FUNDAMENTOS DE FÍSICA I (1er curso, Grado en Física). Septiembre 2012. Original.

- **Cuestión:** Hasta 1 punto. Incluya una **breve, pero clara, explicación** de la respuesta.
- **Problemas:** Hasta 3 puntos cada uno. No es suficiente con escribir ecuaciones; debe desarrollar las soluciones, justificar hipótesis y explicar en detalle los pasos. Cuide dimensiones y unidades, y los órdenes de magnitud de los resultados que obtenga.
- **Material auxiliar: Sólo una calculadora no programable.** **Tiempo:** 2 horas.

CUESTIÓN

- Un disco gira y se traslada, sin deslizar, a lo largo de una superficie horizontal con módulo de velocidad v. ¿Cuál es, relativa a la superficie, la velocidad del punto más alto del disco?

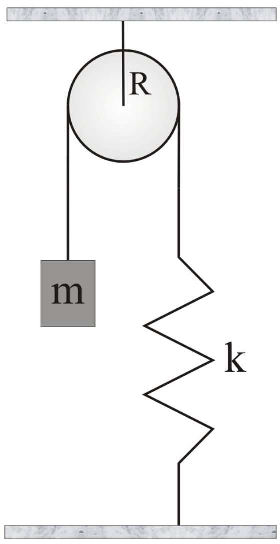
(a) $2v$. **(b)** v. **(c)** $v/2$.

PROBLEMAS. Si ha seguido la evaluación continua sólo debe resolver dos de los problemas.

- **1**.– Un proyectil lanzado por un lanzacohetes explota y se rompe en dos pedazos. Justo antes de la explosión, el proyectil se desplazaba horizontalmente en línea recta, a una altura H, y con velocidad constante v_0. Se observa que, inmediantamente después de la explosión, uno de los fragmentos resultantes empieza a moverse a velocidad v_1 a lo largo de una línea recta que forma un ángulo α por encima de la horizontal.

(a) Después de la explosión, ¿cuál es el módulo de la velocidad del segundo fragmento y la dirección de la misma? ¿Cuál es la velocidad del centro de masas de los fragmentos que han resultado de la explosión?
(b) Calcule las expresiones que nos dan las distancias horizontales a las que caen al suelo ambos fragmentos, después de la explosión.
(c) Calcule las expresiones que nos dan los tiempos que tardan en caer al suelo.
Datos numéricos: Evalúe las expresiones que ha obtenido, con $H = 1000$ m, $v_0 = 2000$ km/h, $v_1 = 1000$ km/h y $\alpha = 30°$. **Nota importante**: haga números sólo después de encontrar las expresiones algebraicas de la magnitudes que se piden.
Nota: las distancias deben medirse desde el punto del suelo sobre el que se produjo la explosión, y los tiempos desde el instante en que ocurrió la misma, respectivamente.

- **2**.–



Se tiene el sistema que se muestra en la figura, en el que un bloque de masa m está unido, mediante una cuerda sin masa e inextensible, a un muelle de constante elástica k a través de una polea, que puede considerarse como un disco macizo uniforme de radio R y masa M (momento de inercia respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro, $I = MR^2/2$). La polea está fijada al techo y el muelle al suelo. Se supone, además, que la cuerda no desliza sobre la polea.
(a) En primer lugar, se deja descender suavemente el bloque hasta que el sistema se encuentra en equilibrio. Encontrar la expresión que nos da cuánto se ha estirado el muelle, x_e.
(b) A partir de la situación de equilibrio mencionada en el apartado anterior, se desplaza hacia abajo el bloque una distancia A y después se suelta, de forma que se inicia un movimiento oscilatorio. ¿Cuál es la expresión para la aceleración del bloque a partir de ese momento?
(c) Calcular el periodo del movimiento oscilatorio anterior.
Datos numéricos: $m = 1$ kg, $k = 200$ N/m, $M = 1$ kg, $A = 3$ cm, $g = 9,8$ m/s^2. **Nota importante**: haga números sólo después de encontrar las expresiones algebraicas de las magnitudes que se piden.

- **3**.– Un bloque de masa M asciende por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Pasa por un punto de dicho plano a una velocidad v_1.

Si el bloque, después de un determinado tiempo, vuelve a pasar por ese mismo punto con una velocidad de v_2,
(a) dar una expresión para el coeficiente de rozamiento cinético entre el plano y el bloque;
(b) encontrar la expresión para el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento sobre el bloque, durante todo el camino mencionado de subida y bajada.
(c) Evaluar el coeficiente de rozamiento y el trabajo calculados en (a) y (b) si la masa del bloque es $M = 20$ kg, el ángulo que forma el plano con la horizontal es $\alpha = 30°$, y las velocidades son $v_1 = 12$ m/s y $v_2 = 6$ m/s.
Nota importante: haga números sólo en este apartado.

FUNDAMENTOS DE FÍSICA I. 1^{er} curso Grado en Física. Septiembre 2012

SOLUCIONES

CUESTIÓN

La respuesta correcta es la (a). La velocidad es $2v$.

El disco gira alrededor de un eje instantáneo de rotación que pasa por el punto de contacto del disco con la superficie. La velocidad lineal de cualquier punto del disco se puede obtener mediante la relación $v = r\omega$, donde r es la distancia del punto al eje de rotación y ω es la velocidad angular de rotación respecto al eje. Por consiguiente, la velocidad lineal instantánea de ese punto de contacto es nula.

La velocidad del punto central del disco (que es donde está el centro de masa) es justamente la velocidad $v_{CM} = R\omega$, donde R es el radio del disco.

Finalmente, el punto en el extremo superior del disco está a una distancia $2R$ del eje de rotación instantáneo. Como resultado, ese punto tiene una velocidad lineal instantánea $2v_{CM}$.

PROBLEMAS

Problema 1.

(a) Justo antes de la explosión, si llamamos m_1 y m_2 a las masas de los fragmentos resultantes de la misma, las componentes del momento lineal del proyectil son

$$p_x = (m_1 + m_2)v_0 \tag{1}$$

$$p_y = 0 \tag{2}$$

Después de la explosión, si llamamos β al ángulo que forma la velocidad del segundo fragmento del proyectil con la horizontal, el momento lineal total del sistema es

$$p_x = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta \tag{3}$$

$$p_y = m_1 v_1 \operatorname{sen}\alpha + m_2 v_2 \operatorname{sen}\beta \tag{4}$$

Como el momento lineal se debe conservar en el proceso, la ecuación para conservar la componente Y del momento lineal nos dice que

$$\operatorname{sen}\beta = -\frac{m_1 v_1}{m_2 v_2}\operatorname{sen}\alpha \quad \Longrightarrow \beta = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{m_1 v_1}{m_2 v_2}\operatorname{sen}\alpha\right) \tag{5}$$

lo que indica que el segundo fragmento se mueve inicialmente siguiendo una línea que forma un ángulo negativo, es decir, por debajo de la horizontal.

Por otro lado, la ecuación para conservar la componente X del momento lineal es

$$(m_1 + m_2)v_0 = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta. \tag{6}$$

Usando que

$$\cos^2 \beta = 1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \frac{v_1^2}{v_2^2} \operatorname{sen}^2 \alpha \tag{7}$$

y despejando, se obtiene

$$v_2^2 = \frac{\left[(m_1 + m_2)v_0 - m_1 v_1 \cos \alpha\right]^2 + (m_1 v_1)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{m_2^2} \tag{8}$$

Finalmente, dado que se conserva el momento lineal total, la velocidad del centro de masas cumple que

$$v_{CM,\text{final}} = v_{CM,\text{inicial}} = v_0 \tag{9}$$

(b) Las expresiones que nos dan las distancias horizontales a las que caen al suelo los dos fragmentos, después de la explosión, se pueden calcular de la siguiente manera.

Supongamos, de manera general, un proyectil que se lanza desde una altura y_0, con una velocidad inicial v formando un ángulo θ con la horizontal. El movimiento general a lo largo del eje vertical OY viene dado por

$$y = y_0 + v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{10}$$

y si T es el tiempo que tarda en llegar al suelo ($y = 0$) desde una altura inicial $y_0 = H$, nos queda

$$0 = H + v_y T - \frac{1}{2} g T^2. \tag{11}$$

Teniendo en cuenta que $v_y = v \operatorname{sen} \theta$, esta ecuación tiene las soluciones

$$\begin{aligned} T &= \frac{v}{g} \operatorname{sen} \theta \pm \frac{v}{g} \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{2gH}{v^2}} \\ &= \frac{v}{g} \left[\operatorname{sen} \theta \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{2gH}{v^2}} \right] \end{aligned} \tag{12}$$

(la solución física es la que corresponde al signo + ya que es la única que conduce a un valor positivo para el tiempo).

El alcance del proyectil se puede ahora evaluar de manera directa usando la relación $x = v_x t$ entre la posición horizontal y el tiempo (no hay aceleración a lo largo del eje horizontal). Teniendo en cuenta que $v_x = v \cos \theta$, llamando R al alcance horizontal y usando la expresión anterior para el tiempo de vuelo T, encontramos

$$R = (v \cos \theta)\, T = \frac{v^2}{g} \cos \theta \left[\operatorname{sen} \theta + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{2gH}{v^2}} \right] \tag{13}$$

Obsérvese que cuando el ángulo de lanzamiento es negativo (por debajo de la horizontal), se tiene $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$, de manera que el alcance es menor que si el lanzamiento se hace con un ángulo positivo.

Particularizando para cada uno de los fragmentos se tiene

$$R_1 = \frac{v_1^2}{g} \cos \alpha \left[\operatorname{sen} \alpha + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{2gH}{v_1^2}} \right] \tag{14}$$

$$R_2 = \frac{v_2^2}{g} \cos \beta \left[\operatorname{sen} \beta + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \beta + \frac{2gH}{v_2^2}} \right] \tag{15}$$

(c) La expresión general para el tiempo de vuelo, T, ya la hemos calculado en el apartado anterior. Para el primer fragmento tenemos

$$t_1 = \frac{v_1}{g}\left[\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{2gH}{v_1^2}}\right] \tag{16}$$

mientras que para el segundo

$$t_2 = \frac{v_2}{g}\left[\operatorname{sen}\beta + \sqrt{\operatorname{sen}^2\beta + \frac{2gH}{v_2^2}}\right] \tag{17}$$

Finalmente, hay que decir que para calcular de manera general el valor numérico de las expresiones anteriores para la velocidad del segundo fragmento v_2 y el ángulo de salida β, es necesario conocer el valor de las masas de los dos fragmentos. Sin embargo, si se supone que $m_1 = m_2$, entonces sí se puede obtener el valor numérico con los datos que se dan en el enunciado.

Problema 2.
(a) Cuando el sistema se encuentra en equilibrio se tiene que cumplir

$$\sum \vec{F} = 0 \tag{1}$$

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = 0 \tag{2}$$

Cuando se ha alcanzado el equilibrio y el muelle se ha estirado una cantidad x_e , las fuerzas que actúan sobre el muelle son la tensión de la cuerda (T_1), hacia arriba, y la fuerza recuperadora (kx_e), hacia abajo. Las fuerzas que actúan sobre el bloque son la tensión de la cuerda (T_2), hacia arriba, y el peso del bloque (mg), hacia abajo. Por otra parte, las fuerzas que ejercen momento sobre la polea son las tensiones de las cuerdas T_1 y T_2 (en este caso las dos hacia abajo). Por lo tanto, suponiendo como positiva la dirección hacia abajo y también como positivos los momentos en sentido antihorario, en el equilibrio tenemos

$$kx_e = T_1 \tag{3}$$

$$mg = T_2 \tag{4}$$

$$T_2R - T_1R = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 \tag{5}$$

de manera que

$$kx_e = mg \Rightarrow x_e = \frac{mg}{k} \tag{6}$$

(b) Cuando se suelta el bloque ya no estamos en una condición de equilibrio, por lo que ahora

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{7}$$

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = I\vec{\alpha} \tag{8}$$

y tenemos

$$
\begin{aligned}
mg - T_2 &= ma && (9)\\
k\,(A + x_e) &= T_1 && (10)\\
T_2 R - T_1 R &= I\alpha = I\frac{a}{R} && (11)
\end{aligned}
$$

donde hemos usado la condición de no deslizamiento de la cuerda sobre la polea, $\alpha = a/R$.

De (11) y (10) se obtiene

$$T_2 = k\,(A + x_e) + I\frac{a}{R^2} \qquad (12)$$

lo que, llevado a (9), conduce a

$$\left(m + \frac{I}{R^2}\right) a = mg - kx_e - kA \qquad (13)$$

Pero del apartado (a) se tiene que $mg - kx_e = 0$, por lo que

$$a = -\left(\frac{kA}{m + \frac{I}{R^2}}\right) = -\left(\frac{kA}{m + \frac{M}{2}}\right) \qquad (14)$$

donde hemos usado que $I = MR^2/2$. El signo menos en (14) indica que, como A es positivo (hemos definido como positiva la dirección hacia abajo), la aceleración inicial del bloque irá hacia arriba (lo que también implica que la aceleración inicial angular de la polea es negativa, es decir, que la polea se moverá inicialmente en el sentido horario).
(c) El movimiento armónico de la masa es tal que se cumple

$$a = -\omega^2 A \qquad (15)$$

donde ω es la frecuencia angular del movimiento armónico, A es la amplitud del movimiento (lo que se ha desplazado hacia abajo el bloque) y a es la aceleración inicial de la masa (aceleración máxima) dada por (14).

Por lo tanto, el periodo del movimiento será

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{A}{(-a)}} = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{M}{2}}{k}} \qquad (16)$$

Obsérvese que este valor es distinto de $2\pi\sqrt{m/k}$, que es el que corresponde al sistema sencillo de una masa oscilando sujeta a un muelle, ya que aquí la polea tiene masa y el sistema tiene que "mover la polea", lo que implica que el periodo del movimiento es mayor (el bloque tarda más en oscilar).

Finalmente, usando los valores numéricos en (6), (14) y (16), se obtiene

$$x_e = 5 \text{ cm} \;;\; a = -4 \text{ m/s}^2 \;;\; T = 0,54 \text{ s}$$

Problema 3.

(a) Desde el punto que consideramos, y hasta el momento en que el bloque se para, es un movimiento uniformemente acelerado. Las fuerzas que actúan sobre el bloque son la gravedad y el rozamiento con el plano.

Si llamamos l a la distancia que recorre el bloque a lo largo del plano hasta pararse, se tiene que

$$v_f^2 - v_i^2 = 2al, \tag{1}$$

de manera que si lo aplicamos al movimiento de subida hasta el punto en que se para y al de bajada desde ese punto, podemos escribir:

$$0 - v_1^2 = 2\left[-g(\operatorname{sen}\alpha + \mu\cos\alpha)l\right], \tag{2}$$

$$v_2^2 - 0 = 2\left[g(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)l\right]. \tag{3}$$

Dividiendo ambas ecuaciones y reordenando se obtiene

$$\mu = \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}\tan\alpha. \tag{4}$$

(b) El trabajo W que realiza la fuerza de rozamiento sobre el bloque, durante todo el camino mencionado de subida y bajada, se puede evaluar mediante la diferencia de las energías cinéticas que el bloque tiene en el instante en el que pasa por el punto ascendiendo y el instante en que el bloque vuelve a pasar por ese mismo punto bajando:

$$W = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right) \tag{5}$$

(c) Para calcular el coeficiente de rozamiento y el trabajo sustituimos los valores que nos dan. De esta manera, los resultados son $\mu \simeq 0,35$ y $W = -1080$ J.
