mathbb{R} de los números reales que podemos identificar con el conjunto de los números complejos cuya parte imaginaria es 0, es decir $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$. El conjunto \mathbb{C} se puede representar gráficamente en el plano real (\mathbb{R}^2) sin más que asociar el número complejo $z = x + iy$ con el par o punto (x, y) de \mathbb{R}^2 . Este punto se conoce como *afijo* de z . La forma de expresar z como $a + ib$ se conoce como *expresión binómica* de un número complejo.

EL PLANO COMPLEJO



3.2 Operaciones algebraicas.

Para sumar o restar dos números complejos hemos de sumar o restar sus respectivas partes reales e imaginarias:

$$(x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b)$$

$$(x + iy) - (a + ib) = (x - a) + i(y - b).$$

La multiplicación viene definida por la regla:

$$(x + iy)(a + ib) = (xa - yb) + i(xb + ya).$$

Esta regla parece complicada y difícil de recordar, pero si tenemos en cuenta que

$$i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1 + i0 = -1, \quad (1)$$

y multiplicamos $(x + iy)(a + ib)$ como dos polinomios en i , obtenemos dicha regla:

$$(x + iy)(a + ib) = xa + x(ib) + (iy)a + (iy)(ib) = xa + ixb + iya + i^2yb = (xa - yb) + i(xb + ya).$$

Notemos que (??) nos dice que i es una solución de $x^2 + 1 = 0$.

La suma y la multiplicación de números complejos verifican las mismas propiedades que las de los números reales:

1. Asociativa: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$; $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$.
2. Conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1z_2 = z_2z_1$.
3. Elementos neutros: $z + 0 = 0 + z = z$; $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$.
4. Distributiva: $z_1(z_2 + z_3) = (z_1z_2) + (z_1z_3)$.
5. $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

3.3 Conjunción y módulo.

Dado un número complejo $z = x + iy$, llamamos *conjugado* de z al complejo que resulta al cambiar de signo la parte imaginaria y lo denotaremos por \bar{z} . Así $\bar{z} = x - iy$. Se puede observar que:

$$\bar{\bar{z}} = z \text{ si, y solamente si, } z \in \mathbb{R}$$

y

$$\bar{\bar{z}} = -z \text{ si, y solamente si, } z = iy.$$

Además, con la definición que hemos dado del producto de dos números complejos se tiene

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2,$$

lo que implica que $z\bar{z}$ es un número real positivo y $\sqrt{z\bar{z}}$ estaría siempre bien definida. A este valor se le llama *módulo* de z y se denota por $|z|$, esto es,

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

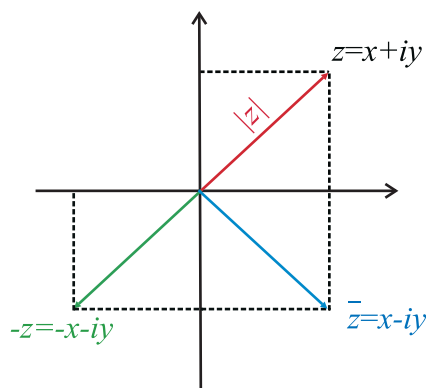
El hecho de que $z\bar{z}$ sea un número real nos permite definir el inverso de un complejo $z = a+ib \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2},$$

y consiguientemente la división de números complejos vendría dada por

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}.$$

MÓDULO, CONJUGADO Y OPUESTO



Propiedades del módulo y conjugación respecto de las operaciones:

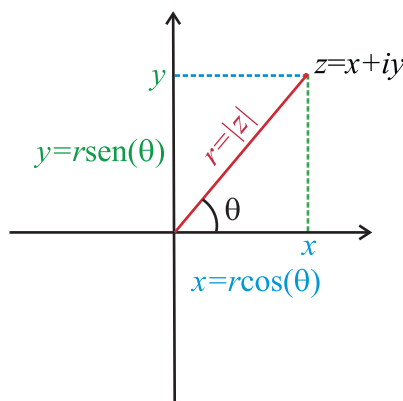
1. $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$.
2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$.
4. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
5. $|z| = |\bar{z}|$.
6. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$.

3.4 Forma trigonométrica.

Recordemos que un número complejo $z = x + iy$ puede ser representado como un par (x, y) y como tal constituye un punto del plano, lo que permite asociarle un vector con punto inicial en $(0, 0)$ y final en (x, y) . Podemos entonces determinar el complejo z dando el módulo de dicho vector, que coincide con el módulo de z definido anteriormente, y el ángulo que forma con el eje real, que se denomina argumento de z . En otras palabras, lo podemos expresar en coordenadas

polares:

FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO



Observemos que si nos dicen que un número complejo z tiene por módulo r y argumento θ , entonces (como indica la figura) su parte real será $x = r \cos \theta$ y su parte imaginaria será $y = r \operatorname{sen} \theta$. Podemos expresar z como

$$z = x + iy = r \cos \theta + i r \operatorname{sen} \theta = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

expresión que se conoce como *forma trigonométrica* de z . Una de las grandes ventajas de esta manera de representar a los números complejos es que facilita la operación de potenciación

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)] \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

Además la multiplicación y división se pueden expresar de forma más sencilla como sigue:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] ; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \quad (z_2 \neq 0).$$

Por otro lado, si nos dan un complejo z en forma binómica $z = x + iy$, tenemos que su módulo es $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y su argumento será un ángulo θ tal que $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$. Podemos entonces expresar z de una forma abreviada por $z = r_\theta$, expresión que se conoce como *forma polar*:

$$z = r_\theta = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \quad (3)$$

Es importante observar que el argumento de un complejo no es único ya que si el ángulo θ es un argumento de z y le sumamos un ángulo de amplitud 2π , es decir le damos una vuelta completa, volvemos a caer en el mismo sitio, por lo cual $\theta + 2\pi$ sería también un posible valor del argumento de z . Lo mismo sucede si damos k vueltas y por tanto $\theta + 2k\pi$ será también otro valor del argumento de z .

La expresión en forma polar nos permite introducir la radicación de los números complejos de forma más o menos sencilla. La $\sqrt[n]{z}$ será cualquier complejo ω tal que $\omega^n = z$. Así, expresando

ambos números en forma polar $\omega = \rho_\alpha$ y $z = r_\theta$, y recordando que según (??) y (??) $(\rho_\alpha)^n = (\rho^n)_{n\alpha}$, obtenemos que

$$\rho_{n\alpha}^n = r_\theta \quad \text{si, y solamente si, } \rho = \sqrt[n]{r} \text{ y } \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

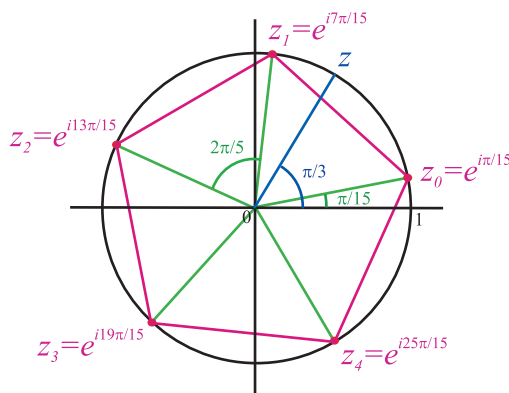
Luego un complejo $z = r_\theta$ tiene n raíces n -ésimas $\{z_k\}_{k=0}^{n-1}$ que podemos expresar como:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

A modo de ejemplo, observemos en el siguiente gráfico, cómo se representan en el plano las cinco raíces quintas de $z = \cos(\frac{\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})$. Notamos que todas tienen el mismo módulo y se distribuyen de manera que forman un pentágono regular (en el caso de raíces n -ésimas formarían un polígono regular de n lados).

RAÍCES N-ÉSIMAS DE UN NÚMERO COMPLEJO

Raíces quintas de $z = \cos(\pi/3) + i \operatorname{sen}(\pi/3)$



3.5 Ejercicios

1. Calcula las raíces de las siguientes ecuaciones:

$$a) x^2 + x + 1 = 0 ; \quad b) x^2 + 2x + 5 = 0.$$

2. Efectúa las siguientes operaciones entre números complejos:

$$a) (3 + 5i) + (4 - 3i) ; \quad b) (5 + 3i) - (6 - 4i) ;$$

$$c) (6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i); \quad d) (2 - i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i).$$

3. Multiplica:

$$\begin{aligned} a) (3+i)(4-2i); \quad & b) (2+i)(5-6i); \\ c) (-i+1)(3-2i)(1+3i); \quad & d) 5(2-4i)(1+3i)i. \end{aligned}$$

4. Efectúa las siguientes divisiones de números complejos:

$$a) \frac{2+4i}{4-2i}; \quad b) \frac{1-4i}{3+i}; \quad c) \frac{4-4i}{-3+5i}.$$

5. Calcula las potencias:

$$a) (2-3i)^2; \quad b) (3-i)^3; \quad c) i^{123}; \quad d) (2-4i)^4.$$

6. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

$$a) 6-3(5+\frac{2}{5}i); \quad b) \frac{3i(-4i+2)}{-2+3i}; \quad c) \frac{(-3i)^2(1-2i)}{2+2i}; \quad d) \frac{(2-3i)(1+6i)}{1+5i}.$$

7. Calcula i^{17} , i^9 , i^{10} , i^{25} , i^{31} .

8. ¿Cuánto debe valer x para que el número $(2+xi)^2$ sea imaginario puro?

9. Calcula $(1+i)^4$, $(1-i)^4$, $(-1+i)^4$ y $(-1-i)^4$.

10. Resuelve las siguientes ecuaciones en el campo complejo:

$$\begin{aligned} a) (5+i)z &= 3-7i; \quad b) \frac{z}{3+4i} = 3-5i; \\ c) \frac{z}{3+2i} + \frac{2z-i}{4-2i} &= 3; \quad d) \frac{z}{-z} + \frac{2z-3i}{2-i} = 6-3i. \end{aligned}$$

11. Representa gráficamente los afijos de todos los números complejos z tales que al sumarlos con su respectivo conjugado, se obtenga 1.

12. Representa gráficamente los números complejos z tales $z - \bar{z} = i$. ¿Qué debe verificar z ?

13. Representa gráficamente el número complejo $4-3i$. Aplícale un giro de 90 grados alrededor del origen. ¿Cuál es el nuevo número? Multiplica ahora $4-3i$ por i .

14. Escribe en forma trigonométrica y polar los números:

$$a) 1+3i; \quad b) -1+i; \quad c) 5-12i.$$

15. Escribe en la forma binómica y trigonométrica los números:

$$a) 5\sqrt[6]{6}; \quad b) 2_{135^\circ}; \quad c) 3_{240^\circ}.$$

16. Calcula tres argumentos del número $1+i$.

17. Expresa en forma binómica y en forma polar el conjugado y el opuesto de $5\frac{\pi}{4}$.

18. Calcula sin desarrollar los binomios y expresar el resultado en forma polar:

$$a) (1+i)^{10}; \quad b) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8; \quad c) (1-i)^6.$$

19. Utiliza la fórmula de Moivre, $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$ ($n \in \mathbb{N}$), para deducir las fórmulas de las razones trigonométricas del ángulo doble.

20. Calcula las raíces sextas de la unidad.

21. Resuelve la ecuación $x^3 + 27 = 0$. Representa gráficamente todas sus soluciones.

22. Calcula $\sqrt[3]{-i}$; $\sqrt[4]{1+i}$; $\sqrt[3]{\frac{-1+i}{1+\sqrt{3}i}}$.

23. Halla las coordenadas de los vértices de un cuadrado (de centro el origen) sabiendo que uno de estos es el afijo del número complejo $1\frac{\pi}{2}$.

24. Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular, de centro el origen, sabiendo que uno de estos es el afijo del número complejo 3π .

25. Representa gráficamente las igualdades siguientes. ¿Qué figura se determina en cada caso?

$$a) |z| = 2; \quad b) |z - (1+i)| = 5.$$

26. Escribe todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro $(1, 1)$ y radio 3.

3.6 Soluciones

1. a) $x_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, b) $-1 \pm 2i$

2. a) $7 + 2i$, b) $-1 + 7i$, c) $18 - 18i$, d) $-3i$

3. a) $14 - 2i$, b) $16 - 7i$, c) $16 - 2i$, d) $-10 + 70i$

4. a) i , b) $-\frac{1}{10} - \frac{13}{10}i$, c) $\frac{-16}{17} - \frac{4}{17}i$

5. a) $-5 - 12i$, b) $18 - 26i$, c) $-i$, d) $-112 + 384i$

6. a) $-9 - \frac{6}{5}i$, b) $\frac{9}{13} - \frac{6}{13}i$, c) $-\frac{9}{4} + \frac{9}{4}i$, d) $\frac{5}{2} - \frac{7}{2}i$

7. $i, i, -1, i, -i$

8. $x = \pm 2$

9. 4

10. a) $\frac{4}{13} - \frac{9}{13}i$, b) $29 - 3i$, c) $\frac{239}{52} - \frac{1}{52}i$, d) $\frac{11}{2} - 5i$
11. Recta $x = \frac{1}{2}$
12. Recta $y = \frac{1}{2}$
13. $3 + 4i$
14. a) $\sqrt{10}_{1'25}$, $\sqrt{10}(\cos(1'25) + i\text{sen}(1'25))$; b) $\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}$, $\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\text{sen}(\frac{3\pi}{4}))$; c) $13_{-1'17}$, $13(\cos(-1'17) + i\text{sen}(-1'17))$
15. a) $5\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$, $5(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\text{sen}(\frac{\pi}{6}))$; b) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\text{sen}(\frac{3\pi}{4}))$; c) $-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $3(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\text{sen}(\frac{4\pi}{3}))$.
16. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$
17. Opuesto: forma binómica $-\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$, forma polar $5_{\frac{5\pi}{4}}$
Conjugado: forma binómica $\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$, forma polar $5_{-\frac{\pi}{4}}$
18. a) $32_{\frac{\pi}{2}}$, b) $1_{\frac{4\pi}{3}}$, c) $8_{-\frac{\pi}{2}}$
19. $\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$, $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta)$
20. 1 ; $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
21. $x = 3$; $x = -\frac{3}{2} + 3\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $x = -\frac{3}{2} - 3\frac{\sqrt{3}}{2}i$
22. a) i , $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; b) $\sqrt[4]{2}_{\frac{\pi}{16}}$, $\sqrt[4]{2}_{\frac{9\pi}{16}}$, $\sqrt[4]{2}_{\frac{17\pi}{16}}$, $\sqrt[4]{2}_{\frac{25\pi}{16}}$
23. i , -1 , $-i$, i
24. -3 , $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 3 , $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
25. a) Circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2, b) circunferencia centrada en $(1,1)$ y radio 5
26. $(1 + 3\cos(\theta)) + i(1 + 3\text{sen}(\theta))$, $0 \leq \theta < 2\pi$

4 FUNCIONES ELEMENTALES.

4.1 Concepto de función y propiedades básicas.

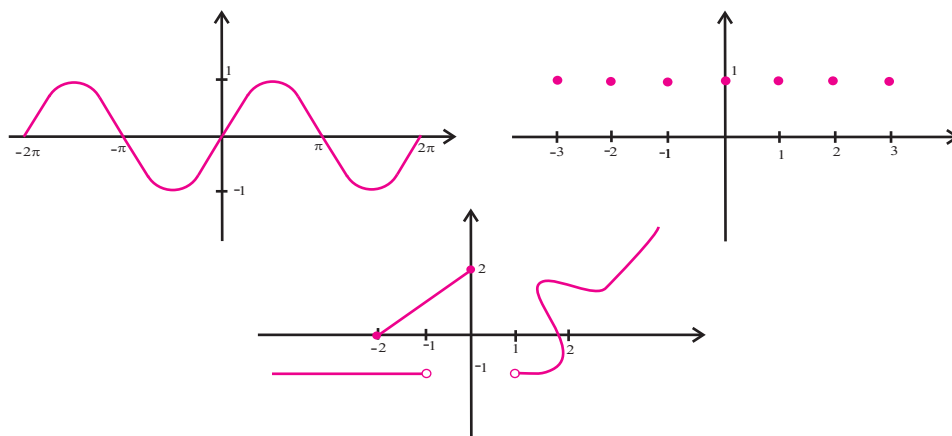
Decimos que hay una *correspondencia* entre dos conjuntos cuando existen unas determinadas reglas que permiten asociar elementos del primer conjunto (*conjunto inicial*) con elementos del segundo conjunto (*conjunto final*).

Una *aplicación* es una correspondencia que asigna a cada elemento del conjunto inicial un único elemento del conjunto final.

Cuando los conjuntos inicial y final son subconjuntos de \mathbb{R} , hablamos de *funciones reales de variable real*. Si f es una función de $A \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R} , llamamos *dominio* de la función al conjunto de los elementos de A cuya imagen pertenece a \mathbb{R} y *recorrido* o *imagen* de la función al conjunto de todos los valores que toma la función.

Ejercicios

- (a) Si a cada persona del mundo se le asigna su madre biológica, ¿es aplicación?
(b) Si a cada mujer del mundo se le asignan sus hijos, ¿es aplicación? ¿Por qué?
- Indicar cuáles de las siguientes gráficas representan funciones y en tal caso, hallar el dominio y recorrido.



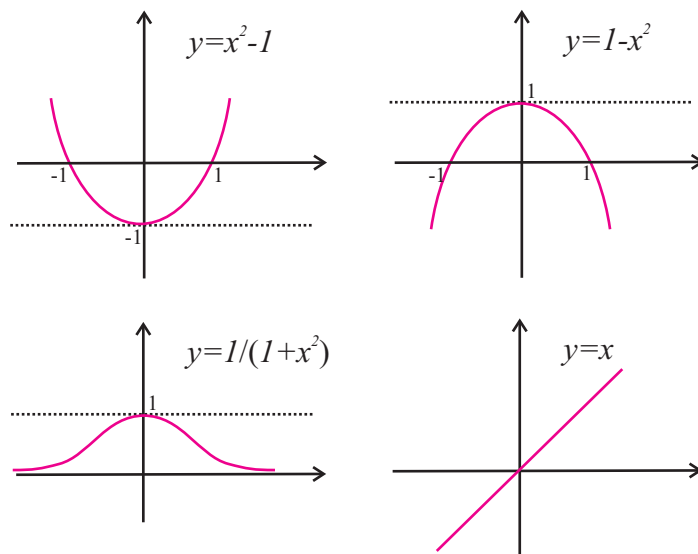
Propiedades de las funciones

Acotación. Una función f está *acotada superiormente* si sus imágenes no superan cierto valor, esto es, cuando existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, para cualquier x del dominio de f . Se dice que M es una cota superior.

De la misma forma, la función f está *acotada inferiormente* si sus imágenes superan siempre un cierto número, es decir, si existe $m \in \mathbb{R}$ de tal forma que $f(x) \geq m$, para todo x en el dominio de f .

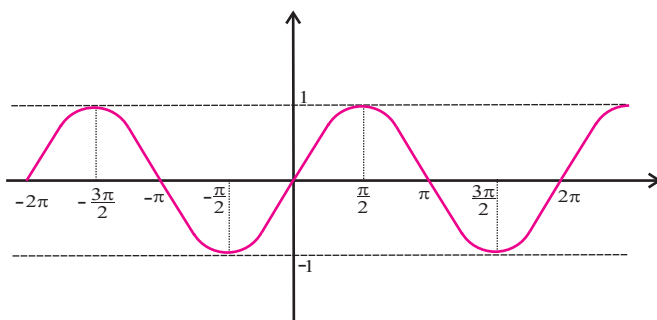
Decimos que una función f está *acotada* si lo está superior e inferiormente. Esto equivale a que existe $M \geq 0$ de tal forma que $|f(x)| \leq M$, para todo x del dominio de la función.

Ejemplos. La función $f(x) = x^2 - 1$ sólo está acotada inferiormente ($f(x) \geq -1$) mientras que la función $g(x) = 1 - x^2$ lo está sólo superiormente ($g(x) \leq 1$). La función $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ está acotada ($|h(x)| \leq 1$) y la función $l(x) = x$ no está acotada ni superior ni inferiormente.



Periodicidad. Una función es *periódica de periodo* T ($T \neq 0$) cuando para todo x del dominio, se tiene que $x + T$ está en el dominio y $f(x + T) = f(x)$. Se llama *periodo fundamental* de f al periodo más pequeño de f .

Ejemplo La función $f(x) = \sin x$ es una función periódica de periodo fundamental 2π .

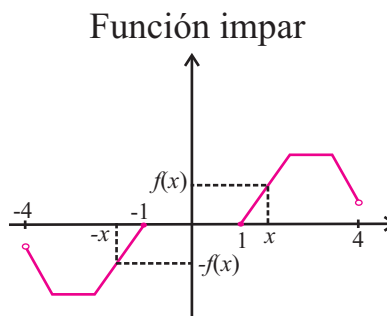
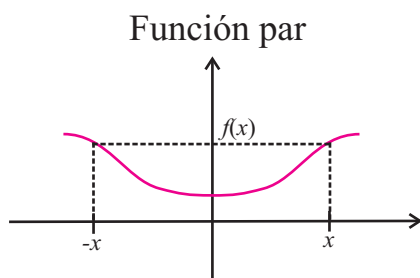


Paridad. Se dice que una función f es *par* cuando, para cada x de su dominio, $-x$ es también del dominio y se satisface $f(-x) = f(x)$. En este caso, la gráfica de la función es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Decimos que una función f es *impar* cuando, para cada x de su dominio, $-x$ pertenece también al dominio y se verifica $f(-x) = -f(x)$. En este caso, la gráfica de la función es

simétrica respecto del origen de coordenadas.

Ejemplos



Existen funciones que no son pares ni impares, como $f(x) = x^2 + x$.

Crecimiento y decrecimiento. Sea f una función real de variable real e I un intervalo contenido en su dominio.

f es *creciente en I* si y sólo si para cada par de números x_1, x_2 de I tales que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) \leq f(x_2)$.

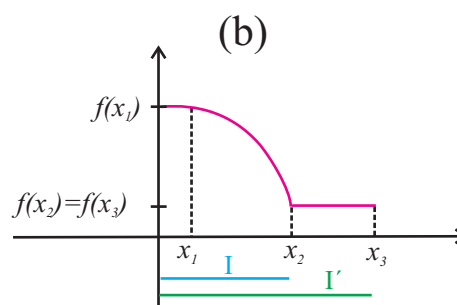
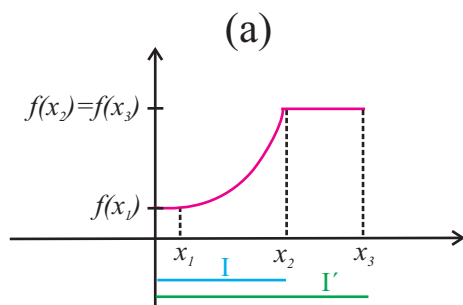
f es *decreciente en I* si y sólo si para cada par de números x_1, x_2 de I tales que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) \geq f(x_2)$.

f es *estrictamente creciente en I* si y sólo si para cada par de números x_1, x_2 de I tales que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) < f(x_2)$.

f es *estrictamente decreciente en I* si y sólo si para cada par de números x_1, x_2 de I tales que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) > f(x_2)$.

Decimos que f es *monótona en I* cuando es creciente, decreciente o constante en el intervalo.

Ejemplos. La función en (a) es creciente en el intervalo I' y es estrictamente creciente en I . En la figura (b) podemos observar que la función es decreciente en I' y estrictamente decreciente en el intervalo I .



Máximos y mínimos. Se dice que un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de la función f es un *máximo absoluto* de f cuando $f(x_0)$ es el mayor valor que toma f en su dominio, esto es, $f(x_0) \geq f(x)$, cuando x pertenece al dominio.

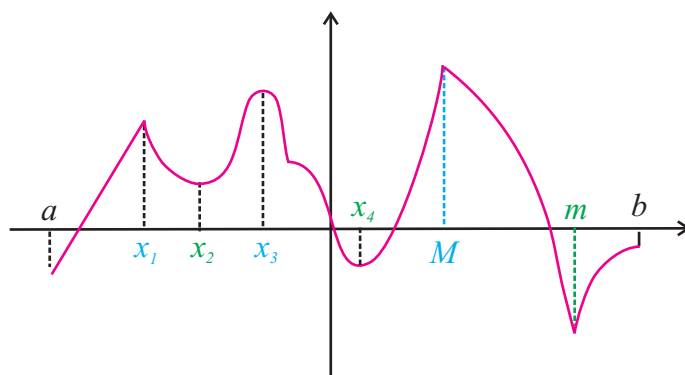
Análogamente, decimos que un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de la función f es un *mínimo*

absoluto de f cuando $f(x_0)$ es el menor valor que toma f en su dominio, es decir, $f(x_0) \leq f(x)$, para cada x del dominio.

Un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de la función f es un *máximo relativo* si $f(x_0)$ es el mayor valor que toma f en un entorno del punto x_0 .

Un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de la función f es un *mínimo relativo* si $f(x_0)$ es el menor valor que toma f en un entorno de x_0 .

Ejemplo.



En la gráfica de la función f se observa que el dominio de f es $[a, b]$. El punto $(M, f(M))$ es el máximo absoluto, mientras que los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_3, f(x_3))$ son máximos relativos. Asimismo, el punto $(m, f(m))$ es el mínimo absoluto, mientras que los puntos $(x_2, f(x_2))$ y $(x_4, f(x_4))$ son mínimos relativos.

Ejercicios

1. Estudia la acotación de las siguientes funciones:

(a) $y = 2x - 1$ (b) $y = \frac{1}{x}$ (c) $y = 2x - x^2$ (d) $y = \frac{1}{2 + x^4}$

2. Consideramos la función $f(x) = x^2$ definida en $[0, 1]$. Extenderla periódicamente a todo \mathbb{R} y trazar su gráfica.

3. Estudiar la paridad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = -x - 2$, $x \in (-\infty, -2)$.

(b) $f(x) = x^3$, $x \in [-2, 2]$.

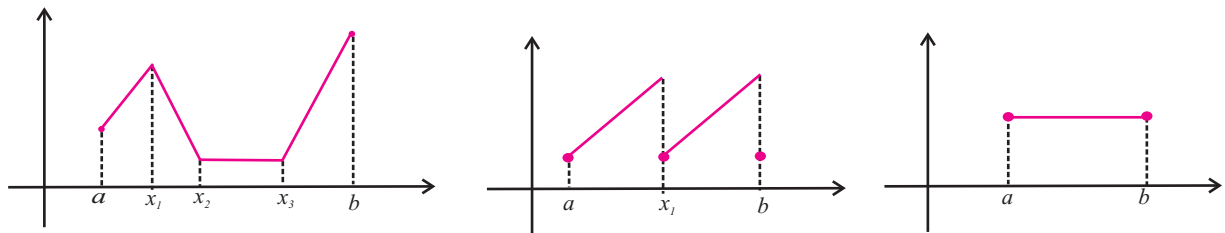
(c) $f(x) = -x^2$, $x \in (2, \infty)$.

(d) $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Sea $f(x) = x^2/2$. Probar que la función es creciente en el intervalo $I = [1, 5]$. ¿Qué sucede en el intervalo $J = [-4, -1]$?

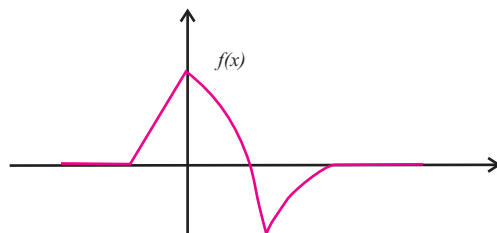
5. ¿Cuáles son los máximos y mínimos absolutos y relativos de las funciones representadas en

las siguientes gráficas?

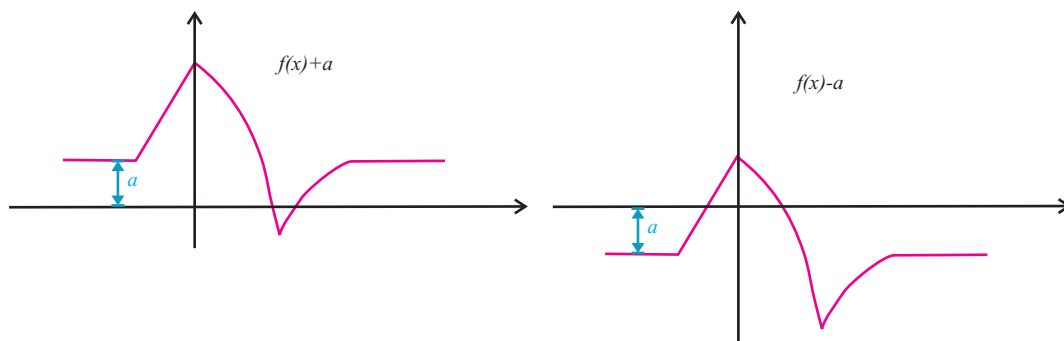


4.2 Transformaciones elementales.

Sea f una función real de variable real. Nuestro objetivo en este apartado es analizar cómo se modifica la gráfica de la función f cuando realizamos ciertos cambios en la misma.

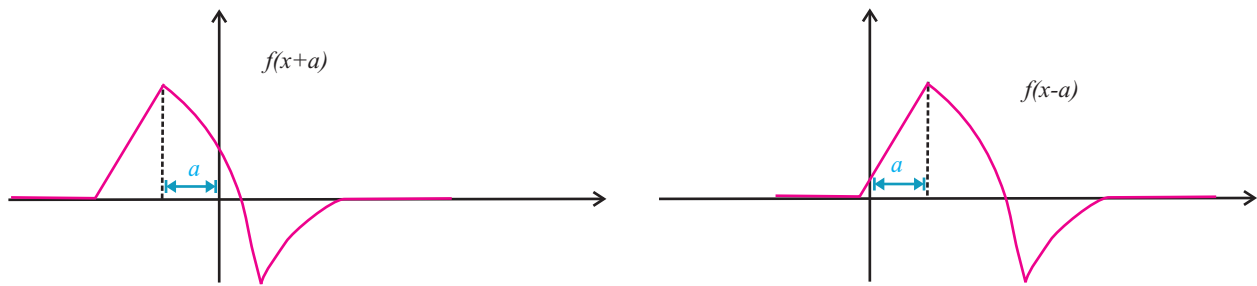


Traslaciones verticales. Sea $a > 0$. Consideramos las funciones $y = f(x) + a$ e $y = f(x) - a$. La gráfica de cada una de estas funciones se obtiene trasladando verticalmente en a unidades la gráfica de la función f , hacia arriba en el primer caso y hacia abajo en el segundo.

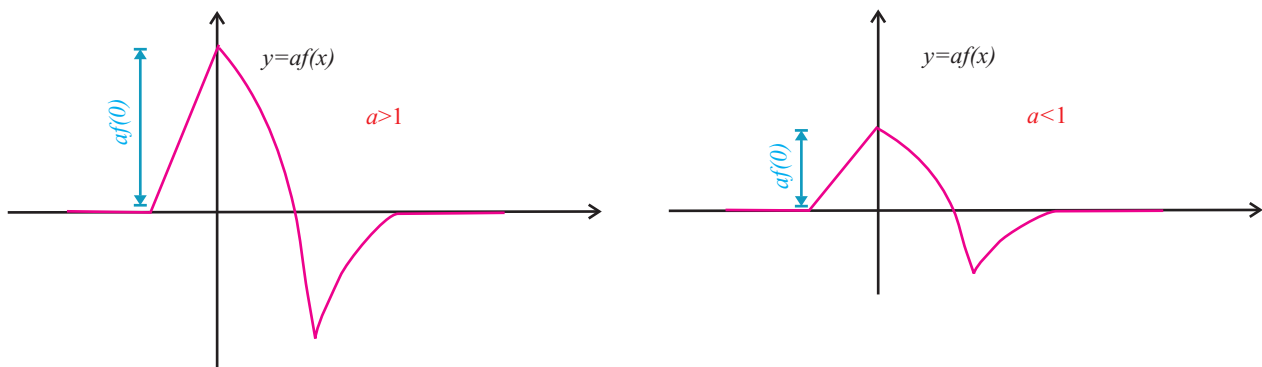


Traslaciones horizontales. Sea $a > 0$. Construimos las funciones $y = f(x + a)$ e $y = f(x - a)$. La gráfica de estas funciones se obtiene por traslación horizontal en a unidades de la gráfica de

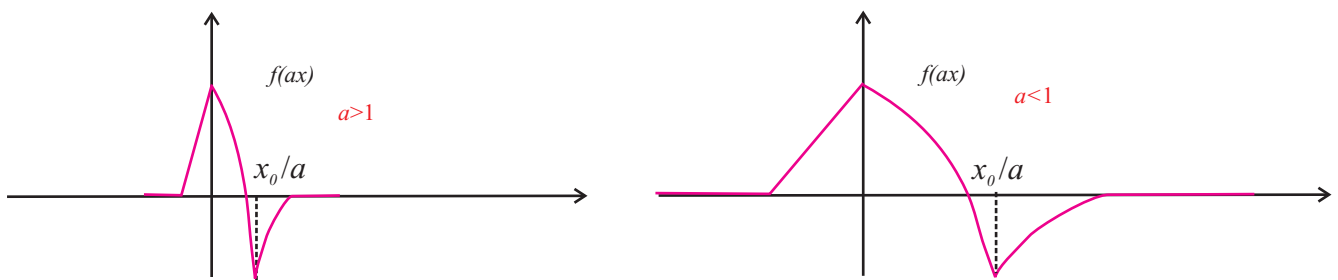
la función f , hacia la izquierda en el primer caso y hacia la derecha en el otro.



Dilataciones y contracciones verticales. Consideramos ahora la función $y = af(x)$, con $a > 0$. La gráfica de esta función es una dilatación vertical (si $a > 1$) o una contracción vertical (si $a \in (0, 1)$) de la gráfica de la función f .



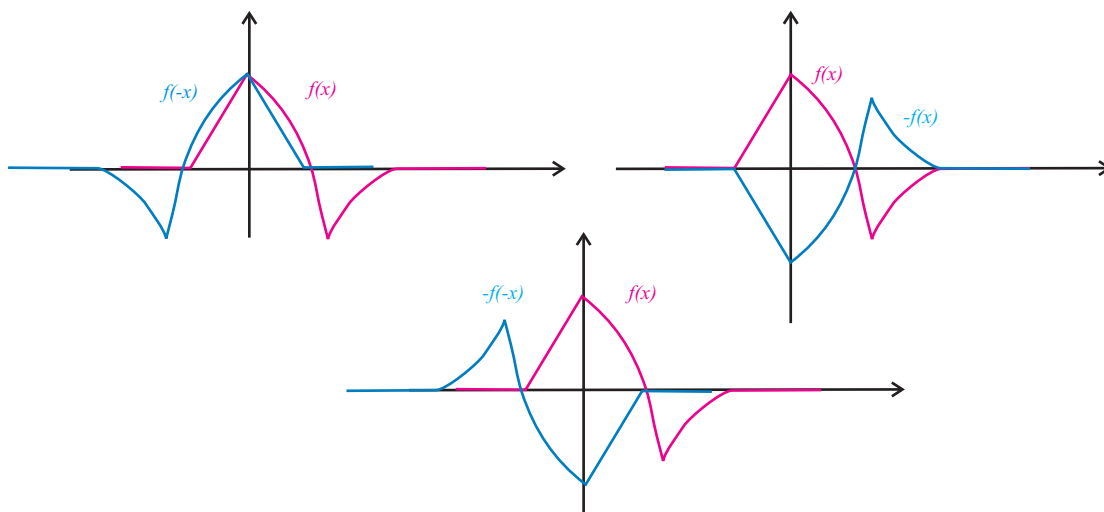
Dilataciones y contracciones horizontales. Tratamos ahora la función $y = f(ax)$, con $a > 0$. En este caso, la dilatación o contracción de la gráfica de la función f se produce horizontalmente, de forma que si $a \in (0, 1)$ se dilata y si $a > 1$ se contrae.



Simetrías.

- Simetría respecto a OY: Las gráficas de las funciones $y = f(x)$ e $y = f(-x)$ son simétricas respecto al eje ordenadas.
- Simetría respecto a OX: Las funciones $y = f(x)$ e $y = -f(x)$ son simétricas respecto al eje de abscisas.
- Simetría origen: Las gráficas de las funciones $y = f(x)$ e $y = -f(-x)$ son simétricas

respecto al origen de coordenadas.



4.3 Funciones elementales

Analizamos ahora las características de algunas funciones básicas.

Funciones polinómicas

Son aquellas que están definidas mediante un polinomio, esto es, son de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

donde los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n son números reales.

Las operaciones usuales, suma, resta y producto de funciones polinómicas son nuevamente funciones polinómicas. Sin embargo, el cociente de funciones polinómicas no es, en general, una función polinómica.

Recordamos brevemente cómo se realizan estas operaciones con algunos ejemplos.

Suma y resta de polinomios. Sean $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6$ y $Q(x) = -3x + 5 + 7x^2$. Para calcular la suma y la resta de P y Q debemos agrupar los monomios semejantes, esto es, aquellos que tienen la misma variable y el mismo grado.

$$P(x) + Q(x) = 4x^3 + (5x^2 + 7x^2) + (-3x) + (-6 + 5) = 4x^3 + 12x^2 - 3x - 1 ;$$

$$P(x) - Q(x) = 4x^3 + (5x^2 - 7x^2) - (-3x) + (-6 - 5) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 11 .$$

Producto de polinomios. El producto de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando cada uno de los distintos términos de uno de ellos por el otro, realizando a continuación la suma de todos los polinomios obtenidos.

Sean $P(x) = -2x^3 + 7x - 5$ y $Q(x) = x^2 + 3$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= (-2x^3 + 7x - 5)(x^2 + 3) = -2x^5 - 6x^3 + 7x^3 + 21x - 5x^2 - 15 \\ &= -2x^5 + x^3 - 5x^2 + 21x - 15. \end{aligned}$$

Cociente de polinomios. Sean dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, tales que el grado de P es mayor o igual que el de Q . Realizar la *división entera* entre P (*dividendo*) y Q (*divisor*) consiste en encontrar dos polinomios $C(x)$ (*cociente*) y $R(x)$ (*resto*), que verifiquen:

$$P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$$

siendo el grado de R menor que el de Q .

Efectuemos la división entera entre $P(x) = 20x^3 - 18x^2 + 4$ y $Q(x) = 4x - 2$.

$$\begin{array}{r}
 20x^3 - 18x^2 \quad + 4 \quad \Big| \quad 4x - 2 \\
 \underline{-20x^3 + 10x^2} \\
 -8x^2 \\
 \underline{+ 8x^2 - 4x} \\
 -4x + 4 \\
 \underline{+ 4x - 2} \\
 2
 \end{array}$$

Hemos seguido los siguientes pasos:

1. Ordenamos los polinomios, dejando huecos cuando falte algún término (en nuestro ejemplo en x).
2. Dividimos $20x^3$ entre $4x$. Multiplicamos el cociente obtenido ($5x^2$) por el divisor y restamos el resultado al dividendo. Obtenemos $-8x^2 + 4$.
3. Dividimos $-8x^2$ entre $4x$. Multiplicamos el cociente ($-2x$) por el divisor y restamos el resultado al dividendo. Obtenemos $-4x + 4$.
4. Dividimos $-4x$ entre $4x$. Multiplicamos el cociente (-1) por el divisor y restamos el resultado al dividendo. Obtenemos 2.
5. Si dividimos 2 entre $4x$ no obtenemos un monomio, por lo que no seguimos. La división es entera de resto 2.

Si queremos dividir un polinomio $P(x)$ entre $Q(x)$ siendo $Q(x)$ un polinomio de la forma $x - a$, entonces podemos usar *la regla de Ruffini*. El resto que se obtiene de este cociente coincide con el valor que toma el polinomio P en a . Cuando el resto de este cociente nos da 0, entonces decimos que a es una *raíz del polinomio* P .

Sea $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5x - 11$. Si dividimos este polinomio por $x - 2$ obtendremos un

polinomio cociente de grado 2, como vemos en el siguiente ejemplo.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x-2 & 4 & -6 & 5 & -11 \\
 \hline
 & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\
 & x^2 & x & a & \text{Resto}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & -6 & 5 & -11 \\
 2 & \downarrow & & & \\
 & 4 & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & -6 & 5 & -11 \\
 2 & \swarrow & 8 & & \\
 & 4 & 2 & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & -6 & 5 & -11 \\
 2 & \swarrow & 8 & 4 & \\
 & 4 & 2 & 9 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & -6 & 5 & -11 \\
 2 & \swarrow & 8 & 4 & 18 \\
 & 4 & 2 & 9 & 7
 \end{array}$$

El proceso que hemos seguido es el que señalamos a continuación.

1. Colocamos los coeficientes de los términos del polinomio $P(x)$.
2. El primer coeficiente del cociente corresponde a x^2 y es igual al primero del dividendo, 4.
3. El segundo coeficiente del cociente corresponde a x y se obtiene multiplicando 2 por 4 y sumando el resultado al segundo coeficiente de $P(x)$ que es -6 . Nos da 2.
4. El tercer coeficiente del cociente, que es el término independiente, se obtiene multiplicando 2 por 2 y sumando el resultado al coeficiente de $P(x)$ que corresponde a x , esto es, 5. Nos da 9.
5. Por último se halla el resto, que se obtiene de forma análoga, multiplicando 2 por 9 y sumando este producto al valor del término independiente de $P(x)$, que es -11 . Se tiene entonces que el resto es 7.

La regla de Ruffini es útil cuando queremos *factorizar un polinomio*, esto es, descomponer el polinomio como producto de polinomios más sencillos.

Veamos con el siguiente ejemplo cuál es el procedimiento a seguir para factorizar un polinomio. Consideramos el polinomio P dado por

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4.$$

1. Confeccionamos la lista de divisores del término independiente, que es 4.

$$\text{divisores de } 4 = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}.$$

2. Probamos, haciendo uso de la regla de Ruffini, si los divisores obtenidos en el paso anterior

son raíces del polinomio P .

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & & 1 & -2 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -4 & 0 \end{array}$$

En este caso 1 sí es raíz.

3. Una vez localizada una raíz, debemos comprobar si ese número vuelve a ser raíz, comprobando con el polinomio cociente obtenido.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -3 \end{array}$$

Como vemos, 1 no vuelve a ser raíz.

4. Pasamos a comprobar el siguiente candidato a raíz, 2.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & & 2 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

El 2 sí es raíz.

5. Seguimos este proceso hasta que el polinomio cociente tenga grado 2, como es en este ejemplo. Para seguir buscando raíces en este polinomio de grado 2 la mejor opción es utilizar la fórmula de la ecuación de segundo grado.

$$x^2 + 2 = 0 \implies x^2 = -2. \text{ No tiene soluciones.}$$

Ya que este polinomio de grado 2 no tiene raíces, el proceso de factorización termina.

6. Escribimos la factorización de $P(x)$: $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 2)$.

NOTA. Cuando un polinomio carece de término independiente, el primer paso que se da para efectuar la factorización es sacar factor común la mayor potencia de x que sea posible.

$$x^5 - x^3 = x^3(x^2 - 1) = x^3(x + 1)(x - 1).$$

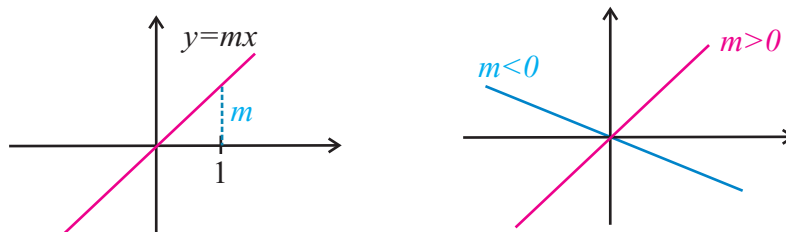
Ejercicios.

- (a) Calcular el polinomio $P(x)$ si $P(x) + (2x^3 - 4x - 1/2) = 3/2 - 7x$.
 (b) Saca factor común en los polinomios $P(x) = 10x^5 - 5x^3 + 35x^2$ y $Q(x) = 4x^3 - 6x^2 + 12x$.
 (c) Calcula la división entre $P(x) = -2x^4 + 3x^2 - 5$ y $Q(x) = x^2 + 2$.
- Calcula m para que la división de $P(x) = x^3 - 4x^2 - x + m$ entre $x + 2$ sea exacta.
- Factoriza el polinomio $P(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x$.

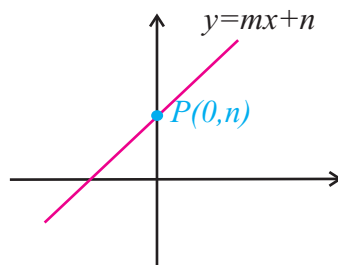
Analizamos ahora las características más importantes en tres tipos particulares de funciones polinómicas.

(A) Función lineal y función afín. Las funciones cuya representación gráfica es una recta que pasa por el origen, se denominan *funciones lineales*.

Su fórmula siempre es de la forma $y = mx$. El valor m es la *pendiente* de la recta y nos indica la mayor o menor inclinación de la recta. Si la pendiente es positiva, la recta es creciente y si es negativa, entonces la función lineal es decreciente.



Las funciones cuya representación gráfica es una recta que no pasa por el origen se denominan *funciones afines*. Su fórmula es de la forma $y = mx + n$, siendo m la *pendiente* de la recta y n la *ordenada en el origen*.



Dos funciones son paralelas cuando tienen la misma pendiente. Las rectas de la forma $y = a$ son rectas horizontales (de pendiente 0), mientras que las rectas de la forma $x = a$, son rectas verticales (y por tanto, no son funciones).

Ejercicios

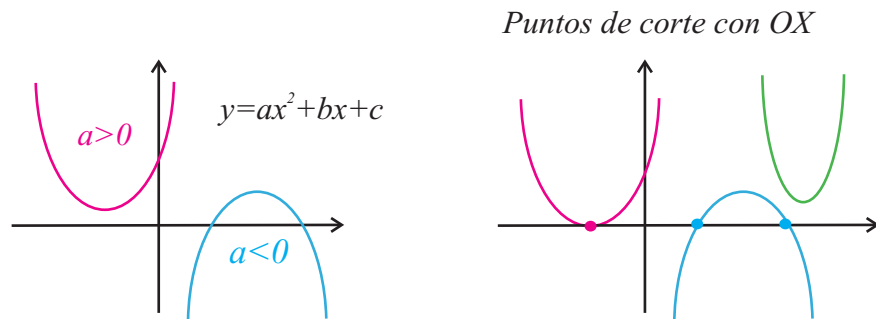
- Encuentra la fórmula de la función asociada a los siguientes fenómenos:
 - Cantidad de gasolina en el depósito de un coche de 60 litros de capacidad, inicialmente lleno, que consume 10 litros cada 100 km, en función de la distancia recorrida en un trayecto de 400km.
 - Longitud de una circunferencia cuando su radio crece desde 1 cm hasta 5 cm.
- Representa gráficamente las funciones obtenidas en el ejercicio anterior.

(B) Función cuadrática. Una función cuadrática es una función polinómica que viene dada por un polinomio de grado 2. Dada una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, su gráfica es una parábola con las siguientes características:

- Si $a > 0$ las ramas van hacia arriba y si $a < 0$ hacia abajo.
- Las abscisas de los puntos de corte de la parábola con el eje OX son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Por tanto, el número máximo de puntos de corte con el eje OX es

de 2, pudiendo darse el caso de que exista sólo 1 o incluso, ninguno. Con el eje OY la parábola siempre se corta en el punto $P = (0, c)$.

- En el vértice la parábola presenta un máximo o mínimo, según sea a positivo o negativo. La abscisa del vértice viene dada por $x = -\frac{b}{2a}$.



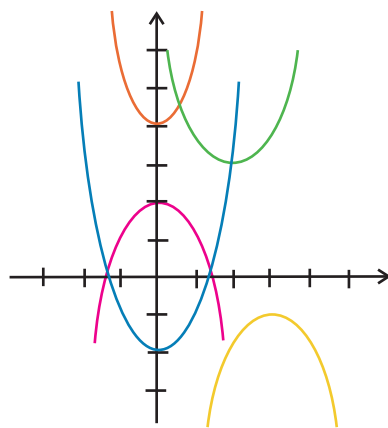
Ejercicios

1. Representa las parábolas siguientes sobre un mismo eje de coordenadas.

(a) $y = 3x^2$ (b) $y = -3x^2$ (c) $y = \frac{x^2}{4}$ (d) $y = -\frac{x^2}{4}$

2. Relaciona las gráficas de la figura con las funciones cuadráticas que se proporcionan. Escribe la ecuación de la gráfica que sobra.

(a) $y = 2x^2 - 2$ (b) $y = -2x^2 + 2$ (c) $y = x^2 - 4x + 7$ (d) $y = -2x^2 + 12x - 19$



Funciones racionales

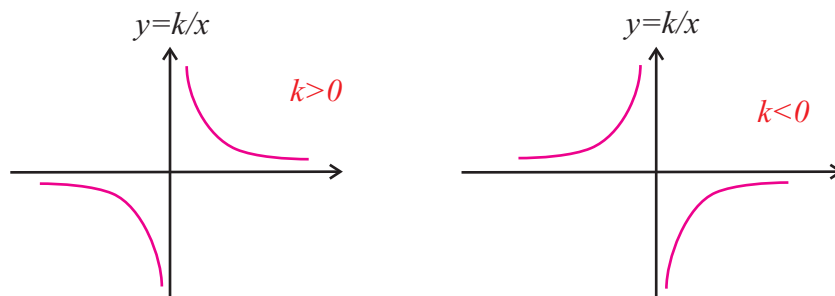
Son funciones de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. El dominio de estas funciones es el conjunto de números reales para los que $Q(x) \neq 0$.

En particular la *función de proporcionalidad inversa* $f(x) = \frac{k}{x}$, (donde k es una constante no nula) es una función racional. Esta función está definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y su gráfica es simétrica

respecto del origen y recibe el nombre de *hipérbola equilátera*.



Ejercicios

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones racionales.

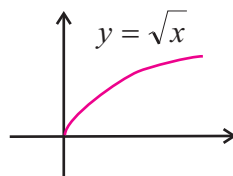
(a) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-x}$. (b) $f(x) = \frac{x}{16-x^2}$.

2. Representa gráficamente las siguientes funciones racionales.

(a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$. (b) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$.

La función raíz cuadrada

La función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$ asigna a cada número real no negativo su raíz cuadrada positiva. Su dominio es por tanto el conjunto $[0, \infty)$. Es una función estrictamente creciente y su representación gráfica tiene la forma indicada.



Ejercicios

1. Utiliza las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + x + 1$ y $g(x) = x^2 - 5x + 6$ para calcular el dominio de las funciones $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ y $l(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

2. Representa gráficamente las funciones siguientes.

(a) $f(x) = \sqrt{2x}$. (b) $f(x) = \sqrt{2x} - 1$.

Función exponencial. Es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde a es un número positivo distinto de 1.

La condición sobre la base a hace posible que el exponente pueda tomar cualquier valor. Por tanto, el dominio de la función es \mathbb{R} . Por otro lado, los valores que toma la función son siempre positivos, siendo su recorrido $(0, +\infty)$. La función exponencial es una función continua y acotada inferiormente.

Si $f(x) = a^x$ es una función exponencial, entonces verifica las siguientes propiedades:

- $f(0) = 1$, esto es, $a^0 = 1$.
- $f(1) = a^1 = a$, esto es, $a^1 = a$.

- $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, es decir, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
- $f(x+y) = f(x)f(y)$, es decir, $a^{x+y} = a^x a^y$.
- $(a^x)^y = a^{xy}$.

Una función exponencial especialmente importante es $y = e^x$, cuya base es el número e que se define como

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

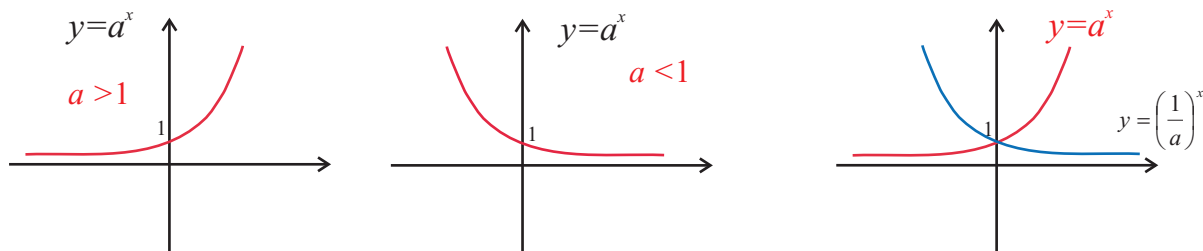
y cuyo valor es $e = 2.718281\dots$

La gráfica de una función exponencial viene condicionada fundamentalmente por el valor de la base a , de tal forma que:

- si $a \in (0, 1)$ la función es estrictamente decreciente, tiende a infinito cuando x tiende a $-\infty$ y converge a 0 cuando x toma valores grandes. Además se tiene que cuanto más pequeño es el valor de la base a , más rápido converge a 0.

- Si $a > 1$ entonces la función es estrictamente creciente, converge a 0 cuando x tiende a $-\infty$ y crece a infinito cuando $x \rightarrow +\infty$. En este caso, cuanto mayor sea la base a , más rápido es el crecimiento de la función.

Se observa también que las gráficas de las funciones $y = a^x$ e $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto al eje OY .



Ejercicios

1. Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales.

(a) $y = 675^x$ (b) $y = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ (c) $y = 0.01^x$ (d) $y = 2.01^x$

2. Indica cuáles de las anteriores funciones son crecientes o decrecientes.

Función logarítmica. La función $y = \log_a x$, siendo a un número positivo distinto de 1, es la función inversa de la función exponencial $y = a^x$, esto es,

$$y = \log_a x, \text{ si y sólo si } x = a^y.$$

$$\text{Así } \log_2 8 = 3, \log_{1/2} 4 = -2, \log_7 7 = 1 \text{ y } \log_5 1 = 0.$$

Como función inversa de la exponencial, se concluye que el dominio de la función logarítmica es $(0, +\infty)$ y su recorrido \mathbb{R} . Queda claro entonces que no tienen significado expresiones como

$\log_2(-3)$, $\log_2 0$, $\log_{-2} 3$, $\log_1 8$.

Las propiedades de la función $f(x) = \log_a x$ se obtienen de las propiedades de la correspondiente función exponencial.

- $f(1) = 0$, esto es, $\log_a 1 = 0$.
- $f(a) = 1$, es decir, $\log_a a = 1$
- $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, o lo que es lo mismo, $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$.
- $f(xy) = f(x) + f(y)$, esto es, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
- $f(x^y) = yf(x)$, esto es, $\log_a(x^y) = y \log_a x$.

Las bases más usadas son $a = 10$ y $a = e$. Si no se indica la base, se entiende que es $a = 10$ y se trata del *logaritmo decimal*; por ejemplo $\log 100 = 2$. Para el caso $a = e$, se habla de *logaritmo neperiano* o *logaritmo natural* y se escribe de cualquiera de las siguientes maneras:

$$\log_e x = \ln x = L x \quad .$$

La siguiente igualdad nos permite pasar de logaritmos en una base a los de otra:

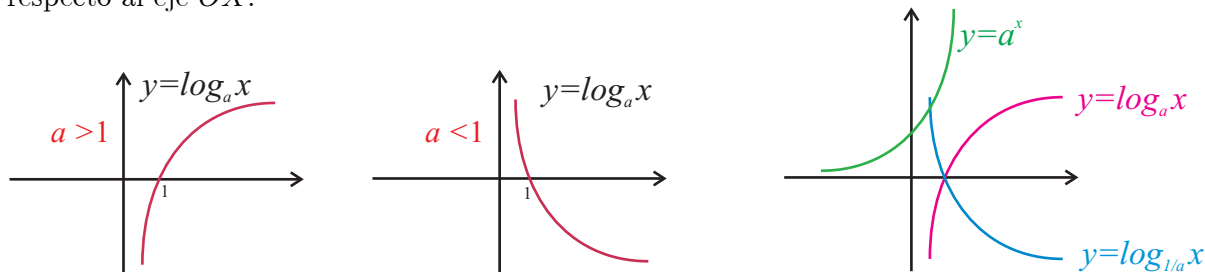
$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad .$$

Teniendo presente que las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$, podemos obtener la gráfica de la función logarítmica a partir de la correspondiente exponencial. De esta forma, también en este caso la base a condiciona la forma de la gráfica.

- Si $0 < a < 1$ la función f es estrictamente decreciente, tiende a $+\infty$ cuando x converge a 0 (por la derecha) y tiende a $-\infty$ cuando x toma valores muy grandes.

- Si $a > 1$ entonces es estrictamente creciente, y si $x \rightarrow 0^+$, la función tiende a $-\infty$ y cuando $x \rightarrow +\infty$, la función tiende a $+\infty$.

Se tiene, además, que las gráficas de las funciones $y = \log_a x$ e $y = \log_{1/a} x$ son simétricas respecto al eje OX .



Ejercicios

1. Representa la función $y = \log_{1/10} x$ y a partir de dicha representación responde a las siguientes preguntas:

- (a) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función?
- (b) ¿Pasa por el punto (1,0)? ¿Y por el (10,1)?
- (c) ¿Es acotada inferiormente? ¿Y superiormente?

(d) ¿Qué ocurre cuando $x \rightarrow 0^+$? ¿Y cuando $x \rightarrow +\infty$?

2. Representa gráficamente las funciones $y = \log_3 x$ e $y = \log_9 x$. Analiza las gráficas y contesta:

(a) ¿En el intervalo $(1, +\infty)$ se verifica $\log_3 x > \log_9 x$?

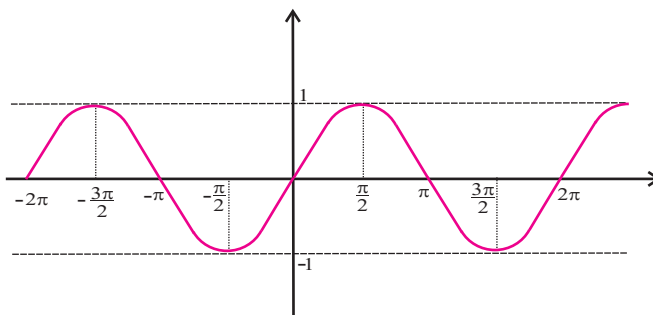
(b) ¿Es cierta la expresión $\log_3 x = 2 \log_9 x$?

Funciones circulares o trigonométricas. Estas funciones se definen a partir de las razones trigonométricas.

Función seno. La función seno $f(x) = \sin x$ hace corresponder a cada valor x de un ángulo, medido en radianes, el valor del seno de dicho ángulo.

Las propiedades más importantes de esta función trigonométrica se recogen a continuación.

- Su dominio es \mathbb{R} y su recorrido $[-1, 1]$.
- Es una función continua y acotada en \mathbb{R} .
- Es una función impar y periódica de periodo 2π .
- Posee infinitos máximos absolutos en los puntos de abscisa $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donde la función toma el valor 1.
- Asimismo presenta infinitos mínimos absolutos en los puntos de abscisa $x = \pi/2 + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donde la función toma el valor -1 .
- Corta al eje OX en los puntos de abscisa $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Se observa que no existe el límite de la función cuando $|x| \rightarrow \infty$.

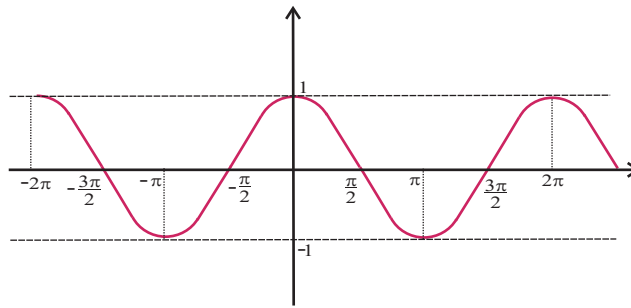


Función coseno. La función coseno, $f(x) = \cos x$, hace corresponder a cada valor x de un ángulo, medido en radianes, el valor del coseno de dicho ángulo.

Las propiedades de la función coseno son análogas a las de la función seno como indicamos a continuación.

- Su dominio es \mathbb{R} y su recorrido $[-1, 1]$.
- Es una función continua y acotada en \mathbb{R} .
- Es una función par y periódica de periodo 2π .
- Posee infinitos máximos absolutos en los puntos de abscisa $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donde la función toma el valor 1.
- Asimismo presenta infinitos mínimos absolutos en los puntos de abscisa $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, donde la función toma el valor -1 .

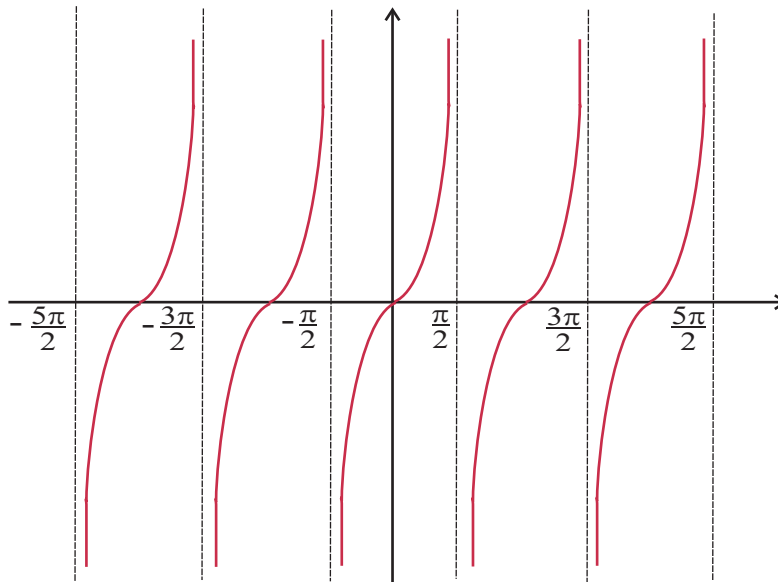
- Corta al eje OX en los puntos de abscisa $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Se observa que no existe el límite de la función cuando $|x| \rightarrow \infty$.



Función tangente. La función tangente, $f(x) = \operatorname{tg} x$, hace corresponder a cada valor x de un ángulo, medido en radianes, el valor de su tangente.

Las principales propiedades de la función tangente son las siguientes:

- Está definida para todos los valores $x \in \mathbb{R}$ que no anulan la función $y = \cos x$, esto es, su dominio es el conjunto $\mathbb{R} \setminus \left\{ (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Es una función continua en su dominio y no está acotada, siendo \mathbb{R} su recorrido.
- Es una función impar y periódica de periodo π .
- Es una función estrictamente creciente en los intervalos de la forma $\left((2k - 1)\frac{\pi}{2}, (2k + 1)\frac{\pi}{2} \right)$, $k \in \mathbb{Z}$ y no tiene máximos ni mínimos.
- Corta al eje OX en los puntos de abscisa $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Las rectas de la forma $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ son asíntotas verticales para la función.



Ejercicio

Representa e indica las características más notables de las siguientes funciones.

- (a) $y = 3 + \operatorname{sen}(2x)$. (b) $y = 3 \cos(4x)$. (c) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{4}$.

4.4 Ejercicios

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones.

$$(a) f(x) = \sqrt{x^2 - x} \quad ; \quad (b) f(x) = \frac{x-1}{x-9} \quad ; \quad (c) f(x) = \ln(\sqrt{x-3} - 1).$$

2. Analizar si las siguientes funciones son pares o impares.

$$(a) f(x) = |x| ; \quad (b) f(x) = x^2 + 1 ; \quad (c) f(x) = \sqrt{x} ;$$

$$(d) f(x) = E(x), E(x) \text{ denota la función parte entera.}$$

3. Sea
- f
- una función definida en
- \mathbb{R}
- , par y periódica de periodo 2. Además, se conoce que
- $f(x) = 1 - x$
- , para
- $x \in [0, 1)$
- . Representa gráficamente la función
- f
- .

4. (a) Si
- f
- y
- g
- son dos funciones periódicas del mismo periodo fundamental
- T
- , probar que
- $f + g$
- y
- fg
- son periódicas de periodo
- T
- . ¿Es
- T
- el periodo fundamental de estas nuevas funciones?

(b) Demostrar que las funciones periódicas no son inyectivas.

5. Estudiar el crecimiento o decrecimiento de las siguientes funciones, así como los posibles máximos y mínimos.

$$(a) f(x) = |x| - 1 ; \quad (b) f(x) = \frac{1}{|x|} ;$$

$$(c) f(x) = x^2 - 4 ; \quad (d) f(x) = x + |x|.$$

6. Sea
- f
- la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2(x-3)^2, & 2 < x \leq \frac{7}{2}. \end{cases}$$

Estudiar si esta función posee máximos y mínimos relativos y absolutos.

7. Justifica de forma analítica y gráficamente, la veracidad o la falsedad de las siguientes afirmaciones sobre la función
- $f(x) = 2x + 1$
- .

$$(a) f(x+3) = f(x) + 3 ; \quad (b) f(x+a) = f(x) + a ; \quad (c) f(x) + a = f(x) + f(a) ;$$

$$(d) f(x+a) = f(x) + f(a) ; \quad (e) f(ax) = af(x) .$$

8. El polinomio
- $P(x)$
- es de grado 5 y
- $Q(x)$
- , de grado 3. ¿Cuál es el grado de:
- $P(x) + Q(x)$
- ,
- $P(x)Q(x)$
- y
- $P(x)/Q(x)$
- ? (Suponiendo que
- $P(x)/Q(x)$
- sea un polinomio).

9. (a) Calcula el valor de
- m
- en el polinomio
- $P(x) = x^3 - 6x + m$
- , sabiendo que al dividirlo por
- $Q(x) = x + 2$
- da de resto 7 .

(b) Sin efectuar las divisiones, ¿podrías saber si son exactas los siguientes cocientes de polinomios?

$$(\alpha) (x^2 - 3x + 5) : (x - 1) ; \quad (\beta) (x^3 + 3x + 14) : (x + 2).$$

10. Factoriza los siguientes polinomios.

(a) $x^3 + 4x^2 - 3x - 18$; (b) $9x^6 - 16x^2$; (c) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

11. Calcular el cociente y el resto al dividir $P(x)$ entre $Q(x)$.

(a) $P(x) = 3x^4 - 2x^2 - 1$, $Q(x) = x^2 - 3$;

(b) $P(x) = 6x^5 - 3x^4 + x^2 - x$, $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

(c) $P(x) = -x^3 + 3x^2 + 5x + 6$, $Q(x) = x + 1$.

12. Hallar gráfica y analíticamente los puntos de intersección de las parábolas y rectas siguientes:

(a) $y = x^2 - 2$, $y = 3x - 4$; (b) $y = -x^2 + 4x - 4$, $y = 3x - 4$; (c) $y = x^2 + 6x$, $y = -9$.

13. Tomar logaritmos en las siguientes expresiones.

(a) $x = \frac{abc}{mn}$; (b) $x = \frac{a^2b^3c}{m^3np^2}$; (c) $x = \frac{a^{\frac{1}{2}}bc}{a^2\sqrt[3]{bc^{\frac{2}{3}}}}$.

14. Si

$$\log x = \frac{1}{2} \log a + 3 \log b - \frac{1}{3}(\log c + 2 \log d),$$

expresar el valor de x en función de a , b , c y d .

15. Demostrar la siguiente relación

$$\log(a^2 - b^2) = \log(ab) + \log\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right).$$

16. Encontrar la base del sistema de logaritmos en la que el logaritmo de 100 excede al logaritmo de 25 en 2 unidades.

17. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

(a) $\log(7x - 9)^2 + \log(3x - 4)^2 = 2$; (b) $2 \ln x + 3 \ln x = 5$.

18. ¿En qué región del plano situamos la gráfica de las siguientes funciones?

(a) $y = \ln(2x+3)$; (b) $y = \log_2 |x|$; (c) $y = \log(x^2 - x - 2)$; (d) $y = \log(1-x) + \log(x+1)$.

19. Representa gráficamente las funciones logarítmicas siguientes:

$$f(x) = \log_2 x; \quad g(x) = \log_4 x; \quad h(x) = \log_8 x.$$

(a) Ordena de mayor a menor estas funciones en el intervalo $(1, \infty)$.

(b) ¿Existe alguna relación entre las funciones f y g ? ¿Y entre f y h ?

20. Representa en una misma gráfica las funciones exponenciales $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ e $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.
¿Qué característica observas?

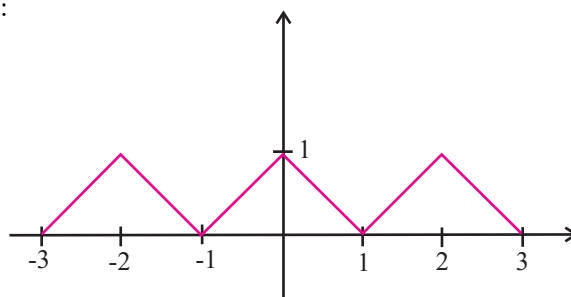
21. Representa gráficamente las funciones: (a) $y = 2^x + 2^{-x}$; (b) $y = 2^x - 2^{-x}$. ¿Qué tipo de simetría presenta cada una?
22. Representa las funciones $y = \log_2 x$ e $y = \log_{1/2} x$ conjuntamente. ¿Observas alguna simetría?
23. Representa en una misma gráfica las funciones $y = 3^x$ e $y = \log_3 x$. ¿Qué tipo de simetría existe? ¿En cuántos puntos se cortan?
24. Representa y estudia la simetría y periodicidad de las siguientes funciones:

$$(a) y = 3 + \operatorname{sen} x \quad (b) y = \operatorname{tg}(x + \pi/4) \quad (c) y = 2\operatorname{sen}(2\pi - x)$$

$$(d) y = \operatorname{tg}(x/4) \quad (e) y = \frac{1}{2} \cos(2x) \quad (f) y = \cos(2x - \pi/2).$$

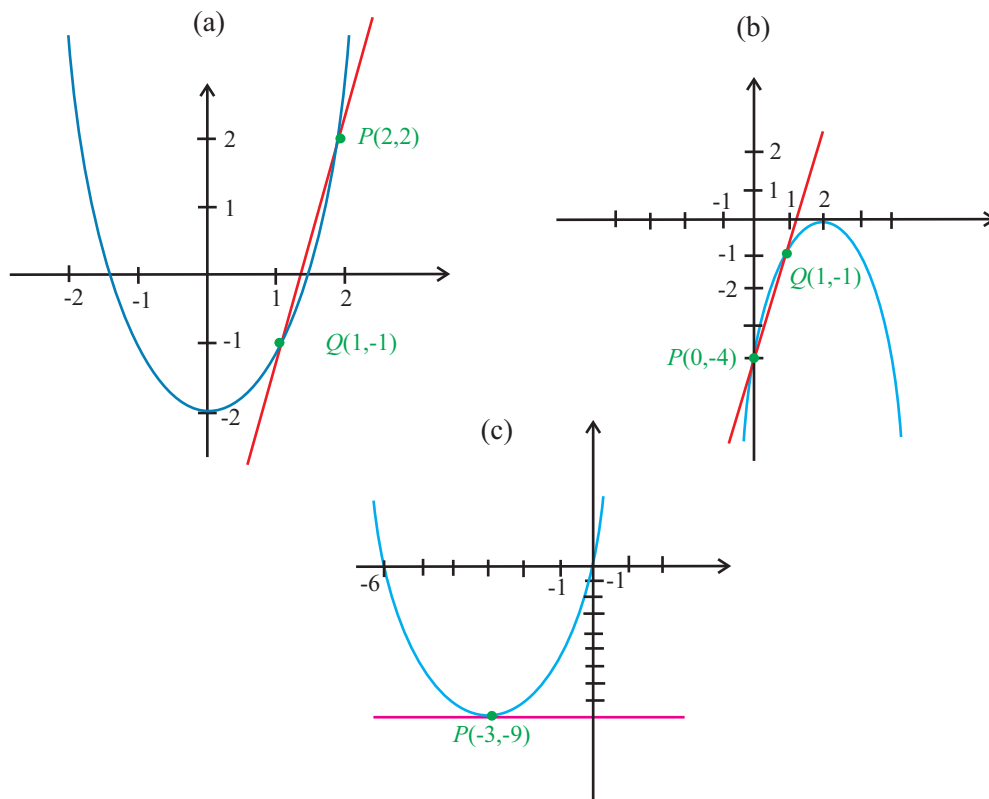
4.5 Soluciones

1. (a) $\mathbb{R} \setminus \{(0, 1)\}$. (b) $\mathbb{R} \setminus \{9\}$ (c) $(4, \infty)$.
2. Funciones pares: (a) y (b).
3. Gráfica de la función:



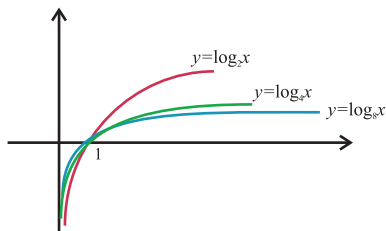
5. (a) Estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$ y estrictamente creciente en $[0, +\infty)$. No hay máximos y existe un mínimo absoluto en $(0, -1)$.
- (b) Estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$. No hay máximos ni mínimos.
- (c) Estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$ y estrictamente creciente en $[0, +\infty)$. No hay máximos y existe un mínimo absoluto en $(0, -4)$.
- (d) Constante en $(-\infty, 0]$ y estrictamente creciente en $[0, +\infty)$. No hay máximos y tiene infinitos mínimos en los puntos de la forma $(a, 0)$, con $a \leq 0$.
6. No hay máximos. Mínimo relativo en $(3, 0)$ y mínimo absoluto en $(-1, -0.5)$.
7. Son falsas: (a) y (d). Es cierta (c), sólo cuando $a = -1$. (b) y (e) son ciertas cuando $a = 0$ y $a = 1$, respectivamente, pero esto son los casos triviales.
8. El grado $P(x) + Q(x)$ es 5, el de $P(x)Q(x)$ es 8 y el de $P(x)/Q(x)$ es 2.

9. (a) $m = 3$. (b) (α) no es exacta y (β) sí.
10. (a) $P(x) = (x - 2)(x + 3)^2$. (b) $P(x) = 3x^2(x^2 + \frac{4}{3})(x - \frac{2\sqrt{3}}{3})(x + \frac{2\sqrt{3}}{3})$ (c) $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.
11. (a) Cociente: $3x^2 + 7$, resto: 20. (b) Cociente: $6x^3 + 9x^2 + 12x + 16$, resto: $19x - 16$. (c) Cociente: $-x^2 + 4x + 1$, resto: 5.
12. (a) $P(2, 2)$ $Q(1, -1)$ (b) $P(0, -4)$ $Q(1, -1)$ (c) $P(-3, 9)$.



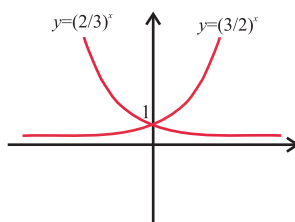
13. (a) $\log x = \log a + \log b - \log m - \log n$. (b) $\log x = 2 \log a + 3 \log b + \log c - 3 \log m - \log n - 2 \log p$ (c) $\log x = -\frac{3}{2} \log a + \frac{2}{3} \log b + \frac{1}{3} \log c$.
14. $x = \frac{a^{1/2}b^3}{c^{1/3}d^{2/3}}$.
16. $a = 2$.
17. (a) $x = 2$, $x = \frac{13}{21}$. (b) $x = e$.
18. (a) En $(-\frac{3}{2}, +\infty)$. (b) En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. (c) En $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. (d) En $(-1, 1)$.

19. (a) $\log_2 x > \log_4 x > \log_8 x$, $x \in (1, \infty)$.

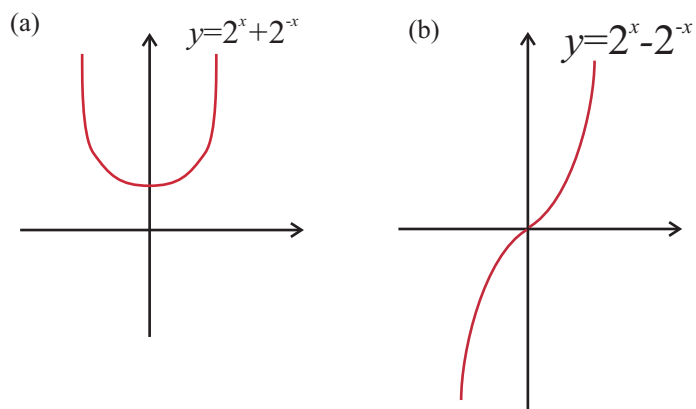


(b) $f(x) = 2g(x)$, $f(x) = 3h(x)$.

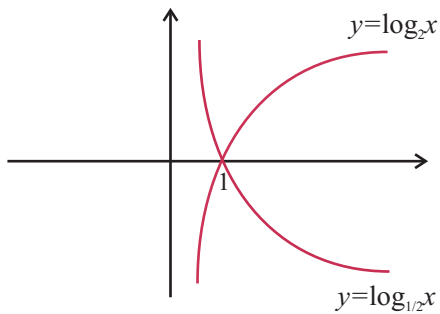
20. Son simétricas respecto al eje OY .



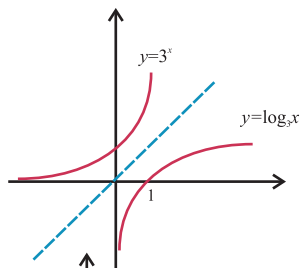
21. (a) Es par (simétrica respecto al eje OY). (b) Es impar (simétrica respecto al origen).



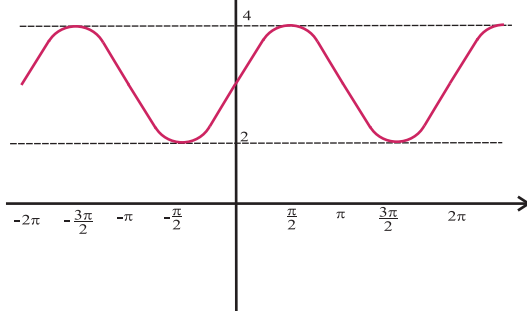
22. Son simétricas respecto al eje OX .



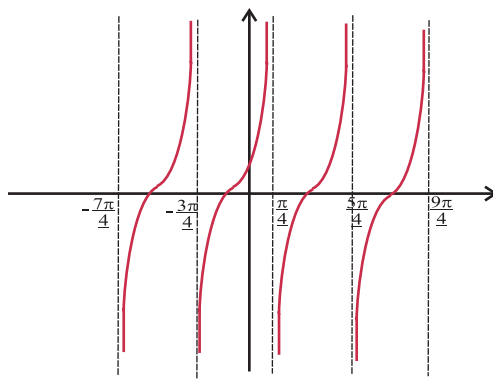
23. Son simétricas respecto a la recta $y = x$. No se cortan en ningún punto.



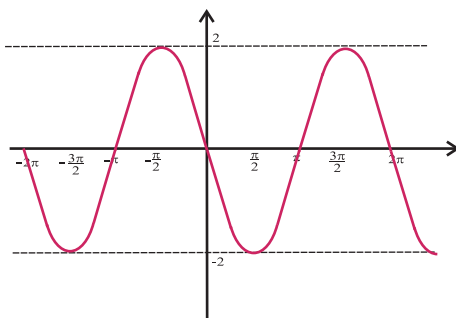
24. (a)



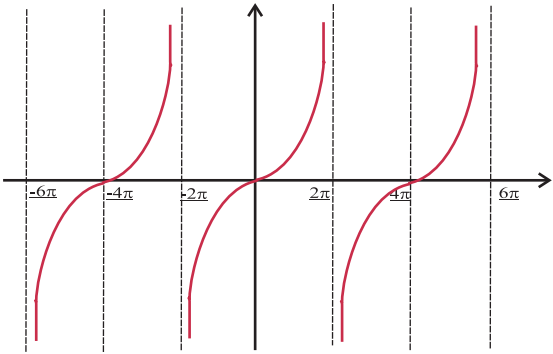
(b)



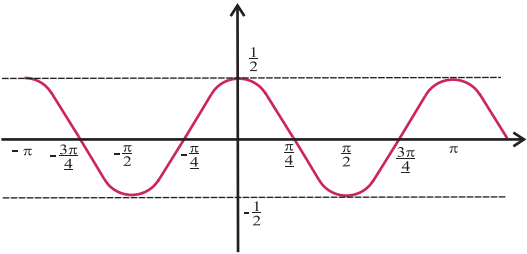
(c)



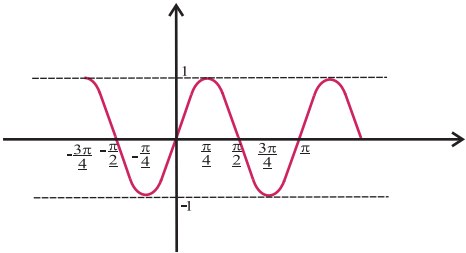
(d)



(e)



(f)



5 ÁLGEBRA MATRICIAL

Las matrices aparecen por primera vez hacia el año 1850, introducidas por el matemático inglés J.J. Sylvester (1814-1897). El desarrollo inicial de la teoría se debe al matemático y astrónomo irlandés W.R. Hamilton (1805-1865), y al inglés A. Cayley (1821-1895), quien utilizó en 1858 la notación matricial como una forma abreviada de representar un sistema de ecuaciones lineales. Las matrices aparecen en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales. Además las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, ... y actualmente su utilización constituye una parte esencial de los lenguajes de programación (arrays), ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas : hojas de cálculo, bases de datos,...

5.1 Definición de matriz

Se llama matriz de orden $m \times n$ a todo conjunto de $m \cdot n$ elementos a_{ij} dispuestos en m líneas horizontales (llamadas filas) y en n líneas verticales (llamadas columnas) de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Abreviadamente puede escribirse como $A = (a_{ij})$ donde el subíndice i varía entre los valores 1 y m y el subíndice j varía entre los valores 1 y n . Los subíndices indican la posición del elemento dentro de la matriz, el primero denota la fila i y el segundo la columna j .

Ejemplo: la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

es de orden 3×2 donde $a_{11} = 4$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 9$ y $a_{23} = -2$.

Obsérvese que denotamos las matrices con letras mayúsculas y que en el ejemplo anterior los elementos de la matriz son números enteros. En estas notas trabajaremos en general con matrices cuyos elementos serán números reales o complejos pero existen matrices con elementos no numéricos como por ejemplo la disposición de los alumnos en una clase (filas x columnas) o el horario de clases de un curso donde las filas representan las franjas horarias, las columnas representan los días de la semana y los elementos de la matriz son las asignaturas.

Dos *matrices* $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son *iguales* cuando tienen el mismo orden y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales, es decir $a_{ij} = b_{ij}$ para todo valor de i y de j . Según esta definición, para que las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & a \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 9 & b \end{pmatrix}$ sean iguales debe ocurrir que $a = -1$ y $b = -7$.

Ejercicio: Determina si los siguientes pares de matrices son iguales:

$$1. \begin{pmatrix} 4 & 5^2 - 13 & 14 \\ 9 & -7 & \sqrt{16} \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \frac{24}{6} & 12 & +\sqrt{164} \\ 9 & -\sqrt{49} & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} \frac{14-3}{2} & -3 \\ 3.5 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 5 + \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{21}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

Algunos tipos de matrices

Podemos clasificar las matrices según distintos criterios, como pueden ser su forma o las propiedades de sus elementos. Atendiendo a la forma tenemos:

- Una matriz *fila* es aquella que sólo tiene una fila:

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}) .$$

Ejemplo: los vectores en el plano real \mathbb{R}^2 o en el espacio real \mathbb{R}^3 se pueden interpretar como matrices filas.

- Análogamente una matriz *columna* es aquella que sólo tiene una columna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} .$$

- Una matriz *cuadrada* es aquella que tiene igual número de filas que de columnas. En este caso diremos que la matriz es de orden n , donde n es el número de filas (y columnas).

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n llamamos

- *diagonal principal* a los elementos a_{ii} donde i varía entre 1 y n :

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

- *diagonal secundaria* a los elementos a_{ij} donde $1 \leq i \leq n$ y $j = n + 1 - i$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \mathbf{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a_{n1}} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: los *cuadrados mágicos*, que son aquellas matrices cuadradas de números enteros positivos cuya suma de los elementos de cada fila, columna o diagonales es constante. Por ejemplo, el conocido como cuadrado mágico de Durero cuya constante es 34 y que aparece en la esquina superior derecha de su grabado titulado *Melancolía*

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$



o el cuadrado mágico de la fachada de la pasión del Templo Expiatorio de la Sagrada Familia en Barcelona:

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 14 & 4 \\ 11 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 10 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$



cuya constante es 33, la edad de Jesucristo en la Pasión.

Atendiendo a sus elementos tenemos:

- La matriz *nula*, que se denota por O y cuyos elementos son todos cero, así por ejemplo $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de orden 2×3 .
- La matriz *identidad*, que es una matriz cuadrada en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a uno y los restantes elementos son ceros:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz identidad de orden 3.

- *Matriz diagonal* es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos. Obsérvese que toda matriz identidad es diagonal. Es importante destacar que en la definición de matriz diagonal los elementos de la diagonal principal pueden tomar el valor que se desee, nulo o no, así por ejemplo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

es una matriz diagonal.

- *Matriz escalar* es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales, como por ejemplo

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- *Matriz triangular superior* es una matriz cuadrada en la que todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos, es decir, si $A = (a_{ij})$ es cuadrada de orden n , A será triangular superior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$, como por ejemplo

$$\begin{pmatrix} -1 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- *Matriz triangular inferior* es una matriz cuadrada en la que todos los elementos por encima de la diagonal principal son nulos, es decir, si $A = (a_{ij})$ es cuadrada de orden n , A será triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$, como por ejemplo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ 9 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

- *Matriz triangular* es una matriz triangular inferior o superior.

Obsérvese que los términos matriz identidad, diagonal, escalar y triangular se refieren únicamente a matrices cuadradas. Además toda matriz diagonal es triangular superior y triangular inferior.

5.2 Traspuesta de una matriz

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$, llamamos *traspuesta* de A , y se denota por A^t , a la matriz de orden $n \times m$ que se obtiene cambiando filas por columnas en A , es decir, $A^t = (b_{ij})$ donde $b_{ij} = a_{ji}$. Así por ejemplo

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 12 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ entonces } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que dada cualquier matriz A se verifica que $(A^t)^t = A$.

5.3 Matrices simétricas y antisimétricas

Llamamos *matriz simétrica* a toda matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = a_{ji}$, es decir, si $A = A^t$.

Ejemplos de matrices simétricas son

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Llamamos *matriz antisimétrica* a toda matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = -a_{ji}$, es decir, si $A = -A^t$. Como consecuencia de ello, los elementos de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son nulos.

Ejemplos de matrices antisimétricas son

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 \\ -3 & 0 & 4 \\ -10 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & -13 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio: Determina de qué tipo son las siguientes matrices (observa que una misma matriz puede ser de varios tipos):

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

$$3. D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4. E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

5.4 Operaciones con matrices

Hemos visto que los vectores los podemos identificar con matrices filas. De igual forma que sumamos vectores y multiplicamos estos por un número podemos definir dichas operaciones para las matrices:

Suma de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, del mismo orden $m \times n$, se define la *suma* de A y B , y se denota $A + B$, como la matriz $(a_{ij} + b_{ij})$, es decir:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & \frac{3}{2} \\ 16 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ entonces $A + B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 13 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

En un contexto real podemos escribir por cada Centro de Enseñanza Secundaria de Canarias la matriz cuadrada de orden 2 donde ordenamos los chicos y chicas de las dos modalidades de Segundo de Bachillerato. Si queremos saber el número de chicos y chicas por curso en los Centros de Tenerife, basta con sumar las matrices asociadas a los centros sitos en dicha isla.

La suma de matrices posee las siguientes propiedades:

1. Propiedad asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$.
2. Propiedad conmutativa: $A + B = B + A$.
3. $A + O = O + A = A$.
4. $(A + B)^t = A^t + B^t$.

donde A, B, C son matrices cualesquiera del mismo orden y O es la matriz nula de dicho orden.

Producto de matrices por un número real

El producto de una matriz $A = (a_{ij})$ por un número real k es la matriz (ka_{ij}) , que denotamos kA , es decir, es la matriz del mismo orden que A cuyos elementos se obtienen multiplicando los elementos de A por el número k :

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 14 \\ -3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $3.A = \begin{pmatrix} -3 & 42 \\ -9 & 21 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Retornando al ejemplo de los Centros de Secundaria en Canarias, si fijamos uno de ellos y sabemos que el número de estudiantes aprobados por curso es el 70 por ciento de los matriculados, multiplicando la matriz asociada a dicho Centro por 0'7 obtenemos el número de alumnos aprobados en cada especialidad de Bachillerato.

Al número real k se le llama también *escalar*, y al producto de un número por una matriz, producto de *escalares por matrices*.

El producto de un número por una matriz posee las siguientes propiedades:

1. $k(A + B) = kA + kB$.
2. $(k + h)A = kA + hA$.
3. $k(hA) = (kh)A$.
4. $1.A = A$.
5. $(k.A)^t = k.A^t$.

donde A y B son matrices cualesquiera del mismo orden y h, k son números reales.

Se llama *matriz opuesta* de la matriz $A = (a_{ij})$ a la matriz que resulta de multiplicar el número -1 por A y la denotamos $-A$.

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ -30 & 17 \\ 0 & -21 \end{pmatrix}$ su matriz opuesta es $-A = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ 30 & -17 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$.

Obsérvese que la suma de toda matriz con su opuesta es la matriz nula, es decir $A + (-A) = O$.

Dadas dos matrices A, B del mismo orden llamamos *diferencia* de A y B , que escribimos $A - B$, a la suma de A con la matriz opuesta de B , es decir $A - B = A + (-B)$.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & \frac{3}{2} \\ 16 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ entonces $A - B = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -1 \\ -19 & 5 & -9 \end{pmatrix}$.

El producto escalar y la suma de matrices verifican las siguientes propiedades de simplificación:

1. $A + C = B + C$ es equivalente a $A = B$,
2. $kA = kB$ es equivalente a $A = B$ si k es distinto de 0,

3. $kA = hA$ es equivalente a $h = k$ si A es distinta de la matriz nula,

donde A, B, C son matrices cualesquiera del mismo orden y h, k son dos números reales.

Producto de matrices

Dados dos vectores podemos multiplicarlos mediante el producto escalar: si $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ su producto escalar se define como

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + yy' + zz'.$$

Además de la interpretación geométrica de dicho producto se pueden dar otras. Por ejemplo si vamos de paseo y compramos 3 CD de música a 15 euros cada uno, 2 libros de bolsillo a 9'5 euros y 2 botellas de agua a 60 céntimos, podemos considerar $(3, 2, 2)$ como vector compra y $(15, 9'5, 0'6)$ como vector precio, y el coste total de las compras de esa tarde fue:

$$(3, 2, 2) \cdot (15, 9'5, 0'6) = 3 \cdot 15 + 2 \cdot 9'5 + 2 \cdot 0'6 = 65'2 \text{ euros.}$$

Obsérvese que para poder definir el producto escalar los vectores deben tener el mismo número de componentes.

El producto escalar se puede interpretar como el producto de una matriz fila por una matriz columna:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'.$$

Vamos a generalizar el producto a dos matrices no necesariamente filas o columnas como el producto de todas las filas de la primera por todas las columnas de la segunda (¡en ese orden!). Para poder multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz; dicho de otra forma: dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ de orden $n \times p$, la matriz $A \cdot B = (c_{ij})$ es una nueva matriz de orden $m \times p$, donde el término c_{ij} se obtiene multiplicando escalarmente la fila i de A por la columna j de B , es decir,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p.$$

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -9 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ entonces } A \cdot B = \begin{pmatrix} -15 & 0 & 3 \\ -54 & 2 & 11 \\ 9 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: Los precios en dos centros comerciales del último CD editado por tres grupos musicales distintos se recoge en la siguiente matriz $\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 12 & 14 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$. Si en el periodo de rebajas el primer disco tiene un descuento del 10 por ciento, el segundo del 15 por ciento y el tercero del 12 por ciento, ¿en cuál de las dos centros comerciales compraríamos los tres discos más baratos? Para resolver la cuestión basta multiplicar:

$$\begin{pmatrix} 0'9 & 0'85 & 0'88 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 12 & 14 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31'62 & 35'9 \end{pmatrix}$$

y concluimos que ahorramos dinero comprando en el primer centro comercial.

El producto de matrices posee las siguientes propiedades:

1. Si A, B, C son matrices tales que $A.B$ y $B.C$ están definidas, entonces $A.(B.C)$ y $(A.B).C$ también están definidas y $A.(B.C) = (A.B).C$.
2. Si A, B, C son matrices tales que $A.B$ y $B + C$ están definidas, entonces $A.(B + C)$ y $A.B + A.C$ también están definidas y $A.(B + C) = A.B + A.C$.
3. Si A, B, C son matrices tales que $A + B$ y $A.C$ están definidas, entonces $(A + B).C$ y $A.C + B.C$ también están definidas y $(A + B).C = A.C + B.C$.
4. Si A, B son matrices tales que $A.B$ está definida, entonces $B^t.A^t$ también está definida y $(A.B)^t = B^t.A^t$.
5. Si A es una matriz cuadrada de orden n e I_n es la matriz identidad de orden n entonces $A.I_n = I_n.A = A$.

Aunque muchas de las propiedades de las operaciones con números reales se verifican también en las operaciones de matrices, existen otras, como las que presentamos a continuación, que no se verifican:

1. El producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 55 & 29 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 38 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Si $A.B = A.C$, no podemos deducir que $B = C$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ pero } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Si $A.B = 0$, no tiene por qué ocurrir que A o B sean iguales a la matriz nula:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ pero ni } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ ni } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ son la matriz nula.}$$

En el conjunto de las matrices cuadradas podemos definir *la potencia de matrices* de la forma siguiente: si A es una matriz cuadrada y n es un número entero positivo definimos A^n como el producto de n veces la matriz A por ella misma, es decir, $A^n = \underbrace{A.A.\dots A}_{n \text{ veces}}$. Obsérvese que $A^n = A^{n-1}.A$.

Además se tiene en general que:

1. $(A + B)^2$ es distinto de $A^2 + 2AB + B^2$,
2. $(A - B)^2$ es distinto de $A^2 - 2AB + B^2$,
3. $(A + B)(A - B)$ es distinto de $A^2 - B^2$.

Ejercicios.-

1. Encuentra matrices que confirmen las tres afirmaciones anteriores.
2. Consideramos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 12 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Justifica si las siguientes operaciones están bien definidas y realiza aquellas que sí lo están: A^2 , $A.B$, $B.A$, $5D$, $3C - 7D$, $-B$.

5.5 Sistemas de ecuaciones lineales

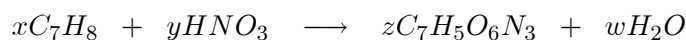
Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen frecuentemente en diferentes campos de la ciencia en general y de las matemáticas en particular, como muestran los siguientes ejemplos tomados del Bachillerato de Ciencias.

El primer ejemplo procede de la Física: imagina que viajas en avión entre dos ciudades que distan 2200 kilómetros. Si el vuelo de ida, con viento en contra, dura tres horas y el de regreso ese mismo día, con viento a favor, dura 2 horas y media, ¿cual era la velocidad del avión (respecto del suelo) y la velocidad del viento, suponiendo que ambas son constantes? Si denotamos por x

la velocidad del avión y por y la del viento, el problema se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 3(x - y) &= 2200 \\ \frac{5}{2}(x + y) &= 2200 \end{aligned} \right\}$$

El segundo ejemplo nos viene de la Química: Si mezclamos, bajo condiciones controladas, tolueno C_7H_8 con ácido nítrico HNO_3 podemos producir trinitrotolueno $C_7H_5O_6N_3$ (más conocido como TNT) con un excedente de agua. ¿En qué proporción debemos mezclar los diferentes componentes para obtenerlo? Si recordamos el principio general que nos dice que el número de átomos de cada componente antes de la mezcla debe ser el mismo que después de la mezcla, el diagrama de nuestro ensayo es



lo que nos da el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 7x &= 7z \\ 8x + 1y &= 5z + 2w \\ 1y &= 3z \\ 3y &= 6z + 1w \end{aligned} \right\}$$

Contestar a las preguntas de los ejemplos anteriores requiere resolver un sistema de ecuaciones, donde en ninguna ecuación aparecen potencias de las variables que sean superiores a uno. Mostraremos un método, conocido como *Método de Gauss*, en honor de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que nos permitirá resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales.

Se llama *ecuación lineal en las variables* x_1, \dots, x_n con coeficientes en \mathbb{R} a toda ecuación de la forma

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \tag{4}$$

donde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ son los coeficientes de la ecuación y $b \in \mathbb{R}$ es el término independiente de la misma.

Una n -upla $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ es una *solución* de (o satisface, o verifica) la ecuación (??) si $a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = b$.

Un *sistema de ecuaciones lineales* es un conjunto finito de ecuaciones lineales de la forma:

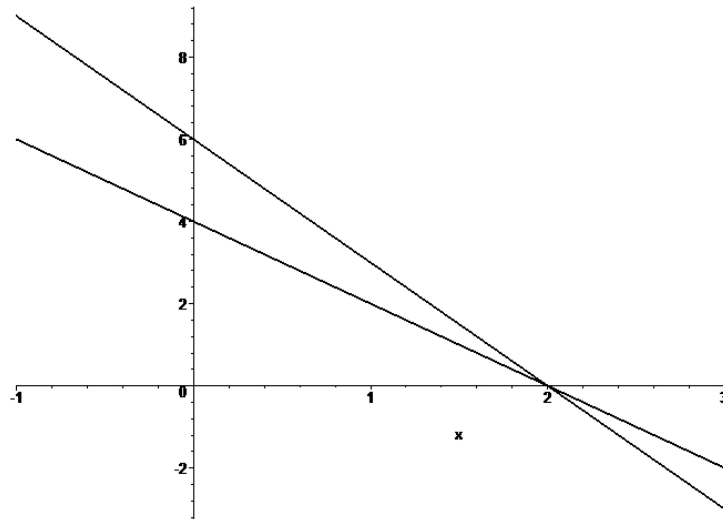
$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}$$

y diremos que tiene por *solución* a $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ si la n -upla es solución de todas las ecuaciones que forman el sistema.

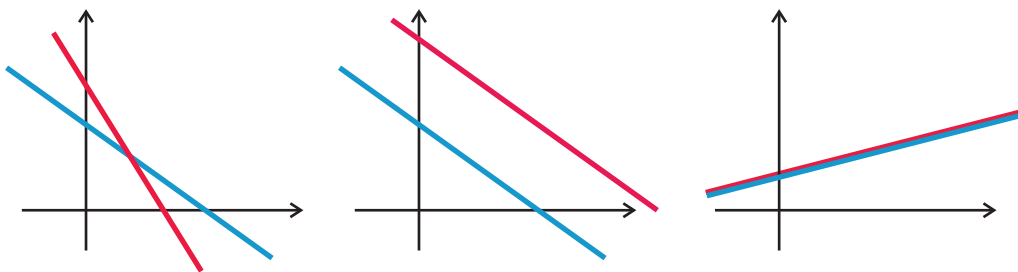
Ejemplo.- El par $(2, 0)$ es solución del sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \end{array} \right\}$$

sin embargo $(0, 2)$ no es solución del mismo. Podemos interpretar el resultado de forma geométrica: cada ecuación del sistema se corresponde con la ecuación de una recta en el plano. Decir que el par $(2, 0)$ es solución del sistema equivale a decir que las rectas $L_1 \equiv 2x_1 + x_2 = 4$ y $L_2 \equiv 3x_1 + x_2 = 6$ se cortan en un único punto del plano, el punto $(2, 0)$:



Sabemos geoméricamente que dos rectas en el plano o bien son secantes, como nuestro ejemplo, o bien paralelas o bien son coincidentes. Algebraicamente, la afirmación anterior se reduce a decir que un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas o bien tiene una única solución, o ninguna o infinitas:



Diremos que un sistema de ecuaciones es *incompatible* si no admite ninguna solución. En caso contrario diremos que es *compatible*. Los sistemas compatibles a su vez pueden tener una única solución, en cuyo caso diremos que es *compatible determinado*, o más de una solución que denominaremos *compatible indeterminado*.

Diremos que dos sistemas con el mismo número de incógnitas son *equivalentes* si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Resolver un sistema consiste en encontrar el conjunto de sus soluciones. El *Método de Gauss* es un algoritmo que permite resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales. En líneas generales, este método consiste en transformar el sistema de ecuaciones lineales que tenemos de partida en otro de tal forma que tenga el mismo conjunto de soluciones, es decir en un sistema equivalente, pero que sea *más fácil* de resolver. Por ejemplo si tomamos el sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x_3 & = & 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 & = & 3 \end{array} \right\}$$

podemos transformarlo sucesivamente de la siguiente forma, que nos será más fácil de resolver:

$$\text{Permutamos la primera con la tercera ecuación} \quad \left. \begin{array}{rcl} \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 & = & 3 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ 3x_3 & = & 9 \end{array} \right\}$$

$$\text{Multiplicamos la primera ecuación por 3} \quad \left. \begin{array}{rcl} x_1 + 6x_2 & = & 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ 3x_3 & = & 9 \end{array} \right\}$$

Sumamos a la segunda ecuación la primera multiplicada por -1

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 + 6x_2 & = & 9 \\ -x_2 - 2x_3 & = & -7 \\ 3x_3 & = & 9 \end{array} \right\}$$

y podemos resolver el último sistema despejando las variables de *abajo hacia arriba*. Así, de la última ecuación obtenemos $x_3 = 3$, que sustituido en la segunda ecuación nos da $x_2 = 1$ y sustituyendo por último en la primera ecuación, obtenemos $x_1 = 3$, y por tanto el sistema tiene una única solución que es la terna $(3, 1, 3)$.

Los diferentes sistemas de ecuaciones que van apareciendo son *equivalentes*, es decir, todos tienen el mismo conjunto de soluciones, gracias al siguiente teorema:

Teorema.- Si transformamos un sistema de ecuaciones lineales en otro utilizando alguna de las siguientes operaciones:

1. Se permuta una ecuación por otra.
2. Se multiplica una ecuación por una constante no nula.
3. Se sustituye una ecuación por la suma de ella con un múltiplo de otra ecuación

entonces ambos sistemas tienen el mismo conjunto de soluciones.

Las tres operaciones del teorema anterior se denominan *operaciones elementales* u *operaciones de Gauss*, y son conocidas por *permutación*, *multiplicación por un escalar* y *pivotación*, respectivamente.

Obsérvese que dichas operaciones tienen restricciones. Así, por ejemplo, está prohibido multiplicar por el escalar nulo pues cambia el conjunto de soluciones del sistema. De la misma forma está prohibido sustituir una ecuación por ella menos el producto de ella por -1 pues tiene el mismo efecto que multiplicar la ecuación por cero.

Por simplificar denotaremos:

- la permutación de la i -ésima ecuación por la ecuación j -ésima como $F_i \leftrightarrow F_j$,
- la multiplicación de la i -ésima ecuación por el escalar no nulo α como αF_i ,
- la pivotación de la i -ésima ecuación mediante el escalar α y la j -ésima ecuación por $F_i + \alpha F_j$.

Utilizando transformaciones elementales todo sistema de ecuaciones lineales se transforma en un sistema equivalente triangular, que será más *fácil* de resolver.

Un sistema de ecuaciones lineales queda determinado por sus coeficientes y sus términos independientes. Dichos números podemos escribirlos en dos matrices, la matriz formada por los coeficientes se denomina *matriz del sistema* y si a ésta le añadimos una columna con los términos independientes, se obtiene la *matriz ampliada*, más concretamente la matriz asociada al sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\} \quad (5)$$

es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y su matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Podemos reescribir el sistema (??) usando su matriz asociada y el producto de matrices de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

que se conoce como *escritura matricial* del sistema en cuestión.

Si retornamos al sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x_3 & = & 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 & = & 3 \end{array} \right\}$$

tenemos que su matriz asociada y su matriz ampliada son

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 \end{array} \right) \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

respectivamente y la escritura matricial del sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que podemos realizar a las filas de la matriz ampliada las mismas transformaciones que hicimos al sistema para resolverlo y obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3} & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 9 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + (-1)F_1} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

siendo la última matriz, la matriz ampliada del sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 + 6x_2 & = & 9 \\ -x_2 - 2x_3 & = & -7 \\ 3x_3 & = & 9 \end{array} \right\}$$

que resolvimos fácilmente.

Diremos que un sistema de ecuaciones lineales es *homogéneo* si todos sus términos independientes son nulos, es decir, si $b_i = 0$ para todo valor de i .

Los sistemas homogéneos son siempre compatibles pues admiten la solución $(0, \dots, 0)$, pero pueden ser determinados o indeterminados.

Como veremos a continuación las transformaciones elementales serán de utilidad en otros contextos.

Obsérvese que toda transformación elemental es reversible, es decir, que si el sistema S es equivalente al sistema R por una operación elemental entonces existe una operación elemental que transforma el sistema R en el sistema S .

Ejercicios.-

1. Usa el método de Gauss para resolver los sistemas:

$$(a) \quad \left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 13 \\ x - y &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (b) \quad \left. \begin{aligned} x - z &= 0 \\ 3x + y &= 1 \\ -x + y + z &= 4 \end{aligned} \right\}$$

2. Hay otros métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales además del método de Gauss. Uno de ellos, visto en la Educación Secundaria, consiste en despejar una variable en una ecuación y sustituirla en las otras ecuaciones. Este paso se repite hasta que conseguir una ecuación con una única incógnita, de la cual despejamos su valor y aplicamos entonces sustitución ascendente. Este método conlleva en general más operaciones y por tanto la probabilidad de equivocarse es mayor. Para ilustrar lo anterior tomamos el ejemplo

$$\left. \begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 2x + y &= -3 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- (a) Despeja x de la primera ecuación y sustitúyela en la segunda ecuación. Encuentra el valor de y .
- (b) Sustituye el valor de x de la primera ecuación en la tercera y encuentra el valor de y .
- (c) ¿Deducimos de lo anterior que el sistema tiene solución? ¿Qué nuevo paso debemos dar para concluir correctamente que el sistema no tiene solución?
3. Recuerda las propiedades elementales de la trigonometría para deducir, utilizando el método de Gauss, si el siguiente sistema tiene solución:

$$\left. \begin{aligned} 2\operatorname{sen}\alpha - \cos\beta + 3\operatorname{tg}\gamma &= 3 \\ 4\operatorname{sen}\alpha + 2\cos\beta - 2\operatorname{tg}\gamma &= 10 \\ 6\operatorname{sen}\alpha - 3\cos\beta + \operatorname{tg}\gamma &= 9 \end{aligned} \right\}$$

¿Quiénes son las incógnitas del sistema?

4. ¿ Los sistemas que resultan de problemas de reacciones químicas, como el del ejemplo del TNT, deben tener infinitas soluciones? ¿ Qué información nos proporcionan las soluciones de dichos sistemas?
5. ¿ Hay algún sistema lineal con dos incógnitas cuyo conjunto de soluciones sea todo el plano \mathbb{R}^2 ?
6. ¿ Hay alguna operación elemental que sea redundante, es decir, que se pueda obtener de otras operaciones elementales?

5.6 Determinantes y sus propiedades.

En este apartado asociaremos a toda matriz cuadrada A un número real, llamado *determinante de A* , que denotaremos $|A|$. Estudiaremos explícitamente la forma de calcularlos así como su interpretación geométrica y su uso en el álgebra lineal.

Determinante de una matriz cuadrada de orden 2:

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es una matriz 2×2 , calculamos su determinante como

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Por ejemplo el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - (-2) \cdot 7 = 8 + 14 = 22.$$

Geométricamente el determinante de A , en valor absoluto, coincide con el área del paralelogramo que determinan las filas de A vistas como elementos de \mathbb{R}^2 . En efecto el área del paralelogramo que determinan los vectores (a_{11}, a_{12}) y (a_{21}, a_{22}) coincide con el área de cualquier otro paralelogramo que tenga la misma base y la misma altura que el anterior.

Obtenemos entonces un segundo paralelogramo trasladando el primer vector hasta intersectar el eje x y el segundo vector hasta intersectar el eje y . Algebraicamente dicha traslación consiste en hacer dos transformaciones elementales sobre las filas: si ningún vector está sobre el eje y , a_{11} y a_{12} son distintos de cero y las transformaciones consistirían en sumar a la segunda fila la primera fila multiplicada por $-\frac{a_{12}}{a_{11}}$ y luego a la primera fila le restamos una proporcional a la segunda de tal forma que la componente de la matriz que ocupa la fila primera y la columna segunda sea cero. Si uno de los vectores ya está sobre uno de los ejes basta trasladar el otro vector hasta el otro eje.

Veamos esto en el ejemplo anterior:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 22 \end{vmatrix} = 22.$$

Determinante de una matriz cuadrada de orden 3:

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es una matriz 3×3 , calculamos su determinante, utilizando la conocida como regla de Sarrus, en honor al matemático francés Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) que la hizo explícita en su artículo *Nouvelles méthodes pour la résolution des équations* publicado en Estrasburgo en 1833:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Por ejemplo el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot 7 + 1 \cdot (-2) \cdot 4 + 0 \cdot (-2) \cdot (-6) - 0 \cdot 8 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) \cdot 7 - 1 \cdot (-2) \cdot (-6) = 50.$$

El determinante de una matriz de orden tres se puede interpretar como el volumen del paralelepípedo determinado por sus tres filas.

Determinante de una matriz cuadrada de orden n :

Calcularemos el determinante de una matriz cuadrada de orden n mediante recurrencia utilizando el concepto de menor complementario.

Se llama *menor complementario* de un elemento a_{ij} de una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ al determinante de la matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j de la matriz original, y se denota por M_{ij} . Se llama *adjunto* del elemento a_{ij} , y lo denotaremos A_{ij} a:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Si en una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ cada elemento se sustituye por su adjunto, se obtiene una matriz del mismo tamaño que se llama *adjunta* de A , y que se denota por $\text{adj}A$.

Calculamos un determinante de una matriz cuadrada de orden $n \times n$, a partir del desarrollo por filas o columnas siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots a_{nj}A_{nj},$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Retornando al determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, si desarrollamos por la primera fila se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}.$$

Obsérvese que el número de sumandos obtenidos al desarrollar un determinante crece rápidamente al aumentar el orden de la matriz. Así, los determinantes de matrices de orden 4 tienen 24 términos, los de orden 5 tienen 120, y en general los de orden n tienen $n!$ términos. Es claro entonces que calcular determinantes desarrollando por filas o columnas es un proceso largo. Las siguientes propiedades nos ayudarán a calcular los determinantes de una forma más rápida, *utilizando transformaciones elementales*:

1. Si se intercambian dos filas o dos columnas de un determinante, éste cambia de signo.
2. Si se multiplica una fila o columna de un determinante por un número real k , éste queda multiplicado por k .
3. Si se suma a una fila o columna de un determinante un múltiplo de otra, su valor no varía.

Además se verifican las siguientes propiedades:

1. Si una matriz cuadrada tiene dos filas o columnas iguales, su determinante es igual a cero.
2. Si una matriz cuadrada tiene una fila o una columna nula, su determinante es igual a cero.
3. El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las respectivas matrices.

Ejemplo: Queremos calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Restamos a la tercera columna la primera, y a la cuarta columna el doble de la primera:

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right|.$$

Desarrollamos por la primera fila y aplicando la regla de Sarrus se tiene:

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right| = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{array} \right| = 19.$$

Ejercicios.- Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4. E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5.7 Rango de una matriz.

Dada una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

se dice que las m filas F_1, F_2, \dots, F_m son *linealmente* independientes si de la relación

$$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \dots + \alpha_m F_m = 0,$$

deducimos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$. Obsérvese que lo anterior es equivalente a decir que la única solución que tiene el sistema homogéneo de matriz asociada A e incógnitas $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ es la solución nula.

De forma análoga se define la independencia lineal de las n columnas C_1, C_2, \dots, C_n de la matriz A .

Se define el rango de una matriz como el número máximo de filas (o el número máximo de columnas) que son linealmente independientes. Aunque no lo demostraremos aquí es un hecho fundamental del álgebra lineal que ambos números coinciden.

Existen distintos métodos para calcular el rango de una matriz:

Usando el determinante:

El rango de una matriz coincide con el orden del mayor determinante distinto de cero que pueda extraerse de la misma.

Usando las transformaciones elementales de Gauss:

Tomamos la matriz A de orden $m \times n$ y hacemos transformaciones elementales en la misma hasta obtener una matriz diagonal del mismo orden que A . El rango de A coincide entonces con el número de elementos no nulos de la diagonal.

5.8 Matriz inversa

Una matriz cuadrada A de orden n se dice que es inversible si existe una matriz $n \times n$, denotada por A^{-1} , tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

La matriz A^{-1} se llama *matriz inversa* de A .

Obsérvese que no todas las matrices cuadradas tienen inversa, como por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

si existiera su inversa sería una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que es imposible pues no existen números reales a y c tales que $a + c = 1$ y $a + c = 0$.

Se llama *matriz regular o inversible* a toda matriz cuadrada que tiene inversa. En caso contrario, se dice que la *matriz es singular*.

Podemos caracterizar las matrices cuadradas que son inversibles mediante su determinante o bien su rango. Más precisamente,

Teorema.- Sea A una matriz cuadrada de orden n . Entonces

1. A es inversible si y sólo si su determinante es no nulo.
2. A es inversible si y sólo si su rango es exactamente n .

Existen distintos métodos para calcular la matriz inversa de una matriz dada:

Usando el determinante:

Si la matriz cuadrada A es inversible su matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A)^t.$$

Ejemplo: La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ es inversible pues su determinante es igual a -7 . Además su matriz adjunta es $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y la traspuesta de ésta es $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, de lo que concluimos que la inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}.$$

Usando las transformaciones elementales de Gauss:

Si la matriz cuadrada A de orden n es inversible calculamos la matriz inversa de A , formando una nueva matriz colocando a la derecha de A la matriz identidad del mismo orden $(A|I_n)$, y aplicando transformaciones elementales por filas hasta obtener $(I_n|B)$, entonces B será la matriz inversa de A . Si al realizar el proceso de transformación alguna de las filas de la matriz se anula, entonces A no tiene inversa.

Ejemplo: Volvemos a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, realizamos transformaciones elementales por filas:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2-3F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{7}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{array} \right) \xrightarrow{F_1-2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 3/7 & -1/7 \end{array} \right), \text{ y concluimos que}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}.$$

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$4. E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5.9 Sistemas de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché-Fröbenius.

Sea el sistema de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{\scriptsize} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

El *Teorema de Rouché-Fröbenius* caracteriza la resolubilidad del sistema en términos de los rangos de la matriz asociada A y de la matriz ampliada del sistema A^* . Nótese que, puesto que A es una submatriz de A^* , se tiene siempre $\text{rango}(A) \leq \text{rango}(A^*)$ (basta pensar el rango por columnas).

Teorema de Rouché-Fröbenius Sea el sistema de ecuaciones lineales $A.X = B$. Entonces:

1. Si $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A^*)$, el sistema es incompatible.
2. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = n$, el sistema es compatible y determinado.
3. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) < n$, el sistema es compatible e indeterminado.

Se dice que un sistema es *de Cramer* si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas ($m = n$), y la matriz del sistema A tiene determinante distinto de cero. En un sistema de Cramer $A.X = B$ la matriz asociada es inversible y obtenemos la solución de dicho sistema multiplicando por la inversa de A a ambos lados, es decir, que la solución del sistema es $X = A^{-1}B$, es decir que la solución de un sistema de Cramer es

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde

$$|A_i| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ejercicios:

1. Estudia cada uno de los siguientes sistemas y busca sus soluciones en caso de tenerlas:

$$(a) \quad \begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ x - 4y = 0 \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} -x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad (c) \quad \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ x + y + 2z = 14 \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} -x - y = 1 \\ -3x - 3y = 2 \end{cases} \quad (e) \quad \begin{cases} 4y + z = 20 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x + z = 5 \\ x + y - z = 10 \end{cases} \quad (f) \quad \begin{cases} 2x + z + w = 5 \\ y - w = -1 \\ 3x - z - w = 0 \\ 4x + y + 2z + w = 9 \end{cases}$$

2. Estudia el sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = k \end{cases}$ en función de los valores del parámetro k .
3. ¿Qué condiciones deben verificar los términos constantes b_i para que los siguientes sistemas tengan solución?

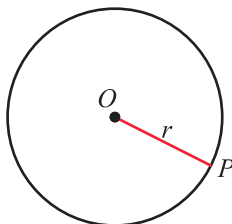
$$(a) \quad \begin{cases} x - 3y = b_1 \\ 3x + y = b_2 \\ x + 7y = b_3 \\ 2x + 4y = b_4 \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = b_1 \\ 2x + 5y + 3z = b_2 \\ x + 8z = b_3 \end{cases}$$

6 GEOMETRÍA BÁSICA.

6.1 Cónicas. Ecuaciones y elementos característicos.

Circunferencia

Una circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.



Elementos característicos:

- *Centro* (O): punto fijo.
- *Radio* (r): distancia de un punto cualquiera de la circunferencia al centro.

Ecuaciones: Circunferencia de centro $O(x_0, y_0)$.

Ecuación reducida: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

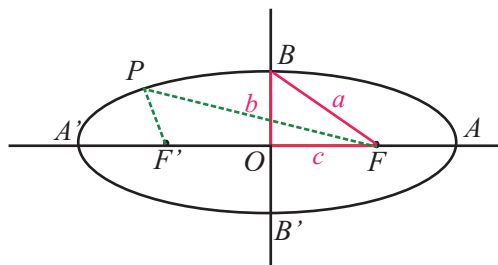
Ecuación general: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, siendo $A^2 + B^2 - 4C > 0$.

Longitud y área

- *Longitud*: $2\pi r$
- *Área*: πr^2

Elipse

Una elipse es el conjunto de puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. ($2a > 0$)



Elementos característicos:

- *Focos* (F, F'): los dos puntos fijos. La distancia focal es $2c$.

- *Centro* (O): Punto medio del segmento $\overline{FF'}$.
- *Eje focal*: recta que pasa por los focos.
- *Eje normal*: mediatriz del segmento $\overline{FF'}$.
- *Vértices* (A, A', B, B'): Puntos de corte de la elipse con los ejes focal y normal.
- *Eje mayor*: segmento $\overline{AA'}$ de longitud $2a$.
- *Eje menor*: segmento $\overline{BB'}$ de longitud $2b$.
- *Radio vectores de P*: segmentos \overline{PF} y $\overline{PF'}$.
- *Excentricidad*: $e = \frac{c}{a}$. Se tiene que $0 \leq e < 1$. Indica lo achatada que puede ser la elipse.

Relación fundamental: $a^2 = b^2 + c^2$.

Ecuaciones: (elipses con ejes paralelos a los ejes de coordenadas)

Ecuación reducida: Elipse de centro $O(x_0, y_0)$

- Eje focal paralelo a OX : $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

- Eje focal paralelo a OY : $\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$.

Ecuación general: $Mx^2 + Ny^2 + Ax + By + C = 0$, siendo M y N del mismo signo y $|M|B^2 + |N|A^2 - 4MN|C| > 0$.

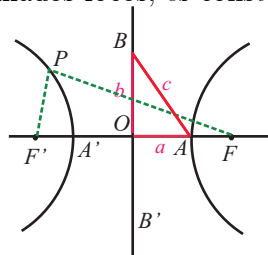
Longitud y área

- *Longitud*: $\approx 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

- *Área*: πab

Hipérbola

Una hipérbola es el conjunto de puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. ($2a > 0$)



Elementos característicos:

- *Focos* (F, F'): los dos puntos fijos. La distancia focal es $2c$.
- *Centro* (O): Punto medio del segmento $\overline{FF'}$.
- *Eje focal*: recta que pasa por los focos.
- *Eje normal*: mediatriz del segmento $\overline{FF'}$.
- *Vértices* (A, A'): Puntos de corte de la hipérbola con el eje focal.

- *Eje real*: segmento $\overline{AA'}$. Su longitud es $2a$.
- *Eje imaginario*: segmento $\overline{BB'}$ de longitud $2b$, donde B y B' son los puntos de corte del eje normal y la circunferencia de centro A y radio c .
- *Radio vectores de P* : segmentos \overline{PF} y $\overline{PF'}$.
- *Excentricidad*: $e = \frac{c}{a}$. Se tiene que $e > 1$. Indica lo abierta o cerrada que está la hipérbola.
- *Asíntotas*: (hipérbola de centro $O(x_0, y_0)$)
 - Eje focal paralelo a OX : $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$.
 - Eje focal paralelo a OY : $x - x_0 = \pm \frac{b}{a}(y - y_0)$.

Relación fundamental: $c^2 = a^2 + b^2$.

Ecuaciones: (hipérbolas con ejes paralelos a los ejes de coordenadas)

Ecuación reducida: Hipérbola de centro $O(x_0, y_0)$

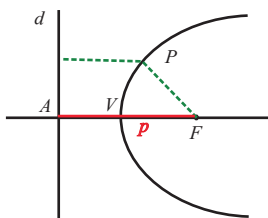
- Eje focal paralelo a OX : $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

- Eje focal paralelo a OY : $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$.

Ecuación general: $Mx^2 + Ny^2 + Ax + By + C = 0$, siendo M y N de distinto signo.

Parábola

Una parábola es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y de una recta fija llamada directriz.



Elementos característicos:

- *Foco (F)*: el punto fijo.
- *Directriz (d)*: recta fija.
- *Eje*: recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.
- *Parámetro (p)*: distancia del foco a la directriz.
- *Vértice (V)*: Punto de corte de la parábola con el eje. Es el punto medio del segmento \overline{AF} , donde A es el punto de corte del eje y la directriz.
- *Radio vector de P* : segmento \overline{PF} .

Ecuaciones: (parábolas con ejes paralelos a los ejes de coordenadas)

Ecuación reducida: Parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ y parámetro p .

- Eje paralelo a OX y abierta a la derecha: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

- Eje paralelo a OX y abierta a la izquierda: $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$.
- Eje paralelo a OY y abierta hacia arriba: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.
- Eje paralelo a OY y abierta hacia abajo: $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$.

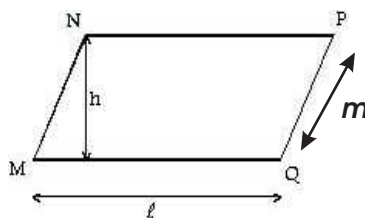
Ecuación general:

- Eje paralelo a OX : $x = Ay^2 + By + C$, siendo $A \neq 0$.
- Eje paralelo a OY : $y = Ax^2 + Bx + C$, siendo $A \neq 0$.

6.2 Fórmulas geométricas

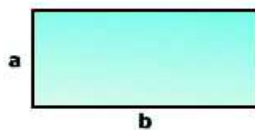
6.2.1 Figuras planas

Paralelogramo



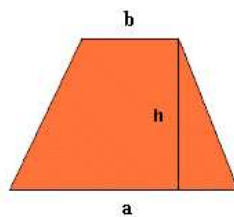
- *Perímetro*: $2l + 2m$
- *Área*: lh

En el caso particular del rectángulo

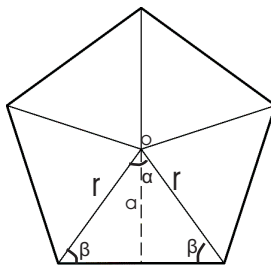


- *Área*: ab

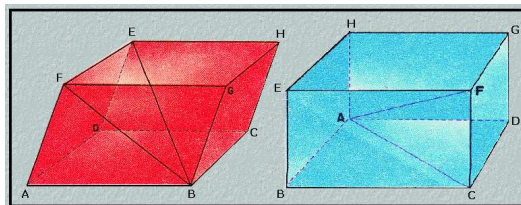
Trapecio



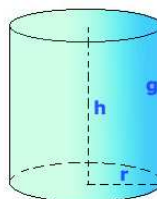
Si a y b son los lados paralelos del trapecio (denominados base mayor y base menor) y h su altura el área del mismo, será $\frac{h}{2}(a + b)$.

Polígono regular de n lados

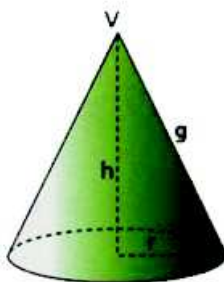
Se denomina radio del polígono (r) a cualquiera de los segmentos que une el centro del mismo (O) con uno de sus vértices. El triángulo formado por un lado y los dos radios correspondientes a los dos vértices de ese lado, es siempre isósceles cuyo ángulo (α) en el centro del polígono es de $\frac{2\pi}{n}$ radianes, por lo que los otros dos ángulos (β), al ser iguales, son de $\frac{\pi - \frac{2\pi}{n}}{2}$ radianes. La altura, desde el centro del polígono, de cada uno de estos triángulos, recibe el nombre de apotema (a). Si denominamos p al perímetro (suma de todos sus lados) del polígono y por a a su apotema, el área del mismo viene dada por $\frac{p \cdot a}{2}$.

6.2.2 Sólidos en el espacioParalelepípedo

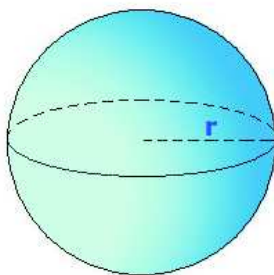
El volumen de un paralelepípedo viene dado por el producto del área de la base por la altura. Puede tomarse como base cualquiera de sus caras y la altura será la distancia de ésta a la cara paralela. En caso de que las caras del paralelepípedo sean todas rectangulares, el volumen será el producto de las longitudes de sus aristas y cuando sean cuadrados el volumen será el cubo de la longitud de cualquier arista. La superficie lateral viene dada por la suma de las áreas de todas sus caras.

Cilindro circular recto

- Área lateral: $2\pi rh$
- Área total: $2\pi rh + 2\pi r^2$
- Volumen: $\pi r^2 h$

Cono circular recto

- Área lateral: $\pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r g$
- Área total: $\pi r \sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2 = \pi r g + \pi r^2$
- Volumen: $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

Esfera

- Área lateral: $4\pi r^2$
- Volumen: $\frac{4}{3} \pi r^3$

6.3 Ejercicios

1. Hallar la ecuación de la circunferencia en cada uno de los siguientes casos.
 - (a) Pasa por el punto $P(3, 2)$ y tiene su centro en el origen de coordenadas.
 - (b) Su diámetro es el segmento de extremos $(2, 3)$ y $(-2, -3)$.
 - (c) Pasa por los puntos $P(0, -3)$, $Q(5, 3)$ y $R(-3, 5)$.
2. Estudiar si las siguientes ecuaciones representan una circunferencia y, en su caso, hallar el centro y el radio.
 - (a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.
 - (b) $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 6 = 0$.
 - (c) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y + 8 = 0$.
 - (d) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$.
3. Hallar la ecuación de la elipse en cada uno de los casos siguientes.
 - (a) Pasa por $P(2, -3)$ y sus focos son $F(2, 0)$ y $F'(-2, 0)$.

- (b) Sus focos son $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$ y dos de sus vértices $(4, 0)$ y $(-4, 0)$.
 - (c) Tiene centro $O(2, -3)$, uno de sus focos es $(-2, -3)$ y uno de sus vértices $(-3, -3)$.
 - (d) La distancia entre los focos, situados en el eje OY , es 16, el eje mayor 20 y su centro es el origen.
 - (e) El semieje menor es 3, la distancia focal 8, su centro $O(2, -3)$ y tiene eje focal paralelo a OX .
 - (f) El eje menor es 8, la excentricidad 0.6, su centro $O(-1, 2)$ y tiene eje focal paralelo a OY .
4. Encontrar los elementos característicos de las siguientes elipses y representarlas gráficamente.
- (a) $x^2 + 4y^2 = 16$.
 - (b) $x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 13 = 0$.
 - (c) $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 31 = 0$.
 - (d) $36x^2 + 9y^2 + 48x - 36y + 43 = 0$.
5. Calcular la ecuación de la hipérbola en cada uno de los casos que siguen.
- (a) Su centro es $O(3, 5)$, uno de sus focos $F(6, 5)$ y su excentricidad vale 2.
 - (b) Pasa por $P(4, 3)$, la distancia entre sus vértices es 8, su centro $O(-2, 0)$ y tiene eje focal paralelo a OX .
 - (c) Pasa por $P(3, -1)$ y $Q(6, 5)$, tiene su centro en el origen y OX como eje focal.
 - (d) Pasa por el punto $P(0, 5)$ y tiene vértices $(2, 3)$ y $(2, -3)$.
6. Reducir las siguientes hipérbolas a su forma reducida, determinar sus elementos característicos y representarlas gráficamente.
- (a) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y - 89 = 0$.
 - (b) $9y^2 - 16x^2 + 54y + 64x - 127 = 0$.
 - (c) $4x^2 - 9y^2 + 12x - 30y + 9 = 0$.
 - (d) $y^2 - 9x^2 - 4y + 36x - 28 = 0$.
7. En los siguientes casos, determinar la ecuación y la gráfica de la parábola.
- (a) Su directriz es la recta $y + 2 = 0$ y el foco $F(0, 2)$.
 - (b) Tiene su eje paralelo a OX , el vértice en $V(-2, 4)$ y pasa por $P(0, 2)$.
 - (c) Su foco es $F(0, -3)$ y su vértice el origen.
 - (d) Tiene vértice en $(1, 3)$ y como directriz la recta $x - 5 = 0$.

8. Hallar los elementos característicos de las siguientes parábolas y represéntalas gráficamente.

(a) $y^2 = 8x$.

(b) $(x - 1)^2 + 8(y + 2) = 0$.

(c) $y = x^2 - 8x + 10$.

(d) $4x - y^2 - 2y - 33 = 0$.

9. Clasifica la cónica que corresponde a cada una de las siguientes ecuaciones.

(a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$.

(b) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$.

(c) $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$.

(d) $y^2 - 4y - 4x = 0$.

(e) $25x^2 - 10x - 200y - 119 = 0$.

(f) $4x^2 + 4y^2 - 16y + 15 = 0$.

(g) $4x^2 + 8x + 51 = 24y - 3y^2$.

(h) $4x^2 + 2y^2 - 8y + 11 = 0$.

10. Calcular la superficie del cuadrado cuya diagonal mide 10 *cm*.

11. El área de un cuadrado es de 1764 *m*². Calcular el área de un hexágono regular que tiene el mismo perímetro.

12. Entre un cuadrado y un rectángulo con el mismo perímetro, ¿cuál tiene mayor área?

13. Un cuadrado y un triángulo rectángulo tienen la misma área de 36 *cm*². El triángulo tiene un cateto de 0.4 *dm*. Determinar el perímetro de las dos figuras.

14. Calcular el área y el perímetro de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 4 *m* de diámetro.

15. Calcular el área de un rectángulo de perímetro 96 *cm* inscrito en una circunferencia de radio 2.3 *dm*.

16. Calcular el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 14 *cm* y 6 *cm*, y los lados iguales 8 *cm*.

17. Las diagonales de un trapecio rectángulo miden 26 *cm* y 30 *cm*, y su altura es de 24 *cm*. Calcular el área.

18. Calcular el área de un trapecio isósceles sabiendo que tiene 180 *m* de perímetro, la diferencia entre las bases es de 2.4 *dam* y los lados iguales miden 200 *dm* cada uno.

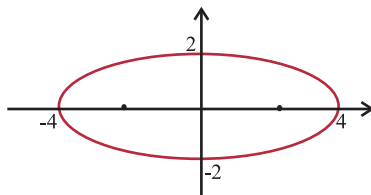
19. Hallar las áreas, y las longitudes de las circunferencias, de los círculos inscritos y circunscritos a un cuadrado de lado 4 dm .
20. Las longitudes de los lados de dos cuadrados son 4 m y 6 m respectivamente. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?
21. Determinar la longitud de la circunferencia inscrita en un cuadrado de área 144 m^2 .
22. Una pista circular está rodeada por dos vallas concéntricas de 1500 m y 1200 m de longitud. Determinar el ancho de la pista.
23. Dado un hexágono regular de apotema 10 cm , calcular el radio del círculo inscrito al hexágono, el radio del círculo circunscrito al hexágono y el área de la corona circular determinada por ambos círculos. Demostrar que este área coincide con la del círculo que tiene por diámetro el lado del hexágono.
24. La longitud de una circunferencia es de $8\pi\text{ m}$. Calcular su radio y el perímetro del cuadrado inscrito en la circunferencia.
25. Calcular la diagonal de un cubo de arista 1 m y la diagonal de un cubo de arista 2 m . ¿Puedes prever la relación entre las diagonales?
26. Un depósito de forma cúbica tiene 12 m de arista. ¿Cuánto costará pintarlo por dentro y por fuera a razón de 3 euros por m^2 ?
27. ¿Cuál es la diagonal de un cubo cuyo volumen es el doble de otro cubo que tiene 2.20 m de arista?
28. Una caja de galletas tiene forma de cubo de 24 cm de arista. ¿Cuánto cartón se necesita para construirla?
29. Una caja de zapatos mide 36 cm de largo por 22 cm de ancho y tiene 14 cm de altura. ¿Qué volumen tiene? ¿Cuánto cartón se necesita para hacer cada caja? ¿Podemos guardar en ella 45 cubos de 5 cm de arista?
30. Una caja de hojalata tiene 1.8 m de largo, 1.08 m de ancho y 1.5 m de profundidad. ¿Cuál es en litros su capacidad?
31. La torre Picasso de Madrid es una inmensa caja cuyas dimensiones son 40 m , 40 m y 150 m . Imagina que está hueca por dentro. ¿Cuántas cajas cúbicas de 1 m de arista podrías introducir? Si pudieras colocar esas cajas una encima de otra formando una gran pila, ¿qué altura alcanzaría?
32. La arista exterior de una caja cúbica sin tapa mide 10 cm y el espesor del material mide 5 mm . Calcular el volumen interior de la caja.

33. Una piscina contiene agua hasta los $\frac{4}{5}$ de su capacidad. Sus dimensiones son 14 *m* de largo por 6 *m* de ancho y por 2.5 *m* de profundidad. ¿Cuántos litros de agua tiene la piscina?
34. Un pintor da el presupuesto para pintar una habitación, de base rectangular de lados 3 *m* y 5 *m*, y cuya altura es de 3.75 *m*. Debe pintar también el techo, pero tiene que descontar entre puertas y ventanas una superficie de 10 *m*². Si pide 5 euros por metro cuadrado, ¿cuánto costará pintar la habitación?
35. Un depósito de gas tiene forma cilíndrica y sus extremos están cerrados por dos semiesferas. La longitud del cilindro es de 1.5 *m* y su diámetro es de 1 *m*. Calcula el volumen del depósito.
36. Si queremos envasar 12000 litros de tomate frito en botes cilíndricos de 12 *cm* de diámetro y 18 *cm* de altura, ¿cuántos botes necesitaremos?
37. La altura de un bote de tomate frito es de 11 *cm* y el diámetro de sus bases mide 7 *cm*. La superficie curva está recubierta de papel, ¿qué cantidad de papel se necesita para forrar 50 botes?
38. Hallar el volumen de un cilindro que tiene de altura 1 *m* y cuya área total es igual a la de un círculo de 400 *cm* de diámetro.
39. El área lateral de un cilindro es de 942 *cm*² y su altura es de 15 *cm*. ¿Cuál es su volumen?
40. El agua contenida en un vaso cilíndrico de 35 *cm* de diámetro y de 1 *m* de altura ha de envasarse en otro cilindro de 80 *cm* de diámetro. ¿Hasta qué altura subirá el nivel del agua en el segundo cilindro?
41. La longitud de la base de un cono es de 31.4 *cm*, sabiendo que su generatriz mide 13 *cm*. Calcula el área de la base, el área lateral, el área total y el volumen del cono.
42. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya generatriz es de 1.6 *m* y la altura es de 1 *m*?
43. Un embudo de hojalata con forma de cono mide 8 *cm* de radio y 24 *cm* de altura. ¿Qué cantidad de hojalata se necesita para construirlo? ¿Cuál será la capacidad del embudo cuando está lleno?
44. Si duplico la altura de un cono o un cilindro, ambos rectos, ¿se duplican sus volúmenes y sus superficies laterales?
45. ¿Cuánto costará pintar de dorado una bola de 25 *cm* de radio si el metro cuadrado de pintura dorada vale 10 euros?
46. Un balón de fútbol mide 22 *cm* de diámetro. ¿Cuál es su volumen?

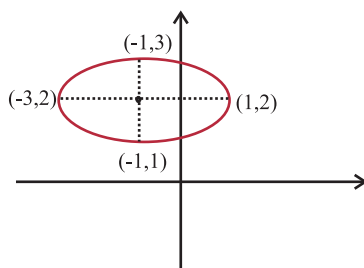
47. Si se considera la Tierra como una esfera de 12728 Km de diámetro. ¿Cuál es su volumen? ¿Y su superficie? ¿Cuál es la relación entre el volumen de un balón de fútbol y el de la Tierra?
48. En una esfera de radio 3 cm , si duplico el radio, ¿se duplica el volumen de la esfera resultante?
49. Un cubo y una esfera de radio r tienen la misma superficie. ¿Cuál de los dos sólidos tiene mayor volumen?

6.4 Soluciones

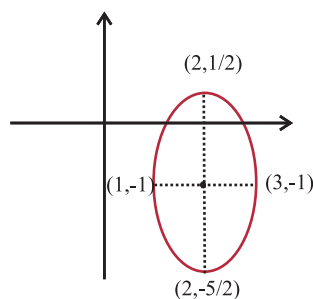
1. (a) $x^2 + y^2 = 13$.
 (b) $x^2 + y^2 = 13$.
 (c) $29x^2 + 29y^2 - 25x - 100y - 561 = 0$.
2. (a) Centro $O = (2, -1)$; radio $r = 3$.
 (b) Centro $O = (2, 1)$; radio $r = \sqrt{8}$.
 (c) Centro $O = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$; radio $r = \frac{3}{2}$.
 (d) No es una circunferencia.
3. (a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.
 (b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.
 (c) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$.
 (d) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$.
 (e) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$.
 (f) $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$.
4. (a) Centro $O = (0, 0)$; Focos $F = (2\sqrt{3}, 0)$, $F' = (-2\sqrt{3}, 0)$; Vértices $A = (4, 0)$, $A' = (-4, 0)$, $B = (0, 2)$, $B' = (0, -2)$; excentricidad $= \sqrt{3}/2$.



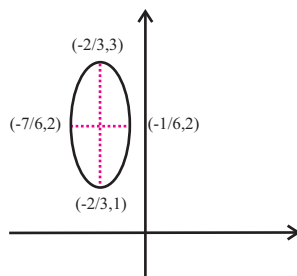
(b) Centro $O = (-1, 2)$; Focos $F = (-1 + \sqrt{3}, 2)$, $F' = (-1 - \sqrt{3}, 2)$; Vértices $A = (1, 2)$, $A' = (-3, 2)$, $B = (-1, 3)$, $B' = (-1, 1)$; excentricidad $= \sqrt{3}/2$.



(c) Centro $O = (2, -1)$; Focos $F = (2, -1 + \frac{\sqrt{5}}{2})$, $F' = (2, -1 - \frac{\sqrt{5}}{2})$; Vértices $A = (2, \frac{1}{2})$, $A' = (2, -\frac{5}{2})$, $B = (1, -1)$, $B' = (3, -1)$; excentricidad $= \sqrt{5}/3$.



(d) Centro $O = (-\frac{2}{3}, 2)$; Focos $F = (-\frac{2}{3}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2})$, $F' = (-\frac{2}{3}, 2 - \frac{\sqrt{3}}{2})$; Vértices $A = (-\frac{2}{3}, 3)$, $A' = (-\frac{2}{3}, 1)$, $B = (-\frac{7}{6}, 2)$, $B' = (-\frac{1}{6}, 2)$; excentricidad $= \frac{\sqrt{3}}{2}$.



5. (a) $3(x - 3)^2 - (y - 5)^2 = 27$.

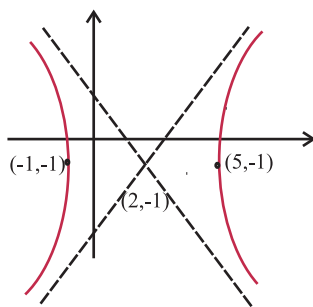
(b) $9(x + 2)^2 - 20y^2 = 144$.

(c) $8x^2 - 9y^2 = 63$.

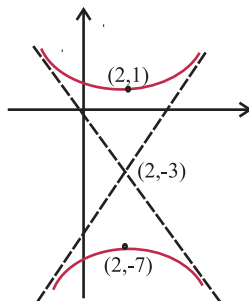
(d) $y^2 - 4(x - 2)^2 = 9$.

6. (a) $\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$; Centro $O = (2, -1)$; Focos $F = (7, -1)$, $F' = (-3, -1)$;

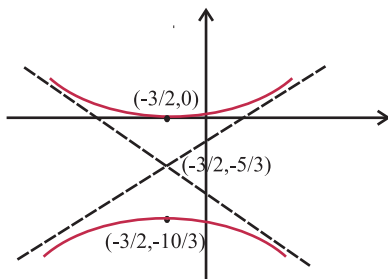
Vértices $A = (5, -1)$, $A' = (-1, -1)$; excentricidad $= 5/3$.



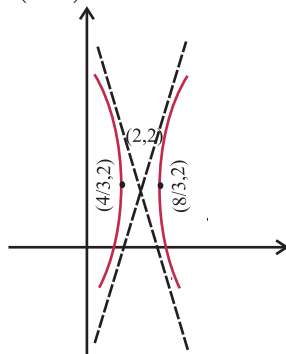
(b) $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$; Centro $O = (2, -3)$; Focos $F = (2, 2)$, $F' = (2, -8)$; Vértices $A = (2, 1)$, $A' = (2, -7)$; excentricidad $= 5/4$.



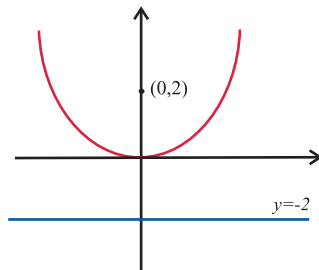
(c) $\frac{(y+5/3)^2}{25/9} - \frac{(x+3/2)^2}{25/4} = 1$; Centro $O = (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{3})$; Focos $F = (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{3} + \frac{5\sqrt{13}}{6})$, $F' = (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{3} - \frac{5\sqrt{13}}{6})$; Vértices $A = (-\frac{3}{2}, 0)$, $A' = (-\frac{3}{2}, -\frac{10}{3})$; excentricidad $= \frac{\sqrt{13}}{2}$.



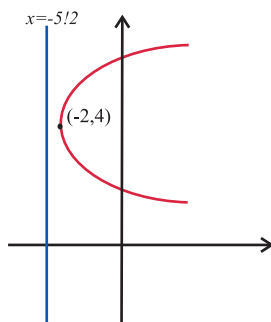
(d) $\frac{(x-2)^2}{4/9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$; Centro $O = (2, 2)$; Focos $F = (2 + \frac{2\sqrt{10}}{3}, 2)$, $F' = (2 - \frac{2\sqrt{10}}{3}, 2)$; Vértices $A = (\frac{8}{3}, 2)$, $A' = (\frac{4}{3}, 2)$; excentricidad $= \sqrt{10}$.



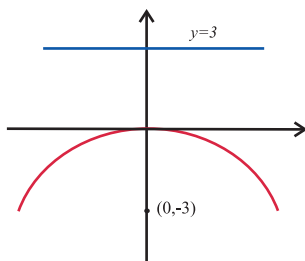
7. (a) $x^2 = 8y$.



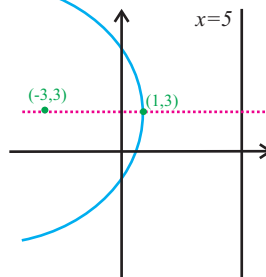
(b) $(y - 4)^2 = 2(x + 2)$.



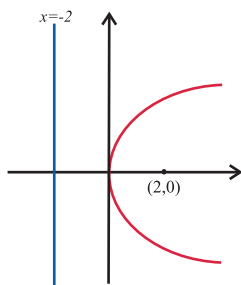
(c) $x^2 = -12y$.



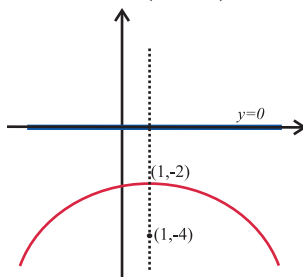
(d) $(y - 3)^2 = -16(x - 1)$.



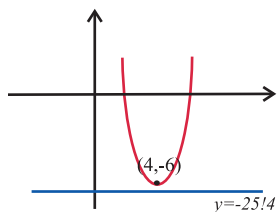
8. (a) Vértice $V = (0, 0)$; Foco $F = (2, 0)$; directriz: $x + 2 = 0$; parámetro $p = 4$; eje $y = 0$.



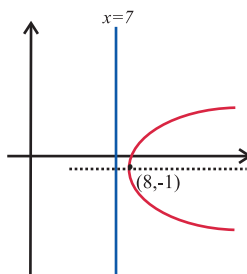
(b) Vértice $V = (1, -2)$; Foco $F = (1, -4)$; directriz: $y = 0$; parámetro $p = 4$; eje $x = 1$.



(c) Vértice $V = (4, -6)$; Foco $F = \left(4, -\frac{23}{4}\right)$; directriz: $y + \frac{25}{4} = 0$; parámetro $p = \frac{1}{2}$; eje $x = 4$.



(d) Vértice $V = (8, -1)$; Foco $F = (9, -1)$; directriz: $x - 7 = 0$; parámetro $p = 2$; eje $y = -1$.



9. (a) Circunferencia.

(b) Elipse.

(c) Hipérbola.

(d) Parábola.

(e) Parábola.

(f) Circunferencia.

(g) Elipse.

(h) No es ninguna cónica.

10. Superficie = 50 cm^2 .

11. Área = $1176\sqrt{3} \text{ m}^2 \approx 2036.9 \text{ m}^2$.

12. El cuadrado.

13. $p_{\text{cuadrado}} = 24 \text{ cm}$ y $p_{\text{triángulo}} = (22 + 2\sqrt{85}) \text{ cm} \approx 40.4 \text{ cm}$.
14. Área = $6\sqrt{3} \text{ m}^2$; perímetro = 12 m .
15. Área = 94 cm^2 .
16. Área = $40\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 69.28 \text{ cm}^2$
17. Área = 336 cm^2 .
18. Área = 1120 m^2 .
19. Círculo inscrito: Área = $4\pi \text{ dm}^2$; longitud = $4\pi \text{ dm}$. Círculo circunscrito: Área = $8\pi \text{ dm}^2$; longitud = $4\sqrt{2}\pi \text{ dm}$.
20. Razón per = $\frac{2}{3}$; Razón áreas = $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.
21. Longitud = $12\pi \text{ m}$.
22. Ancho = $\frac{150}{\pi} \text{ m}$.
23. Radio circ insc = 10 cm ; Radio circ circuns = $\frac{20}{\sqrt{3}} \text{ cm}$; Área corona = $\frac{100\pi}{3} \text{ cm}^2$.
24. Radio = 4 m ; Perímetro Cuadr = $16\sqrt{2} \text{ m}$.
25. $\text{Diag}_1 = \sqrt{3} \text{ m}$; $\text{Diag}_2 = 2\sqrt{3} \text{ m}$; $d_l' = \frac{l'}{l}d_l$, siendo l' y l las respectivas aristas.
26. Coste = 5184 euros, si el depósito tiene tapa. En caso de no tenerla Coste = 4320 euros.
27. Diagonal = $2.2\sqrt[3]{2}\sqrt{3} \text{ m}$.
28. Cantidad de cartón = 3456 cm^2
29. Volumen = 11088 cm^3 ; Cartón necesario = 3208 cm^2 si la caja tiene tapa. En caso de no tenerla Cartón necesario = 2416 cm^2 . Sí se pueden guardar en ella los cubos.
30. Capacidad = 2916 l .
31. Número de cajas = 240000 ; Altura = 240 Km .
32. Volumen interior = 769.5 cm^3 .
33. Solución = 168000 l .
34. Coste = 325 euros.
35. Volumen = $\frac{13\pi}{24} \text{ m}^3$.
36. Número de botes ≈ 5898 .

- 37. Cantidad papel = $3850\pi \text{ cm}^2$.
- 38. Volumen = $\pi \text{ m}^3$.
- 39. Volumen = $\frac{73947}{5\pi} \text{ cm}^3$.
- 40. Altura = 19.14 cm .
- 41. Si tomamos $\pi = 3.14$, Área base = 78.5 cm^2 ; Área lateral = 204.1 cm^2 ; Área total = 282.6 cm^2 ; Volumen = 314 cm^3 .
- 42. Volumen = $\frac{1.56\pi}{3} \text{ m}^3$.
- 43. Cantidad hojalata = $64\sqrt{10}\pi \text{ cm}^2$; Capacidad = $512\pi \text{ cm}^3$.
- 44. Los volúmenes se duplican en ambos sólidos. En cuanto a las superficies laterales, la del cilindro se duplica y la del cono no se duplica.
- 45. Coste = 2.5π euros.
- 46. Volumen = $1774.66\pi \text{ cm}^3$.
- 47. Volumen = $343660208725.33 \pi \text{ Km}^3$; Superficie = $162001984\pi \text{ Km}^2$.
- 48. No se duplica.
- 49. La esfera tiene mayor volumen.

7 GEOMETRÍA VECTORIAL.

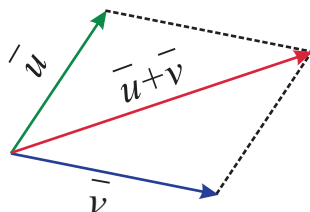
7.1 El plano y el espacio euclídeos. Operaciones

7.1.1 Introducción

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\} ; \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Es usual representar, por comodidad, a los elementos de estos conjuntos por \overline{u} , entendiéndose que tienen dos o tres coordenadas según trabajemos en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 y se les denomina **vectores**. En estos conjuntos se definen dos operaciones: una interna llamada **suma** y una externa llamada **producto por un escalar**.

7.1.2 Suma



$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{y} \quad (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

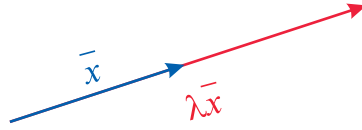
Ejemplos:

- $(1, 2) + (-4, 5) = (1 + [-4], 2 + 5) = (-3, 7)$
- $(1, 2, -3) + (4, \frac{1}{2}, 2.5) = (1 + 4, 2 + \frac{1}{2}, -3 + 2.5) = (5, \frac{5}{2}, -0.5)$

Esta operación verifica las propiedades usuales de una suma: sean \overline{u} , \overline{v} , \overline{w} vectores de \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3).

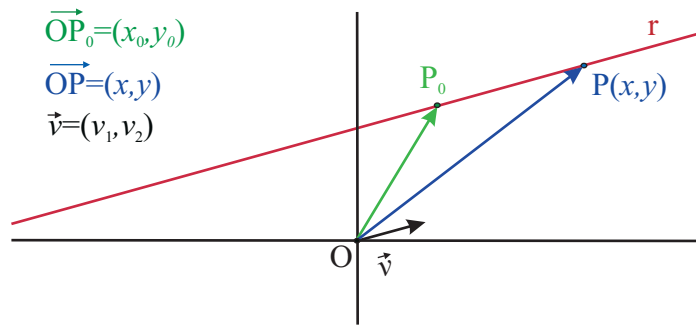
1. Asociativa: $\overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w}$
2. Conmutativa: $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$
3. Elemento neutro: $\overline{u} + \overline{0} = \overline{u}$, $\overline{0} = (0, 0)$ ó $\overline{0} = (0, 0, 0)$
4. Opuesto: $\overline{u} + (-\overline{u}) = \overline{0}$, $-\overline{u} = (-x, -y)$ ó $-\overline{u} = (-x, -y, -z)$

7.1.3 Producto por un escalar



$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \text{ y } \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \text{ donde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esta operación está relacionada con el paralelismo de vectores, de forma que dos vectores \bar{u} , \bar{v} son paralelos si y sólo si existe un número real α tal que $\bar{u} = \alpha \bar{v}$ y se escribe $\bar{u} \parallel \bar{v}$. Una aplicación geométrica de este último hecho son las ecuaciones vectoriales y paramétricas de las **rectas**, tanto en el plano como en el espacio.



- (a) En \mathbb{R}^2 , la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0)$ y que tiene como vector director a $\bar{v} = (v_1, v_2)$, se obtiene al tener en cuenta que dado un punto cualquiera $P(x, y)$ de la recta debe ocurrir que $\overline{P_0P} \parallel \bar{v}$ y este hecho caracteriza a todos los puntos de la recta. Por lo tanto $\overline{P_0P} = \lambda \bar{v}$. Recordar que las coordenadas del vector que une dos puntos se calculan restando a las coordenadas del punto extremo las del punto origen. Luego:

$$(x - x_0, y - y_0) = \lambda (v_1, v_2) \Leftrightarrow (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda (v_1, v_2) \quad (\text{Ec. vectorial})$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \end{cases} \quad (\text{Ec. Paramétricas})$$

- (b) Análogamente, en \mathbb{R}^3 , la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que tiene como vector director a $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$, será :

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda (v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (v_1, v_2, v_3) \quad (\text{Ec. vectorial})$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{cases} \quad (\text{Ec. Paramétricas})$$

Ejemplos:

$$\bullet \frac{2}{3} (1, -3) = \left(\frac{2}{3} \cdot 1, \frac{2}{3} \cdot [-3]\right) = \left(\frac{2}{3}, -2\right)$$

- $\sqrt{5} (4, -1, 0) = (\sqrt{5} 4, \sqrt{5} [-1], \sqrt{5} 0) = (4 \sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0)$
- Hallar la recta que pasa por el punto $P_0(1, 1)$ y tiene como vector director a $\vec{v} = (-2, 3)$.

$$(x - 1, y - 1) = \lambda (-2, 3) \Leftrightarrow (x, y) = (1, 1) + \lambda (-2, 3) \quad (\text{Ec. vectorial})$$

$$\begin{cases} x = 1 - 2 \lambda \\ y = 1 + 3 \lambda \end{cases} \quad (\text{Ec. Paramétricas})$$

- Hallar la recta que pasa por los puntos $P_0(1, -2, 0)$ y $P_1(2, 3, -1)$.

En primer lugar hemos de averiguar el vector director de la recta, pero es obvio que debe ser el que une los dos puntos dados, es decir $\vec{v} = \overline{P_0P_1} = (1, 5, -1)$. A partir de aquí la cosa es sencilla

$$(x-1, y-(-2), z-0) = \lambda (1, 5, -1) \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -2, 0) + \lambda (1, 5, -1) \quad (\text{Ec. vectorial})$$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 5 \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad (\text{Ec. Paramétricas})$$

Las propiedades más importantes de esta operación son: sean \vec{u} , \vec{v} vectores de \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3), y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

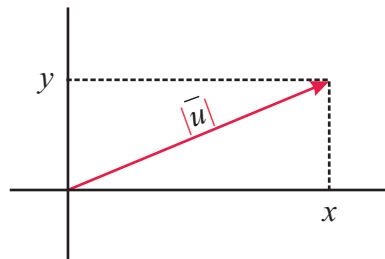
1. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
2. $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
3. $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$
4. $1\vec{u} = \vec{u}$
5. $0\vec{u} = \vec{0}$
6. $\lambda\vec{0} = \vec{0}$

7.2 Módulo de un vector

Se define el **módulo** de un vector como

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2) ; \quad |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

Este número mide el tamaño del vector.



Ejemplos:

- $|(2, 3)| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$
- $|(-1, \frac{1}{2}, 4)| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 16} = \frac{\sqrt{4 + 1 + 64}}{2} = \frac{\sqrt{69}}{2}$

Un vector se dice **unitario** si su módulo es 1. Se denominan **vectores unitarios canónicos** a los siguientes:

$$\vec{i} = (1, 0), \quad \vec{j} = (0, 1) \quad (\text{en } \mathbb{R}^2)$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1) \quad (\text{en } \mathbb{R}^3)$$

Todo vector de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , se expresa como combinación lineal de los correspondientes vectores canónicos

$$\vec{u} = (x, y) = x \vec{i} + y \vec{j} \quad , \quad \vec{u} = (x, y, z) = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

7.3 Producto escalar

Dados dos vectores no nulos \vec{u} y \vec{v} , se define el **producto escalar** de estos como el número real:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

siendo α el ángulo que forman dichos vectores. Si uno de los vectores es nulo, el producto escalar es cero. El producto escalar también dará cero cuando los vectores sean **perpendiculares**, ya que en dicho caso el ángulo formado por estos es de 90° y $\cos(90^\circ) = 0$.

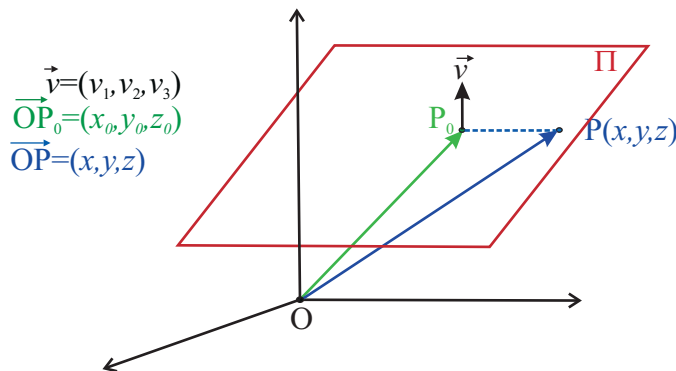
El producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

En términos de coordenadas el producto escalar se expresa como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \quad (\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \quad (\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3)$$

Este último hecho nos permite hallar la ecuación de un **plano** que pasa por un punto dado $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y tiene como vector perpendicular, es decir, vector director a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.



Nótese que si $P(x, y, z)$ es cualquier punto del plano mencionado, ha de ocurrir que los vectores $\overrightarrow{P_0P}$ y \vec{v} sean perpendiculares, y además esta cuestión caracteriza a todos los puntos de ese plano. Por tanto:

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0$$

llegándose a la ecuación general del plano

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A = v_1, B = v_2, C = v_3, D = -[v_1x_0 + v_2y_0 + v_3z_0])$$

7.3.1 Propiedades

Sean \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} vectores en el plano o en el espacio y λ número real.

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $\lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$
4. $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$

Es fácil comprobar que el módulo de un vector puede escribirse como $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ y que un vector unitario verifica que $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$.

Ejemplos:

- $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (0, -2) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -6$
- $\vec{u} = (-1, 2, \frac{1}{2})$, $\vec{v} = (4, \frac{1}{3}, -2) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -(1) \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot (-2) = -4 + \frac{2}{3} - 1 = \frac{-13}{3}$
- Calcular el ángulo entre los vectores $\vec{u} = (-4, 0, 2)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$.

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-10}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}} = -1 \Rightarrow \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \pi \text{ rad.}$$

- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P_0(2, 1, 1)$ y tiene como vector director a $\vec{v} = (9, 6, 12)$.

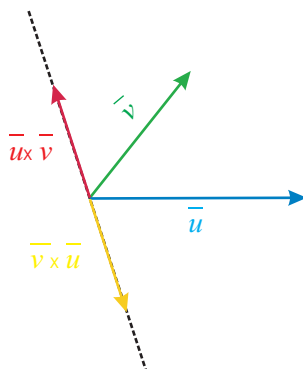
$$(x-2, y-1, z-1) \cdot (9, 6, 12) = 0 \Leftrightarrow 9(x-2) + 6(y-1) + 12(z-1) = 0 \Leftrightarrow 9x + 6y + 12z - 36 = 0$$

es decir

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0$$

7.4 Producto vectorial

Dados los vectores $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^3$ que forman un ángulo α , se llama **producto vectorial** de \overline{u} y \overline{v} a un vector que representamos por $\overline{u} \times \overline{v}$ y queda caracterizado del siguiente modo:



Módulo: $|\overline{u} \times \overline{v}| = |\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \cdot \sin \alpha$

Dirección: perpendicular al plano determinado por los vectores \overline{u} y \overline{v}

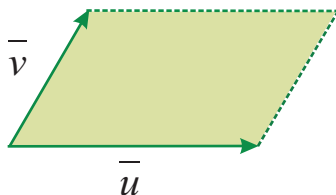
Sentido: el de avance de un sacacorchos que gira en sentido positivo de \overline{u} a \overline{v}

7.4.1 Propiedades

Sean $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ vectores en el espacio y λ número real.

1. $\overline{u} \times \overline{v} = -(\overline{v} \times \overline{u})$
2. $\overline{u} \times (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \times \overline{v} + \overline{u} \times \overline{w}$
3. $\lambda (\overline{u} \times \overline{v}) = (\lambda \overline{u}) \times \overline{v} = \overline{u} \times (\lambda \overline{v})$
4. $\overline{u} \times \overline{0} = \overline{0} \times \overline{u} = \overline{0}$
5. $\overline{u} \times \overline{u} = \overline{0}$

El módulo del vector $\overline{u} \times \overline{v}$ es igual al **área del paralelogramo** que tiene por lados adyacentes a los vectores \overline{u} y \overline{v} .



En términos de coordenadas, el producto vectorial se expresa como: $\overline{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{v} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\overline{u} \times \overline{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

Una regla, fácil de recordar, para calcular las coordenadas de $\vec{u} \times \vec{v}$ es el desarrollo del siguiente pseudo-determinante

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}$$

Ejemplos:

- $\vec{u} = (1, -4, 1)$, $\vec{v} = (2, 3, 0)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = -3 \vec{i} + 2 \vec{j} + 11 \vec{k} = (-3, 2, 11)$$

- Mostrar que el cuadrilátero con vértices en los puntos siguientes es un paralelogramo y calcular su área. $A(5, 2, 0)$, $B(2, 6, 1)$, $C(2, 4, 7)$, $D(5, 0, 6)$.

Los lados del cuadrilátero los constituyen los cuatro vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{CB} , y \overrightarrow{CD} . Hallemos dichos vectores

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 4, 1); \quad \overrightarrow{AD} = (0, -2, 6); \quad \overrightarrow{CB} = (0, 2, -6); \quad \overrightarrow{CD} = (3, -4, -1)$$

es fácil apreciar que $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ y que $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$, luego los lados del cuadrilátero son paralelos dos a dos, es decir, es un paralelogramo. En cuanto al área de éste, bastará con calcular el módulo del vector que se obtiene al multiplicar vectorialmente dos de los vectores adyacentes que constituyen sus lados.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 26 \vec{i} + 18 \vec{j} + 6 \vec{k} = (26, 18, 6)$$

y el módulo de este vector nos dará el área buscada

$$\text{Área} = \sqrt{(26)^2 + (18)^2 + (6)^2} = \sqrt{1036} \text{ u.a.}$$

- Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos $P_0(2, 1, 1)$, $P_1(0, 4, 1)$ y $P_2(-2, 1, 4)$. Por lo visto hasta ahora, lo pedido sería sencillo si conociésemos un vector perpendicular al plano. Este vector puede obtenerse fácilmente efectuando el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$.

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} = (9, 6, 12)$$

por lo que el plano buscado será

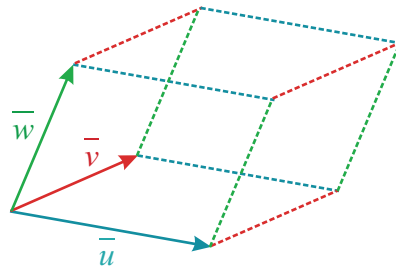
$$9(x - 2) + 6(y - 1) + 12(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + 4z - 12 = 0$$

7.5 Producto mixto

Dados tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, se llama **producto mixto** de estos al producto escalar de \vec{u} por el vector resultante del producto vectorial de \vec{v} por \vec{w} , y se representa por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Es evidente que el producto mixto de tres vectores es un número real. El valor absoluto de dicho número coincide con el **volumen del paralelepípedo** que tiene por aristas adyacentes los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} .



En términos de coordenadas, el producto mixto se expresa como: $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = x_1(y_2z_3 - z_2y_3) + y_1(z_2x_3 - x_2z_3) + z_1(x_2y_3 - y_2x_3)$$

y una forma sencilla de calcularlo sería desarrollando el siguiente determinante

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2z_3 - z_2y_3) + y_1(z_2x_3 - x_2z_3) + z_1(x_2y_3 - y_2x_3)$$

Ejemplo:

- Calcular el volumen del paralelepípedo que tiene a los vectores $\vec{u} = (3, -5, 1)$, $\vec{v} = (0, 2, -2)$ y $\vec{w} = (3, 1, 1)$ como aristas adyacentes.

$$\text{Volumen} = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = \left| \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |36| = 36 \text{ u.v.}$$

7.6 Ejercicios

1. Dados los vectores $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-3, 1)$ y $\vec{c} = (-2, -2)$, calcular: $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} + \vec{c}$; $\vec{b} + \vec{c}$.
2. Hallar los vectores opuestos de los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} del ejercicio anterior.
3. Con los vectores del ejercicio 1 calcular: $3\vec{a} + 2\vec{b}$; $2\vec{a} - 3\vec{c}$; $\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{c}$.

4. Dados los puntos $A(3, 1)$ y $B(5, 4)$, hallar las coordenadas del vector \overrightarrow{AB} .
5. Sean $\overrightarrow{CD} = (2, -3)$ y $C(5, 7)$. Calcular las coordenadas de D .
6. En el sistema de referencia $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ se consideran los vectores siguientes: $\vec{a} = (2, 3)$; $\vec{b} = (0, -1)$; $\vec{c} = (5, 0)$; $\vec{i} = (1, 0)$; $\vec{j} = (0, 1)$. Hallar: $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{a} \cdot \vec{c}$; $\vec{i} \cdot \vec{j}$.
7. Dado el vector $\vec{a} = (3, -1)$ encontrar un vector que sea perpendicular a \vec{a} .
8. Hallar el módulo de los siguientes vectores: $\vec{a} = (2, 1)$; $\vec{b} = (4, 3)$; $\vec{c} = (1, 2)$.
9. Comprobar si los vectores siguientes son unitarios: $\vec{a} = (3, 2)$; $\vec{b} = (1, 0)$; $\vec{c} = (\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}})$.
10. El producto escalar de dos vectores es igual a 18, el módulo de uno de ellos es igual a 6 y el ángulo que forman es de 60° . Hallar el módulo del otro.
11. Dados los vectores $\vec{a} = (3, 1)$ y $\vec{b} = (-1, 2)$, calcular: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ y $\vec{b} \cdot \vec{a}$.
12. Dados los vectores $\vec{a} = (3, 1)$; $\vec{b} = (2, -4)$ y $\vec{c} = (5, 3)$, calcular: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
13. En el sistema de referencia $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se consideran los vectores siguientes: $\vec{a} = (2, 3, -1)$; $\vec{b} = (0, 1, 3)$; $\vec{c} = (5, 0, 4)$. Hallar: $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{a} \cdot \vec{c}$; $\vec{b} \cdot \vec{c}$.
14. Comprobar si los vectores siguientes son unitarios: $\vec{a} = (3, 2, 0)$; $\vec{c} = (0, -\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}})$.
15. Dados los vectores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$, calcular $\vec{i} \times \vec{j}$; $\vec{i} \times \vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{i}$; $\vec{k} \times \vec{i}$ y $\vec{k} \times \vec{j}$.
16. Hallar el área del paralelogramo formado sobre los vectores $\vec{a} = (2, 1, 5)$ y $\vec{b} = (3, 2, 1)$.
17. Dado el vector \vec{a} del ejercicio anterior, calcular $\vec{a} \times \vec{a}$.
18. Hallar el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores $\vec{a} = (2, 1, 0)$; $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{b} = (3, 2, 1)$.
19. Dados los vectores $\vec{a} = (2, 0, 1)$ y $\vec{b} = (0, 3, 1)$ comprobar si son perpendiculares. En caso negativo, cambiar una coordenada del vector \vec{b} para que lo sean.
20. Con los vectores del ejercicio anterior, comprobar que $(5\vec{a}) \times \vec{b} = 5 \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.
21. Hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{a} = (2, 1, 5)$ y $\vec{b} = (3, 4, 0)$.
22. Dados los vectores $\vec{a} = (2, 1, 0)$; $\vec{b} = (3, 5, 1)$ y $\vec{c} = (2, 4, 1)$, halla el producto mixto $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.
23. Calcula el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores: $\vec{a} = (3, 1, 2)$; $\vec{b} = (0, 5, 0)$ y $\vec{c} = (-1, 1, 0)$.

24. Dados los vectores $\overline{u} = (1, 1, 0)$ y $\overline{v} = (a, 1, -1)$, hallar a para que el ángulo entre \overline{u} y \overline{v} sea 60° .
25. Sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado $A = (2, 0, \sqrt{2})$, $B = (1, 1, 0)$ y $C = (0, y, z)$, hállese razonadamente las coordenadas que faltan de C .
26. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P_0(1, -2, 4)$ y tiene a $\overline{v} = (2, 4, -4)$ como vector director.
27. Idem para la recta que pasa por los puntos $P(-2, 1, 0)$ y $Q(1, 3, 5)$.
28. Hallar el plano que pasa por el punto $P(2, 1, 2)$ y tiene a \overline{i} como vector director.
29. Idem, siendo $P(3, 2, 2)$ y $\overline{v} = (2, 3 - 1)$.
30. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, 3)$ y $R(-2, 3, 3)$.

7.7 Soluciones

1. $\overline{a} + \overline{b} = (-1, 2)$; $\overline{a} + \overline{c} = (0, -1)$; $\overline{b} + \overline{c} = (-5, -1)$.
2. $-\overline{a} = (-2, -1)$; $-\overline{b} = (3, -1)$; $-\overline{c} = (2, 2)$.
3. $3\overline{a} + 2\overline{b} = (0, 5)$; $2\overline{a} - 3\overline{c} = (10, 8)$; $\overline{a} - 2\overline{b} + 5\overline{c} = (-2, -11)$.
4. $(2, 3)$.
5. $(7, 4)$.
6. $\overline{a} \cdot \overline{b} = -3$; $\overline{a} \cdot \overline{c} = 10$; $\overline{i} \cdot \overline{j} = 0$.
7. $(1, 3)$, no es la única. Cualquier múltiplo de este vector también es solución.
8. $|\overline{a}| = \sqrt{5}$; $|\overline{b}| = 5$; $|\overline{c}| = \sqrt{5}$.
9. \overline{a} no lo es; \overline{b} y \overline{c} sí lo son.
10. $|\overline{v}| = 6$.
11. $\overline{a} \cdot \overline{b} = -1$; $\overline{b} \cdot \overline{a} = -1$.
12. $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = 20$; $\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c} = 20$.
13. $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$; $\overline{a} \cdot \overline{c} = 6$; $\overline{b} \cdot \overline{c} = 12$.
14. Ninguno es unitario.
15. $\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$; $\overline{i} \times \overline{k} = -\overline{j}$; $\overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}$; $\overline{j} \times \overline{i} = -\overline{k}$; $\overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}$; $\overline{k} \times \overline{j} = -\overline{i}$.
16. $\sqrt{251}$ u.a.

17. $(0, 0, 0)$.

18. $2 \, u.v$.

19. No son perpendiculares. $\bar{b} = (0, 3, 0)$, no es la única posibilidad.

20.

21. $5\sqrt{26} \, u.a$.

22. 1

23. $10 \, u.v$.

24. $a = 0 \quad \text{ó} \quad a = 2$.

25. $C(0, 2, \sqrt{2}) \quad \text{ó} \quad C(0, -\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3})$.

26. $x = 1 + 2 \, \lambda; \quad y = -2 + 4 \, \lambda; \quad z = 4 - 4 \, \lambda$.

27. $x = -2 + 3 \, \lambda; \quad y = 1 + 2 \, \lambda; \quad z = 5 \, \lambda$.

28. $x = 2$.

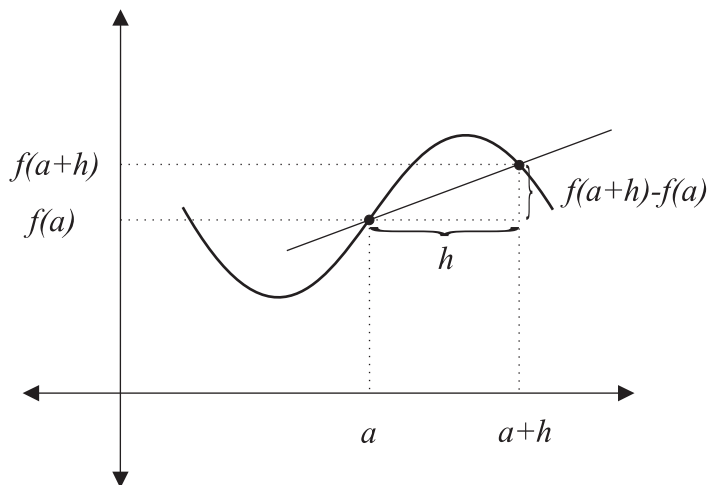
29. $2x + 3y - z = 10$.

30. $3x + 9y - 7z = 0$.

8 DERIVACIÓN.

8.1 Definición e interpretación geométrica de la derivada

Nos interesa el problema de determinar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$. Para ello, consideramos las rectas secantes que pasan por el punto $(a, f(a))$ y otro punto de la curva, de la forma $(a + h, f(a + h))$, según la figura.



La pendiente de cada una de estas rectas es

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Cuando hacemos $h \rightarrow 0$, el punto $(a+h, f(a+h))$ tiende a $(a, f(a))$, y las rectas secantes se acercan a la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$. Por tanto, la pendiente de la tangente será:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

siempre que el límite exista. Esto motiva la siguiente definición:

Definición. Se dice que una función $f(x)$ es derivable en un punto a de su dominio si existe el límite

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El valor $f'(a)$ se llama la *derivada* de la función $f(x)$ en $x = a$. Decimos que f es derivable en un intervalo (c, d) si es derivable en a , para todo $a \in (c, d)$.

En caso de que la función $f(x)$ sea derivable en $x = a$, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Ejemplo. Tomemos la función $f(x) = x^2$, en un punto a arbitrario.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a.$$

Nota. La existencia del límite depende de que existan y sean iguales los correspondientes límites laterales, a los que se denomina derivadas por la izquierda y por la derecha, respectivamente:

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

8.2 Reglas operacionales y cálculo de derivadas

Como muestra el ejemplo anterior, en general va a ser complicado calcular una derivada directamente usando la definición. Por eso, en la práctica es conveniente hacer uso de tablas de derivadas y reglas de derivación para calcular derivadas de funciones que se pueden escribir en términos de las funciones elementales.

Las derivadas de las principales funciones elementales son (hay una tabla más completa al final del tema):

$$\begin{aligned}(x^n)' &= nx^{n-1} \\ (e^x)' &= e^x \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x\end{aligned}$$

Reglas operacionales

Para cada valor de x en que existan $f'(x)$ y $g'(x)$, se verifica:

- (a) $[cf(x)]' = cf'(x)$, c cualquier número real.
- (b) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.
- (c) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- (d) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (\text{si } g(x) \neq 0).$

Ejemplos

(a) Si $f(x) = xe^x - 2x$, entonces $f'(x) = e^x + xe^x - 2 = (x+1)e^x - 2$.

(b) Cuando $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, se tiene

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

Regla de la cadena:

Si existen $f'(a)$ y $g'(f(a))$, entonces existe $(g \circ f)'(a)$ y se cumple que

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Ejemplos

(a) $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$.

(b) $[\cos(3x - 1)]' = -\text{sen}(3x - 1) \cdot 3 = -3\text{sen}(3x - 1)$.

(c) $[\ln(x^2 + 1)]' = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

8.3 Aplicaciones de la derivada

Veamos finalmente las aplicaciones más significativas del cálculo de derivadas.

8.3.1 Regla de l'Hôpital

La primera de las aplicaciones es el uso de las derivadas para calcular límites. Muchos límites de la forma

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(y otros que se pueden reducir a éstos) en los que aparecen indeterminaciones del tipo $(0/0)$ ó (∞/∞) se resuelven mediante la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo que este último límite exista.

Ejemplos. (a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

(b) Al aplicar la regla de l'Hôpital es a veces necesario derivar más de una vez:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)\text{sen} x}{3\text{sen}^2 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)}{3\text{sen} x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\text{sen} x}{3 \cos^2 x - 3\text{sen}^2 x} = 0.$$

(c) Algunos límites que no son de los tipos $(0/0)$ ó (∞/∞) se pueden reducir a éstos, para luego calcularlos usando la regla de l'Hôpital. Por ejemplo:

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} x^x = (\infty^\infty).$$

Si tomamos logaritmos:

$$\ln l = \ln(\lim_{x \rightarrow 0} x^x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

Luego $l = e^0 = 1$.

8.3.2 Crecimiento y decrecimiento

Decimos que la función real $f(x)$ es creciente en el intervalo (a, b) si para $x, y \in (a, b)$ tales que $x < y$ se cumple $f(x) < f(y)$. Análogamente, $f(x)$ es decreciente en (a, b) si para $x, y \in (a, b)$ tales que $x < y$ se tiene $f(x) > f(y)$.

Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función real se pueden determinar con ayuda de las derivadas. Más precisamente, dada una función $f(x)$ derivable en el intervalo (a, b) , se tiene:

- si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, $f(x)$ es creciente en dicho intervalo;
- si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, $f(x)$ es decreciente en dicho intervalo.

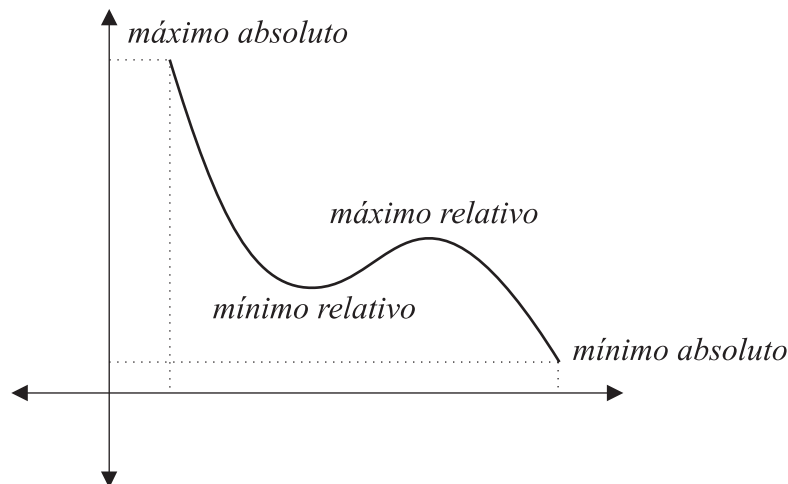
Estrechamente relacionados con los conceptos de crecimiento y decrecimiento están los de máximos y mínimos (locales) de una función. Decimos que la función $f(x)$ tiene un máximo local en a si $f(x) < f(a)$ para x cerca de a . Análogamente se define un mínimo local.

De nuevo hay una relación entre las derivadas y los máximos y mínimos locales:

- si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, entonces $f(x)$ tiene un máximo máximo local en $x = a$;
- si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, $f(x)$ tiene un mínimo local.

Lo anterior muestra que para determinar los máximos y mínimos locales de una función derivable tenemos que hallar las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$. Éstas nos darán los candidatos a máximos y mínimos locales, y tendremos que comprobar el signo de la derivada segunda para decidir.

Observación. Hay que tener mucho cuidado a la hora de calcular los máximos y mínimos globales de una función en un intervalo $[a, b]$. De hecho, puede ocurrir que los puntos en los que se anula la derivada sean solamente máximos y mínimos locales, mientras que el máximo o mínimo global puede alcanzarse en los extremos del intervalo. Es justamente lo que ocurre para la función cuya gráfica aparece en la figura.



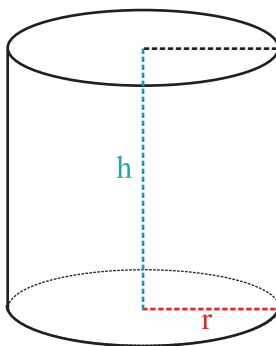
8.3.3 Problemas de optimización

Muchos problemas prácticos se reducen a la determinación de máximos y mínimos de una función de variable real. Por ejemplo, en muchas situaciones se trata de determinar las dimensiones de un recipiente (con una forma determinada) para maximizar o minimizar alguna de sus características: volumen, coste, etc. Lo veremos con un ejemplo.

Ejemplo. Se quiere construir un depósito de forma cilíndrica cuyo volumen sea de 2π metros cúbicos. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que la superficie total sea mínima?

Si r es el radio del cilindro y h su altura (véase la figura), la superficie total es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$



La relación entre r y h se determina por la condición de que el volumen sea 2π :

$$\pi r^2 h = 2\pi.$$

Por tanto, se trata de minimizar la función

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{4\pi}{r}.$$

Claramente, debe tenerse $0 < r < \infty$. Si derivamos e igualamos a cero:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{4\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow r = 1.$$

Además, en $r = 1$ se tiene un mínimo local: $S''(1) > 0$. Puesto que

$$\lim_{r \rightarrow 0} S(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} S(r) = +\infty,$$

resulta que el mínimo es global, y las dimensiones pedidas son entonces $r = 1$, $h = 2$.

Tabla de derivadas

En la siguiente tabla u representa una función de x y c una constante.

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$	2. $\frac{d}{dx}(cu) = cu'$
3. $\frac{d}{dx}(x) = 1$	4. $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{u'}{u}$
5. $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}u'$	6. $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u u'$
7. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = (\cos u)u'$	8. $\frac{d}{dx}(\cos u) = -(\operatorname{sen} u)u'$
9. $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} u) = \frac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \operatorname{tg}^2 u)u'$	10. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} u) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11. $\frac{d}{dx}(\arccos u) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	12. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} u) = \frac{u'}{1+u^2}$

8.4 Ejercicios

1. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{x^3 - a^3}{x - a}$	(b) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$	(c) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x}$
(d) $\psi(\theta) = \frac{(\theta + 3)^2}{\theta + 2}$	(e) $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$	(f) $f(x) = \frac{3}{4x^7}$
(g) $f(\phi) = \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi^2}$	(h) $f(t) = \sqrt[3]{t^3 + 3t + 1}$	(i) $f(t) = \sqrt[3]{(t^3 + 3t + 2)^2}$
(j) $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$	(k) $f(t) = \sqrt{\frac{1+t^2}{1-t^2}}$	(l) $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x}}$
(m) $y = \cos x \operatorname{sen} x$	(n) $y = \cos^2 \sqrt{x}$	(o) $f(x) = a\sqrt{\cos 2x}$
(p) $\mu(\theta) = \operatorname{tg} \sqrt{1-\theta}$	(q) $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$	

2. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}$	(b) $f(x) = e^{-x} \cos x$	(c) $\sqrt{e^x - 1}$
(d) $f(x) = \ln(\ln x)$	(e) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x) - \ln(\cos x)$	(f) $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}$

$$(g) f(x) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \quad (h) f(x) = \frac{\ln \sqrt{x}}{\ln(x + e^x)} \quad (i) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$(j) f(x) = x^{\operatorname{sen} x} \quad (k) f(x) = (\cos x)^{\operatorname{sen} x} \quad (l) f(x) = (\ln x)^{\ln x}$$

3. ¿En qué punto la curva de ecuación

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$

tiene una recta tangente horizontal? ¿Es posible que dicha curva tenga una tangente paralela a la recta $3x - 3y + 7 = 0$ en algún punto con $x < 0$?

4. Calcular aplicando la regla de l'Hôpital los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right] \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{1 - \cos x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 2} \left(4 - \frac{3x}{2} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}}$$

5. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones. Calcular sus máximos y mínimos locales.

$$(a) f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}; \quad (b) f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}; \quad (c) f(x) = -x - \frac{1}{x};$$

$$(d) f(x) = x\sqrt{5 - x^2}; \quad (e) f(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1}; \quad (f) f(x) = x + 5 - 2\operatorname{sen} x, \quad x \in [0, 2\pi].$$

6. Se quiere construir una gasolinera de 1.800 m^2 en un terreno rectangular junto a una autopista. Para ello, se quiere cercar los tres lados no contiguos a la autopista. ¿Qué cantidad mínima de valla se necesitará para realizar el cercado?

7. A partir de una cartulina cuadrada de 60 cm de lado se va a construir una caja de base cuadrada, sin tapa, recortando cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Determinar cuándo se obtiene una caja de máxima capacidad.

8. Determinar las dimensiones del cilindro de área total $24\pi \text{ m}^2$, con tapa incluida, tal que su volumen sea máximo.

9. Se usan 4 metros de alambre para construir un cuadrado y un círculo. ¿Qué cantidad de alambre debe usarse para el cuadrado y qué cantidad para el círculo a fin de abarcar un área total máxima?

8.5 Soluciones

- (a) $f'(x) = (2x^3 - 3ax^2 + a^3)/(x - a)^2$; (b) $f'(x) = 2x\operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$; (c) $f'(x) = (2x^2 - 4)/x^2$; (d) $\psi'(\theta) = (\theta + 3)(\theta + 1)/(\theta + 2)^2$; (e) $f'(x) = -(2x + 1)/(x^2(x + 1)^2)$; (f) $f'(x) = -21/4x^8$; (g) $f'(\phi) = -1/\phi^2 + 2/\phi^3$; (h) $f'(t) = (t^2 + 1)/\sqrt[3]{t^3 + 3t + 1}$; (i) $f'(t) = 2(t^2 + 1)/\sqrt[3]{t^3 + 3t + 2}$; (j) $f'(x) = (2x^2 - 2x + 1)/\sqrt{x^2 - 2x + 2}$; (k) $f'(t) = (2t/(1 - t^2)^2)\sqrt{(1 + t^2)/(1 - t^2)}$; (l) $f'(x) = -2(1 + x) + \sqrt{1 + x}/(2(x + \sqrt{1 + x})^2(1 + x))$; (m) $y' = \cos(2x)$; (n) $y' = -\operatorname{sen}\sqrt{x} \cos \sqrt{x}/\sqrt{x}$; (o) $f'(x) = -a\operatorname{sen}(2x)/\sqrt{\cos(2x)}$; (p) $\mu'(\theta) = -1/(2(\sqrt{1 - \theta} \cos^2(\sqrt{1 - \theta})))$; (q) $f'(x) = \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)/x$.
- (a) $f'(x) = e^x$; (b) $f'(x) = -e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)$; (c) $f'(x) = 1/(2\sqrt{e^x - 1})$; (d) $f'(x) = 1/(x \ln x)$; (e) $f'(x) = 1/(\operatorname{sen} x \cos x)$; (f) $f'(x) = ((x + 1) \ln(x + 1) - (x + 2) \ln(x + 2))/((x + 1)(x + 2)(\ln(x + 1))^2)$; (g) $f'(x) = (e^x + e^{-x})/(e^x - e^{-x})$; (h) ... (i) $f'(x) = 1/\sqrt{x^2 - 1}$; (j) $f'(x) = \cos x \ln x x^{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x x^{\operatorname{sen} x - 1}$; (k) $f'(x) = (\cos x)^{\operatorname{sen} x + 1} \ln(\cos x) - \operatorname{sen}^2 x (\cos x)^{\operatorname{sen} x - 1}$; (l) $f'(x) = \ln(\ln x)(\ln x)^{\ln x}/x + (\ln x)^{\ln x}/x$.
- La tangente es horizontal en el punto $(0, -1)$. No existe ningún punto con $x < 0$ tal que la tangente sea paralela a $3x - 3y + 7 = 0$.
- (a) 0; (b) 0; (c) $e^{6/\pi}$.
- (a) Es siempre creciente; no tiene máximos ni mínimos; (b) es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$; tiene un máximo en $x = 0$; (c) es decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$, y creciente en $(-1, 0)$ y en $(0, 1)$; tiene un mínimo en $x = -1$ y un máximo en $x = 1$; (d) es decreciente en $(-\sqrt{5}, -\sqrt{5}/2)$ y $(\sqrt{5}/2, \sqrt{5})$, y creciente en $(-\sqrt{5}/2, \sqrt{5}/2)$; tiene un mínimo en $x = -\sqrt{5}/2$ y un máximo en $x = \sqrt{5}/2$; (e) es decreciente en $(-1, 1/2)$ y creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1/2, +\infty)$; tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1/2$; (f) es decreciente en $(0, \pi/3)$ y $(5\pi/3, 2\pi)$ y creciente en $(\pi/3, 5\pi/3)$; tiene un mínimo en $x = \pi/3$ y un máximo en $x = 5\pi/3$.
- Se necesitan 120 metros de valla.
- La caja de máxima capacidad se obtiene cuando cortamos cuadrados de lado 10 cm.
- El volumen máximo se obtiene cuando el radio es 2 m y la altura 4 m.
- Debemos usar los 4 metros para hacer un círculo.

9 INTEGRACIÓN.

9.1 Integrales indefinidas. Primitiva de una función

Sea f una función definida sobre un intervalo $J \subset \mathbb{R}$. Una **primitiva o antiderivada** de f en J es una función, F continua en J , que verifica:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \text{ en el interior de } J$$

Ejemplo: una primitiva de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \sin x$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces $F(x) + C$ es también una primitiva de $f(x)$, siendo C un número real cualquiera.

Ejemplo: una primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ es $F(x) = \ln x$, luego $F(x) = \ln x + C$ también es una primitiva de $f(x)$ para cualquier $C \in \mathbb{R}$.

El conjunto formado por todas las primitivas de $f(x)$ se denomina **integral indefinida** de $f(x)$, y se designa por

$$\int f(x) dx$$

Ejemplo: $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

Tabla de integrales inmediatas

En la siguiente tabla C representa una constante arbitraria.

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7. \int \sec^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

$$8. \int \operatorname{cosec}^2 x dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsen \frac{x}{a} + C$$

$$10. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$11. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \neq 1), (a > 0)$$

9.1.1 Reglas operacionales. Integrales inmediatas

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones para las que existen primitivas, entonces se verifica que:

1. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
2. $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

Estas reglas, la tabla de integrales inmediatas y la operatoria básica, permiten calcular integrales que a priori parecen más complicadas.

Ejemplos:

$$(a) \int (3x^4 - 5x^2 + x)dx = 3 \int x^4 dx - 5 \int x^2 dx + \int x dx = 3 \frac{x^5}{5} - 5 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$(b) \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x}(x+3) + C$$

9.2 Métodos de integración

9.2.1 Integración por cambio de variable

A veces una integral puede transformarse en otra más sencilla haciendo un cambio de variable. Ello puede hacerse de dos maneras:

1. Hacer $x = g(t)$ siendo g una función derivable, con inversa derivable, en el intervalo en el que se trabaja. Al hacer el cambio debe sustituirse dx por $g'(t)dt$, con lo que nos quedará

$$\int f(g(t))g'(t)dt = F(t) + C = F(g^{-1}(x)) + C$$

Ejemplo: $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ si efectuamos el cambio de variable $x = \sin t$, hemos de sustituir dx por $\cos t dt$, con lo que obtenemos

$$I = \int \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \cos t dt = \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos(\arcsin x) + C$$

2. Hacer $t = h(x)$ siendo h una función derivable con inversa derivable. Normalmente se elige una función $h(x)$ que, o bien aparece en el integrando, o bien está en el mismo la expresión $h'(x)dx$.

Ejemplo: $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ si efectuamos el cambio de variable $1-x^2 = t$, hemos de sustituir $x dx$ por $-\frac{dt}{2}$, con lo que obtenemos

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -t^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Es evidente que el segundo cambio de variable es más intuitivo, pero no deja de ser curioso el haber obtenido dos resultados, aparentemente, tan diferentes. Se propone al alumno que compruebe que en realidad es el mismo resultado en los dos casos.

9.2.2 Integración por partes

Este método se basa en la fórmula

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$

que puede deducirse a partir de la regla de derivación de un producto. La elección de qué parte del integrando debe ser u y cuál dv depende de múltiples factores, lo que impide dar una regla general. No obstante los casos más frecuentes son los siguientes:

- $I = \int x \ln x \, dx.$

Para la elección de u debemos pensar en la parte del integrando que sea más fácil de derivar (en este caso tanto x como $\ln x$ son sencillos de derivar), para dv hemos de buscar la parte sencilla de integrar, que sin lugar a dudas es $x \, dx$. Por lo tanto la elección queda cerrada $u = \ln x$ y $dv = x \, dx$. En consecuencia $du = \frac{1}{x} \, dx$ y $v = \frac{x^2}{2}$.

$$I = \int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

- $I = \int x e^x \, dx$

En este caso tanto x como e^x son sencillas de derivar y de integrar. Luego la elección debe basarse en otras estrategias. Si reflexionamos un poco podremos darnos cuenta de que la mejor elección es $u = x$ y $dv = e^x \, dx$, el motivo es claro si escribimos el resto de elementos necesarios $v = e^x$, $du = dx$.

$$I = \int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C$$

- $I = \int \sen x e^x \, dx$

Este último ejemplo corresponde a las llamadas integrales cíclicas. No hay lugar a dudas que en este caso la elección de u y dv es aleatoria, ya que en cualquier caso el método nos llevará a una integral esencialmente igual, en cuanto a dificultad, a la de partida. Tomemos, por ejemplo $u = \sen x$ y $dv = e^x \, dx$, lo que nos lleva a que $du = \cos x \, dx$ y $v = e^x$

$$I = \int \sen x e^x \, dx = \sen x e^x - \int e^x \cos x \, dx$$

En principio parece que no hemos ganado nada con la aplicación del método. Sin embargo, si pensamos un poco antes de desecharlo, podremos darnos cuenta de que una nueva aplicación del método nos llevaría a la integral de partida. Es decir, si en la última integral tomamos $u = \cos x$ y $dv = e^x \, dx$, lo que implica que $du = -\sen x \, dx$ y $v = e^x$

$$I = \sen x e^x - \int e^x \cos x \, dx = \sen x e^x - \left(\cos x e^x - \int -\sen x e^x \, dx \right) = (\sen x - \cos x) e^x - I$$

de donde obtendríamos

$$2I = (\operatorname{sen} x - \cos x)e^x \Rightarrow I = \frac{(\operatorname{sen} x - \cos x)e^x}{2} + C$$

El procedimiento seguido justifica el nombre asignado a estas integrales.

9.2.3 Integración de funciones racionales

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad P(x), Q(x) \text{ polinomios}$$

Veamos diferentes casos

1. Denominador de grado 1: $\int \frac{P(x)}{ax+b} dx$. Dividiendo $P(x)$ por $ax+b$, se consigue expresar el integrando como suma de un polinomio $P_1(x)$ y de una fracción del tipo $\frac{k}{ax+b}$.

Ejemplo: $I = \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x-1} dx$. Al dividir el polinomio $x^5 + x^4 - 8$ entre $x-1$ se obtiene como resultado $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ y con resto igual a -6 , por lo tanto

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x-1} dx = \int (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 - \frac{6}{x-1}) dx = \\ &= \frac{x^5}{5} + \frac{2x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + x^2 + 2x - \int \frac{6}{x-1} dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} + x^2 + 2x - 6\ln|x-1| + C \end{aligned}$$

2. Denominador de grado 2, y sin raíces reales: $\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c} dx$.

- (a) Si el grado de $P(x)$ es cero, es decir es una constante, se ajusta para obtener un arcotangente.

Ejemplo:

$$I = \int \frac{3}{x^2 + 2x + 2} dx = 3 \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = 3 \operatorname{arctg}(x+1) + C$$

- (b) Si el grado de $P(x)$ es 1 se separa en dos integrales, una dará un logaritmo neperiano y la otra un arcotangente.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3x+4}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{3x+3+1}{x^2+2x+2} dx = 3 \int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1) + C \end{aligned}$$

- (c) Si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que 2, se efectúa la división de polinomios para llegar a algunos de los casos anteriores.

3. Denominador de grado mayor o igual que 2 y, a lo sumo, raíces complejas simples:

$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ con grado de $P(x)$ menor que el grado de $Q(x)$. Lo primero que debe hacerse es factorizar $Q(x)$, para luego efectuar una descomposición de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples, cada una de las cuales generará integrales que sabremos resolver, en función de que trabajemos con raíces reales o complejas de $Q(x)$.

Ejemplos: $I = \int \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$. En primer lugar hemos de descomponer en fracciones simples el integrando

$$\frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Efectuando los cálculos apropiados, se obtiene $A = 2$, $B = -2$, $C = -2$ y $D = 4$. Por tanto

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{1}{x-1} dx - 2 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{-2x+4}{x^2+1} dx = \\ &= 2 \ln|x-1| + 2 \frac{1}{x-1} - \ln(x^2+1) + 4 \arctg x + C \end{aligned}$$

En caso de ser el grado de $P(x)$ mayor o igual que el de $Q(x)$, se efectuará primero la división de los polinomios.

9.2.4 Integrales trigonométricas

1.

$$\int R(\sen x, \cos x) dx, \quad R \text{ es una función racional}$$

- (a) R es impar en $\sen x$, es decir, $R(-\sen x, \cos x) = -R(\sen x, \cos x)$. Se efectúa el cambio de variable $t = \cos x$, con lo que $\sen x = \sqrt{1-t^2}$ y $dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Ejemplo

$$\int \frac{\sen x}{\cos^2 x + 1} dx = - \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = - \int \frac{1}{1+t^2} dt = -\arctg t + C = -\arctg(\cos x) + C$$

- (b) R es impar en $\cos x$, es decir, $R(\sen x, -\cos x) = -R(\sen x, \cos x)$. Se efectúa el cambio de variable $t = \sen x$, con lo que $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ y $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \int \sen^2 x \cos^3 x dx &= \int t^2 (\sqrt{1-t^2})^3 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int (t^2 - t^4) dt = \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sen^3 x}{3} - \frac{\sen^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

- (c) R es par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, es decir, $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$. Se efectúa el cambio de variable $t = \operatorname{tg} x$, con lo que $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ y $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$.

Ejemplo

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx &= \int \frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{t}{(t+1)(1+t^2)} dt = \\ &= \ln \sqrt[4]{\frac{(1+t^2)}{(t+1)^2}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \ln \sqrt[4]{\frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)}{(\operatorname{tg} x + 1)^2}} + \frac{1}{2} x + C \end{aligned}$$

Un caso particular lo constituyen las integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx$, con n y m pares. La resolución de éstas se simplifica si se aplican las fórmulas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos^2 2x}{4} dx = \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C \end{aligned}$$

- (d) El cambio de variable que siempre puede aplicarse, aunque sólo se aconseja cuando no estemos en alguno de los casos anteriores, es:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = - \int \frac{1}{t^2 - 2t - 1} dt = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - (1+\sqrt{2})}{t - (1-\sqrt{2})} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - (1+\sqrt{2})}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - (1-\sqrt{2})} \right| + C \end{aligned}$$

2. $\int \operatorname{sen}(ax+b) \operatorname{sen}(cx+d) dx$, $\int \operatorname{sen}(ax+b) \cos(cx+d) dx$, $\int \cos(ax+b) \cos(cx+d) dx$. Se emplean las fórmulas:

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = -\frac{1}{2} [\cos(A+B) - \cos(A-B)]$$

Ejemplos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(2x-1)\operatorname{sen}(3x+2) dx &= -\frac{1}{2} \int [\cos(5x+1) - \cos(-x-3)] dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(5x+1)}{5} - \operatorname{sen}(x+3) \right] + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(x-2)\cos(5x+3) dx &= \frac{1}{2} \int [\operatorname{sen}(6x+1) + \operatorname{sen}(-4x-5)] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos(6x+1)}{6} + \frac{\cos(4x+5)}{4} \right] + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \cos(3x+3)\cos(x+2) dx &= \frac{1}{2} \int [\cos(4x+5) + \cos(2x+1)] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(4x+5)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2x+1)}{2} \right] + C\end{aligned}$$

9.3 Ejercicios

1. Resolver las siguientes integrales

$$\begin{array}{lll}a) \int \frac{x^3 - a^3}{x - a} dx & b) \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx & c) \int \frac{x^5 + x^3 + 2}{1 + x^2} dx \\d) \int (\sqrt{x} + \sec x \operatorname{tg} x) dx & e) \int \frac{x+6}{(x+2)^2} dx & f) \int \frac{1-x^2}{1-x^4} dx \\g) \int \frac{y}{(1+y^2)^4} dy & h) \int \frac{dx}{e^{-x} + e^x} & i) \int \frac{x^2 \ln^3(1+x^3)}{1+x^3} dx \\j) \int \operatorname{tg} \theta \ln(\cos \theta) d\theta & k) \int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx & l) \int \frac{dx}{\sqrt{6x - 4x^2}} \\m) \int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx & n) \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}} & o) \int \frac{3x - 1}{9x^2 + 6x + 26} dx \\p) \int \cos^3 x \operatorname{sen}^3 x dx & q) \int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x dx & r) \int \operatorname{tag}^3 \theta \sec^4 \theta d\theta \\s) \int \cos 2x \operatorname{sen} 3x dx & t) \int \cos 5x \cos 7x dx & u) \int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 7x dx\end{array}$$

2. Aplicar integración por partes para resolver las siguientes integrales:

$$a) \int x^2 \operatorname{sen} 2x \, dx \quad b) \int \operatorname{arctag} x \, dx$$

$$c) \int \ln x \, dx \quad d) \int x \ln x \, dx$$

$$e) \int 2^x \operatorname{sen} x \, dx \quad f) \int x^3 e^{x^2} \, dx$$

$$g) \int \operatorname{sen} \theta \ln(\cos \theta) d\theta$$

3. Resolver las siguientes integrales racionales

$$a) \int \frac{2x^5 - 11x^3 + 17x^2 - 10x + 3}{2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 1} dx \quad b) \int \frac{3x^2 + 1}{x^4 - 1} dx \quad c) \int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} dx$$

4. Resolver las siguientes integrales

$$a) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx \quad b) \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx \quad c) \int tg^2 x \, dx$$

$$d) \int x^2 \sqrt{x+1} dx \quad e) \int \frac{x^7 + 3x^3}{1 + x^8} dx \quad f) \int \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx$$

$$g) \int \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2} dx \quad h) \int \frac{4^x + 5 \cdot 16^x}{1 + 16^x} dx \quad i) \int \frac{\cos^3 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx$$

9.4 Soluciones

1.

$$a) \frac{x^3}{3} + a \frac{x^2}{2} + a^2 x + C \quad b) \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C \quad c) \frac{x^4}{4} + 2 \operatorname{arctg} x + C$$

$$d) \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{1}{\cos x} + C \quad e) \ln|x+2| - \frac{4}{x+2} + C \quad f) \operatorname{arctg} x + C$$

$$g) -\frac{1}{6(1+y^2)^3} + C \quad h) \operatorname{arctg}(e^x) + C \quad i) \frac{1}{12} \ln^4(1+x^3) + C$$

$$j) -\frac{1}{2} \ln^2(\cos \theta) + C \quad k) \ln \left[\frac{(e^x - 1)^2}{e^x} \right] + C \quad l) \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \left(\frac{4}{3} x - \frac{3}{4} \right) + C$$

$$m) \ln \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] + C \quad n) \operatorname{arcsen} \left(\frac{x+1}{3} \right) + C$$

$$o) \ln \sqrt[6]{9x^2 + 6x + 26} - \frac{4}{5} \operatorname{arctg} \left(\frac{3x+1}{5} \right) + C \quad p) \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C$$

$$q) \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen}^4 x + C \quad r) \frac{1}{6 \cos^6 \theta} - \frac{1}{4 \cos^4 \theta} + C$$

$$s) -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos 5x}{5} + \cos x \right) + C \quad t) \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} 12x}{12} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \right) + C$$

$$u) \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{\cos 12x}{12} \right) + C$$

2.

$$a) -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C \quad b) x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$c) x \ln x - x + C \quad d) \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$e) 2^x \frac{\ln 2 \operatorname{sen} x - \cos x}{1 + (\ln 2)^2} + C \quad f) \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

$$g) -\cos \theta \ln(\cos \theta) + \cos \theta + C$$

3.

$$a) \frac{x^2}{2} + 3x - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln(2x^2 - 2x + 1) - \operatorname{arctg}(2x-1) + C$$

$$b) \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \operatorname{arctg} x + C \quad c) \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$$

4.

$$a) 2x - \operatorname{tag} x + C \quad b) x - \operatorname{arctg} x + C \quad c) \operatorname{tag} x - x + C$$

$$d) \frac{2}{7} \sqrt{(x+1)^7} - \frac{4}{5} \sqrt{(x+1)^5} + \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + C \quad e) \ln \sqrt[8]{1+x^8} + \frac{3}{4} \operatorname{arctg} x^4 + C$$

$$f) 2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6 \ln \left| \sqrt[6]{x+2} + 1 \right| + C \quad g) \ln \sqrt[6]{\left| \frac{(e^x - 1)^2 (e^x + 2)}{e^{3x}} \right|} + C$$

$$h) \frac{5}{2 \ln 4} \ln(1+16^x) + \frac{1}{\ln 4} \operatorname{arctg}(4^x) + C \quad i) -\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + C$$