EJERCICIO 1.

Apartados a) y b)

Basándose en la conservación de la energía mecánica y del momento angular del satélite en la órbita, se pueden plantear las siguientes ecuaciones para calcular la velocidad en el perigeo (V_P) y la menor distancia entre el planeta y el satélite (R_p):

Conservación del momento angular:

$$L_A = L_P$$

$$R_A \cdot m_S \cdot V_A \cdot sen\,90 = R_P \cdot m_S \cdot V_P \cdot sen\,90$$

Simplificando:

$$\mathbf{R_A \cdot V_A = R_P \cdot V_P}$$

Conservación de la energía mecánica:

$$E_{MA} = E_{MP}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_S \cdot V_A^2 - \frac{G \cdot M \cdot m_S}{R_A} = \frac{1}{2} \cdot m_S \cdot V_P^2 - \frac{G \cdot M \cdot m_S}{R_P}$$

Simplificando:

$$\mathbf{\frac{1}{2} \cdot V_A^2 - \frac{G \cdot M}{R_A} = \frac{1}{2} \cdot V_P^2 - \frac{G \cdot M}{R_P}}$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones llegamos a las siguientes expresiones:

$$V_P = \frac{2Gm_P}{R_A V_A} - V_A$$

$$R_P = \frac{R_A^2 V_A^2}{2Gm_P - R_A V_A^2}$$

Apartado c).

Teniendo en cuenta que la fuerza centrípeta es la fuerza gravitatoria, tenemos:

$$G\frac{m_P m_S}{R_0^2} = m_S \frac{V_0^2}{R_0}$$

Y por tanto,

$$V_0^2 = Gm_P \frac{1}{R_0}$$

Intentemos comparar esta velocidad con V_P en el caso de la órbita elíptica. Aplicando el teorema de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} m_S V_P^2 - \frac{Gm_P m_s}{R_P} = -\frac{1}{2\mathrm{A}} Gm_P m_s$$

Solucionando la ecuación para la velocidad en la ecuación de conservación de energía orbital:

$$V_P^2 = Gm_P \left(\frac{1}{R_P} - \frac{1}{A} \right)$$

Teniendo en cuenta que $A = \frac{R_A + R_P}{2}$, es decir, es el semieje mayor, si comparamos V_0^2y V_P^2:

$$V_P^2 = Gm_P \left(\frac{1}{R_P} - \frac{1}{A} \right) < Gm_P \frac{1}{R_P} = Gm_P \frac{1}{R_0} = V_0^2$$

Por tanto, $V_P < V_0$.