Universidad Autónoma de Madrid

Facultad de Ciencias
Departamento de Física de la Materia Condensada

La introducción y utilización del concepto de diferencial en la enseñanza de la Física

Análisis de la situación actual y propuesta para su mejora

Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas
presentada por

Rafael López-Gay Lucio-Villegas

Director: **Dr. D. Joaquín Martínez Torregrosa**

Tutor: **Dr. D. Rodolfo Miranda Soriano**

Madrid, 2001

NOTA 1. Las hojas de color sirven de separadores para facilitar la localización de: a) los programas de actividades elaborados, y b) la descripción de lo que sucede en el aula cuando se utilizan esos programas de actividades.

NOTA 2. Las tres hojas plastificadas sueltas que se adjuntan (hojas recordatorio) sirven para identificar con mayor facilidad las cuestiones y problemas que se citan a lo largo del trabajo.

A mis padres

A Almu, Celia y Teresa

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento, en primer lugar, a todos los estudiantes, profesores en formación y profesores en activo que han participado en el desarrollo de esta investigación, aportando sus conocimientos, opiniones y reflexiones.

No es habitual en nuestro país que se realice investigación didáctica *desde* y *para* las aulas de secundaria, lo que genera a veces incomprensión y falta de reconocimiento hacia los que nos dedicamos a esa tarea. Frente a ello, quiero agradecer el apoyo y aliento constante que he recibido de muchas personas cercanas, docentes y no docentes. En particular, soy deudor del trabajo y el espíritu que he admirado en otros compañeros, de la Comunidad Valenciana y Andalucía principalmente: su ejemplo y entusiasmo han marcado positivamente mi carrera profesional. En un entorno próximo, quiero citar a los profesores Ramón Aguilar, Antonio Carmona, Asunción Galera y José A. Martín, con quien he compartido muchas horas de trabajo: sus apreciaciones, críticas y comentarios siempre me han servido de ayuda para mi labor docente en general, y para la realización de este trabajo en particular.

Agradezco también el apoyo y reconocimiento prestado por el Dr. Rodolfo Miranda. Su desinterés y entusiasmo aún me tienen gratamente sorprendido.

Por último, quiero expresar mi agradecimiento más sincero al Dr. Joaquín Martínez Torregrosa, de quien he aprendido y recibido mucho más de lo que podía esperar de un Director de Tesis. Su paciencia conmigo, su capacidad de trabajo, su facilidad para reflexionar en voz alta y, sobre todo, su afecto, han sido imprescindibles para desarrollar esta investigación.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA E ÍNDICE

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A partir de 3º de BUP comienza habitualmente la introducción y utilización del Cálculo diferencial. La mayor parte de los textos de Física desde este nivel ya lo incluyen en el desarrollo de sus temas, y cada vez es mayor el número de manuales de Física para primer curso de Facultades de Ciencias y Escuelas Universitarias que incorporan algún capítulo y/o apéndice dedicados a la introducción y desarrollo de los conceptos básicos del Cálculo diferencial. Es difícil encontrar exámenes de COU o de primeros cursos universitarios en los que no aparezcan cuestiones o problemas que requieran el uso del Cálculo diferencial, poniendo de manifiesto que forman parte inseparable del aprendizaje de la Física.

Ello responde, claro está, a la importancia crucial del Cálculo diferencial para el estudio de situaciones físicas con un mínimo de complejidad, más cercanas a la realidad que las tratadas en los cursos elementales: la historia de la ciencia muestra cómo la invención de dichos conceptos supuso un salto cualitativo en el tipo y complejidad de problemas que pudieron abordarse desde entonces.

Sin embargo, de un modo aparentemente contradictorio con esta situación, nuestra experiencia como docentes nos hace intuir la existencia de un consenso generalizado entre los profesores sobre la incapacidad de los alumnos para utilizar estos procedimientos con la seguridad necesaria para resolver situaciones que se separen, aun ligeramente, de las desarrolladas en clase. La frase, nada infrecuente, "el Cálculo diferencial es sólo un instrumento" podría esconder, incluso, una aceptación implícita de que no es necesaria una comprensión profunda de dichos conceptos en el contexto de la Física, sino que se aceptaría la restricción de su comprensión a la utilización de las reglas para operar y hacer desarrollos miméticos.

Es probable, además, que ese sentimiento generalizado entre los profesores de ambigüedad sobre los conceptos diferenciales -"son muy importantes pero no es necesario aprenderlos de verdad"- se repita de unos cursos a otros, de manera que casi nunca se plantea como objetivo explícito su aprendizaje con comprensión en el contexto de la Física, lo que, como trataremos de mostrar, puede generar entre los estudiantes actitudes de inseguridad, rechazo e incluso ansiedad, que probablemente no afecten sólo al uso del Cálculo diferencial, sino que alcance a toda la Física en general (Aghadiuno, 1992; Martin y Coleman, 1994; Monk, 1994).

Nuestra intención en este trabajo es salir al paso de esta situación de *malestar difuso*: los profesores, que se sienten obligados a usar el Cálculo en sus clases, son conscientes de que sus alumnos no comprenden el sentido y el significado de lo que se hace, pero no saben identificar las causas y el camino para superar esa situación, y llegan incluso a considerar el Cálculo diferencial como un simple instrumento que puede ser usado sin comprensión. Para salir al paso, trataremos de identificar el origen de las deficiencias que obstaculizan una enseñanza/aprendizaje con comprensión del Cálculo diferencial en el contexto de la Física. Por tanto, nuestro interés no es mostrar que los alumnos no comprenden bien o que los profesores no realizan una enseñanza adecuada –algo que podría parecer casi evidente a la luz de la experiencia de todos aquellos que hemos enseñado Física en Bachillerato o primeros cursos universitarios- sino analizar con detalle el proceso de enseñanza/aprendizaje para caracterizar las causas de esa situación. Este diagnóstico preciso debe permitirnos, además, elaborar una propuesta alternativa que supere las deficiencias detectadas y ponerla a prueba, contrastando con la situación de partida.

Así pues, las cuestiones que pretendemos abordar en este trabajo son:

- *¿comprenden los alumnos los conceptos fundamentales del Cálculo diferencial que se utilizan en las clases de Física?, ¿cuáles son las deficiencias en su comprensión y cuáles son sus consecuencias?*

- *¿la enseñanza habitual de estos conceptos es potencialmente significativa, o tiene deficiencias que hacen muy poco probable una comprensión adecuada de los mismos?*
- *¿es posible una enseñanza de dichos conceptos que evite las deficiencias detectadas?, ¿produce mejoras respecto a la situación actual?*

Debemos resaltar, no obstante, que la necesaria acotación que requiere un trabajo con profundidad, nos ha conducido a centrarnos en el estudio del concepto de diferencial. Esta elección está directamente relacionada con el objetivo de nuestro trabajo, debido al papel clave que siempre ha jugado la diferencial en las aplicaciones físicas del Cálculo. En efecto, la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del Cálculo diferencial, al adoptar un enfoque puramente matemático, se han centrado en los conceptos de derivada e integral (Azcárate, 1990; Bartle, 1996; Calvo, 1998; Confrey y Smith, 1994; Ferrini-Mundy y Graham, 1991; López de los Mozos, 1991; Orton, 1983 *a* y *b*; Schneider, 1992; Thompson, 1994; Turégano, 1998), ignorando incluso desde este enfoque el papel relevante que la diferencial ha adquirido a partir del primer tercio de este siglo en el Análisis Matemático. Pero no se trata de fijar nuestra atención en un concepto aislado; como trataremos de mostrar, la comprensión del concepto de diferencial permitirá comprender mejor el conjunto del Cálculo, en concreto las relaciones que existen entre los conceptos de diferencial, derivada e integral definida.

Por último, conviene destacar la peculiaridad del ámbito de estudio y aplicación de este trabajo, pues guarda relación con dos asignaturas distintas (Física / Matemáticas) y con dos niveles distintos (Secundaria / Universidad).

En efecto, aunque nuestra guía ha sido siempre la aplicación del Cálculo en la Física, es evidente que la comprensión del mismo guarda una estrecha relación con el programa de Cálculo en la asignatura de Matemáticas. Durante los últimos años se han realizado desde el campo de la didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas frecuentes llamadas a buscar una mayor coordinación y transferencia entre las asignaturas y profesores de Ciencias y Matemáticas (Good, 1991; Monk, 1994; Parker, 1994; Rutter, 1994) y, en concreto, del Cálculo diferencial (Alibert *et al.*, 1987). Ya en un trabajo editado por la Unesco (1975 *b*) sobre este problema se comenta: "(...) es necesario desarrollar la habilidad de los alumnos tanto para identificar las situaciones matemáticas dentro de la Física como para usar las herramientas matemáticas clave...".

En cuanto a la relación con distintos niveles, tanto los planes de estudio como los materiales de enseñanza ponen de manifiesto el uso del Cálculo diferencial en la Física desde los últimos años de Secundaria hasta la Universidad, y desde la investigación didáctica se ha insistido en la búsqueda de transferencia de la investigación llevada a cabo en la Secundaria hacia la Universidad. Así, Burn (1993) plantea la necesidad de establecer puentes entre la enseñanza del Cálculo en uno y otro nivel, y en el volumen ya citado de la Unesco (1975 *a*) se afirma: "(...) las universidades necesitan desarrollar más su habilidad para responder a los estudiantes, y para compaginar mejor sus cursos, en consonancia con lo que saben los alumnos. Para esto el diagnóstico de las dficultades que experimentan los estudiantes es una herramienta importante, y se requiere un mayor flujo de información entre la escuela secundaria y la universidad..."

Se trata, pues, de un trabajo en la frontera de dos niveles educativos, cuyos resultados pretenden tener implicaciones para la enseñanza de la Física, tanto en los últimos cursos de Secundaria como en los primeros de las Facultades de Ciencias y Escuelas Técnicas.

ÍNDICE

Una vez planteadas las preguntas que orientarán nuestro interés, los capítulos de este trabajo se estructuran para concretar, profundizar y responder a las mismas, distinguiendo tres partes secuenciadas lógicamente pero separadas.

La primera parte tiene como objetivo clarificar el uso de la diferencial en la Física: qué problema se encuentra en el origen de la necesidad de usar el Cálculo diferencial, cuál es la estrategia global que se utiliza para resolverlo, cuál es el significado físico de los conceptos inventados (diferencial, derivada, integral) y las relaciones entre ellos en este *contexto aplicado*. Esta clarificación resulta imprescindible para analizar lo que está pasando en la enseñanza actual y para formular propuestas alternativas.

Numerosos trabajos sobre la enseñanza de distintos conceptos de Física han puesto de relieve la importancia de conocer la evolución de los conceptos para comprender mejor las deficiencias en la enseñanza actual. Por ello, en el capítulo 1 se realiza una revisión histórica y epistemológica sobre el uso de la diferencial para resolver problemas físicos, identificando dos concepciones básicas y con clara influencia en el uso actual del Cálculo: la concepción de Leibniz y la concepción de Cauchy. Se añade, por último, la concepción actual formulada a principios del siglo XX: la diferencial de Fréchet. Este estudio arrojará luz sobre las ventajas e inconvenientes de cada una de esas concepciones para aprovechar al máximo el uso del Cálculo en la Física.

En el capítulo 2 se aborda directamente, desde nuestra experiencia como docentes, el papel de la diferencial en la Física, aportando luz sobre el problema fundamental al que se trata de dar respuesta y la estrategia global para resolverlo; como conclusión, obtendremos una definición precisa de la diferencial cuyo significado y características coinciden con la concepción de Fréchet, aunque adaptada al caso de funciones de una sola variable.

Como conclusión de esta primera parte, estaremos en condiciones de avanzar de un modo fundado qué constituiría una comprensión adecuada del concepto de diferencial en el campo de la Física, lo que nos permitirá analizar en qué medida en la enseñanza habitual de la Física se suministran oportunidades adecuadas para generar dicha comprensión, y servirá también de guía para elaborar después propuestas alternativas.

La segunda parte se estructura en torno a la hipótesis de que *la presentación didáctica habitual de la diferencial adolece de serias deficiencias que afectan a su comprensión y uso funcional por los alumnos en el contexto de la Física, generando actitudes negativas hacia la Física y su aprendizaje*. Los cuatro capítulos que constituyen esta primera parte pretenden fundamentar y validar esta hipótesis.

En el capítulo 3 se justifica y fundamenta la verosimilitud de nuestra hipótesis. En el 4 se presenta el diseño experimental realizado para su contrastación, que se concreta en la operativización de la hipótesis en un total de veinte consecuencias contrastables y en la presentación de cada uno de los instrumentos para la obtención de datos y los estadillos para su análisis. En el capítulo 5 se presentan y analizan de forma pormenorizada los resultados obtenidos con cada uno de los instrumentos concretos aplicados a una amplia muestra de textos, profesores y estudiantes. En el capítulo 6 se hace un análisis global de esos resultados y un resumen de las principales conclusiones.

La tercera parte de este trabajo se estructura en torno a la hipótesis de que *los tópicos de Física en los que se suele introducir y desarrollar el Cálculo diferencial en el Bachillerato, pueden ser enseñados utilizando el concepto de diferencial de Fréchet, consiguiendo con ello una clara mejoría de las deficiencias generadas por la enseñanza habitual.* Los capítulos que constituyen esta tercera parte están dedicados a justificar y validar esta hipótesis de una forma parcial, pues se trata del primer intento en esta dirección, que se realiza, además, en 3º BUP y COU. Esperamos que futuros trabajos de replicación contribuyan a validar la hipótesis con mayor amplitud y profundidad.

En el capítulo 7, se presenta la fundamentación de la hipótesis, y en el capítulo 8 el diseño experimental realizado para su contrastación. Ese diseño se concreta en la operativización de la hipótesis en una serie de consecuencias contrastables y en la presentación de los instrumentos para contrastar tales consecuencias. En el capítulo 9 se presentan y analizan los resultados obtenidos con esos instrumentos.

En el último capítulo, el 10, se recogen a modo de síntesis las principales conclusiones obtenidas en el trabajo y se sugieren nuevos interrogantes para abordar después de este estudio.

Según lo expuesto hasta aquí, el esquema general de este trabajo queda de acuerdo con el siguiente índice general:

ÍNDICE GENERAL

PRIMERA PARTE

SEGUNDA PARTE

ANEXOS

Capítulo 1

GÉNESIS Y EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE DIFERENCIAL

El análisis de lo que ocurre en las clases de Física en torno al concepto de diferencial, requiere el conocimiento problematizado e histórico del mismo. Esto supone conocer cuál o cuáles fueron los problemas que están en el origen de la invención de la diferencial, y de qué manera contribuyó esa invención a la resolución de tales problemas. Además, puesto que los conocimientos científicos evolucionan, supone también conocer las principales ambigüedades, dificultades y tensiones asociadas al uso y significado de la diferencial, y las respuestas que ello ha provocado a lo largo de los tres siglos de historia del Cálculo. Este conocimiento histórico debe aportar criterios que ayuden en la detección y comprensión de las dificultades y ambigüedades presentes hoy también en el uso habitual de la diferencial para resolver problemas físicos, y debe contribuir a caracterizar de un modo claro qué concepción de la diferencial debería enseñarse para poder aprovechar toda la potencia que aporta su uso en la Física.

Realizaremos en este capítulo un breve recorrido histórico tanto de los problemas que dieron lugar a la necesidad del Cálculo diferencial como de la evolución del papel y el significado de la diferencial. Teniendo en cuenta que nuestro interés en el Cálculo está dirigido a su utilidad para abordar situaciones físicas y no tanto a sus aspectos formales, señalaremos las principales ventajas y deficiencias que, de acuerdo siempre con nuestra intención, podemos detectar en las distintas concepciones históricas sobre la diferencial. La última concepción que presentaremos, la diferencial de Fréchet, será descrita brevemente pues dedicaremos el segundo capítulo a un tratamiento más detenido de la misma.

1.1. PROBLEMAS QUE GENERARON LA NECESIDAD DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Durante los siglos XV y XVI, en el contexto de una nueva situación industrial en Europa y el nacimiento del capitalismo, se produjo un gran avance en la navegación y la tecnología que dio lugar a un rápido desarrollo de ciencias tales como la astronomía y la mecánica. A lo largo de este desarrollo se fueron acumulando una serie de problemas matemáticos de difícil solución, relacionados con el movimiento en su sentido más amplio, y cuyo tratamiento provocó el nacimiento del Análisis Matemático, "el instrumento teórico más poderoso que haya sido construido jamás por los seres humanos a lo largo de su historia" (Rossi, 1997, p. 199). En palabras de Aleksandrov *et al.* (1956): "En último término, toda ciencia natural estudia algún aspecto del movimiento. El análisis matemático es la rama de la matemática que proporciona métodos de investigación cuantitativa de los distintos procesos de cambio, movimiento y dependencia de una magnitud respecto de otras" (p. 92).

Algunos de los problemas planteados entonces, como el del cálculo de longitudes de curvas, áreas y volúmenes en casos sencillos, habían sido ya abordados con cierto éxito por los griegos hace más de dos mil años aplicando el método de *exhausción*[1]. El término empleado para designar al método no fue empleado por los griegos sino que fue introducido en el siglo XVII, y hace referencia al proceso de ir dejando *exhausta* o vacía la región en cuestión. La ausencia del concepto de límite impide que haya un camino directo que conduzca al resultado, pero ello no significa que el resultado sea sólo aproximado, pues como afirma Kline (1972, p. 121), se trata de un método riguroso que valida los resultados a través de pruebas indirectas.

[1] El método de *exhausción* se debe al matemático griego Eudoxo (principio del siglo IV a.d.C.), recogido y aplicado en el libro XII de los *Elementos* de Euclides (final del siglo IV y principio del III a.d.C.). "Las ideas esenciales de este método son realmente muy simples y se pueden describir brevemente como sigue: Dada una región cuya área quiere determinarse, se inscribe en ella una región poligonal que se aproxime a la dada y cuya área sea de fácil cálculo. Luego se elige otra región poligonal que dé una aproximación mejor y se continúa el proceso tomando polígonos con mayor número de lados cada vez, tendiendo a llenar la región dada" (Apostol, 1961, p. 6).

Arquímedes (siglo III a.d.C.) se basa en este mismo método al hacer aproximaciones sucesivas mediante polígonos inscritos y circunscritos, y obtiene así la fórmula exacta del área del círculo y de algunas otras figuras especiales. Por esta razón, algunos autores atribuyen a este genio el descubrimiento original del Cálculo. No obstante, como explica Edwards (1937), tres ingredientes indispensables del Cálculo estaban ausentes de sus métodos: la introducción explícita del concepto de límite, un algoritmo computacional general para el cálculo de áreas y volúmenes, y un reconocimiento de la relación inversa entre los problemas del área y la tangente.

Siguiendo la descripción de Kline (1972), y de acuerdo con otros autores (Aleksandrov *et al.*, 1956; Bourbaki, 1969; Glez. Urbaneja, 1992; Hull, 1959, Rossi, 1997) pueden identificarse en el siglo XVII cuatro tipos de problemas que dieron lugar a la creación del Cálculo:

1. *El problema de calcular el ritmo de cambio.* Este problema surgió directamente del dominio de la mecánica en el intento de enfrentarse con movimientos donde la rapidez y la aceleración variaban con el tiempo: se trataba de encontrar la rapidez y aceleración en cualquier instante a partir de la ecuación de la posición; e inversamente, calcular la rapidez y el desplazamiento sobre la trayectoria a partir de la ecuación de la aceleración de un cuerpo en función del tiempo.

En estos casos, el concepto de rapidez media resultaba insuficiente: no podía calcularse la rapidez en un instante, pues al ser cero tanto el desplazamiento como el tiempo empleado, se llegaba a la indeterminación: *0/0*. Del mismo modo, no podía calcularse el desplazamiento multiplicando la rapidez por el tiempo empleado, pues si la rapidez cambiaba durante ese intervalo de tiempo, ¿qué valor de la rapidez debía tomarse?

Hemos de resaltar, como señala Schneider (1992), que las dificultades que plantearon históricamente estos problemas iban más allá de la comprensión del concepto de límite, y procedían también de una visión fuertemente empirista de las ciencias en general y de las Matemáticas en particular; una visión que se negaba a admitir la existencia de conceptos como el de rapidez instantánea por carecer de un referente empírico directo. En efecto, la rapidez media es un concepto que puede ser percibido coordinando las sensaciones de duración y desplazamiento, y puede ser medido; por el contrario, la rapidez instantánea es un objeto mental que escapa al universo de los sentidos -no existen ahora las sensaciones mencionadas- y de la medida directa. Según la autora, el obstáculo consiste en que “se le niega a las Matemáticas el derecho (o simplemente la posibilidad) de delimitar con precisión algo que los sentidos no aprehenden más que imperfectamente”; debido a este obstáculo, se pretende llegar al concepto de rapidez instantánea a través del mundo de los sentidos, del cual escapa una y otra vez, lo que provoca un claro rechazo hacia el concepto de rapidez instantánea. Esta resistencia a aceptar los objetos teóricos construidos por la ciencia, confundiéndolos con los objetos reales del mundo, tal como se recoge en los diálogos entre Galileo y su maestro Del Monte, es un obstáculo característico del nacimiento de la ciencia moderna, bien documentado por historiadores y filósofos de la ciencia (Mathews, 1994 *a* y *b*; Westfal, 1977, pp. 38 y ss.)

El problema de calcular la rapidez instantánea y la distancia recorrida en movimientos no uniformes muy pronto se transformó en un caso especial del problema de calcular el ritmo de cambio instantáneo de una variable con respecto a otra, y su inverso. Su solución fue propuesta principalmente por Newton.

2. ***El problema de encontrar la tangente a una curva dada.*** Se trataba de un problema de geometría pura pero con importantes aplicaciones en el dominio de la óptica y en el de la mecánica. El concepto mismo de tangente no estaba claro, pues la concepción griega de línea que toca a la curva en un sólo punto y se encuentra a un lado de la misma, no era suficiente para curvas que iban más allá de las cónicas.

3. ***El problema de calcular valores máximos y mínimos de una función.*** Era un problema de interés para la mecánica y la astronomía, en relación por ejemplo con el ángulo que determina el alcance máximo de un proyectil, o con la mayor y menor distancia de un planeta al sol.

4. ***El problema de las sumas infinitas.*** Se trataba de encontrar la longitud de una curva o la distancia recorrida por un planeta, el área limitada por una curva, el volumen limitado por superficies, el centro de gravedad de los cuerpos, la atracción gravitatoria entre cuerpos extensos, etc. Es el problema que más aportaciones recogía de la Matemática griega.

Antes de que se produjera la síntesis unificadora de Newton y Leibniz, estos cuatro tipos de problemas habían quedado reducidos a dos categorías a lo largo del siglo XVII: problemas en los que intervenía la derivación y problemas en los que intervenía la integración. La relación entre la solución a uno y otro tipo de problemas era conocida sólo para algunos casos particulares, lo que llevó a Barrow a vislumbrar que en cierto modo un problema era el inverso del otro (Glez. Urbaneja, 1992, p. 68). Pero fue precisamente el reconocimiento en términos generales de la relación inversa entre ambos problemas, es decir, la reducción de la integración al proceso de antiderivación, lo que marcó el nacimiento del Cálculo diferencial.

1.2. CONCEPCIONES MÁS IMPORTANTES SOBRE LA DIFERENCIAL Y SU EVOLUCIÓN

El concepto de diferencial ha experimentado una larga evolución desde su invención por Leibniz hasta su significado actual en el dominio de las Matemáticas. Esta evolución ha estado marcada por la relación entre Física y Matemáticas: muy estrecha en los primeros momentos y fragmentada a partir del siglo XIX, afectando directamente al significado y el papel de la diferencial en todo el Cálculo. Es ilustrativo de estas relaciones cómo Aghadiuno (1992) alude a la aportación de Newton al Cálculo en términos de “colonización” de la Física sobre las Matemáticas, “como los blancos colonizaron el África negra”, “donde se trabajan los problemas de los colonizadores desde el lenguaje de los colonizadores”; y describe después la aportación de Gauss y Cauchy en términos de “descolonización”, de “vuelta a la cultura aborigen”.

No obstante, esta “descolonización” no siempre es aplaudida desde los matemáticos actuales. Así, Glez. Urbaneja (1991) critica el formalismo y reclama una mayor cercanía, en cuanto a la enseñanza, entre los conceptos matemáticos y los problemas que los generaron, proponiendo un cambio en la actual visión de las Matemáticas. Desde dentro de las Matemáticas, en fechas recientes, se han propuesto alternativas al Análisis clásico formulado por Cauchy, tales como el NSA (Non-Standard Analysis), que sugieren una recuperación *revisada* de algunos conceptos clave del Análisis original de Newton y Leibniz con la intención de recuperar la fecundidad frente al formalismo y la abstracción (Cuenca, 1986).

El breve, y necesariamente incompleto, análisis histórico que aquí se presenta sobre la evolución de la diferencial tiene como objetivo aportar luz para el posterior análisis sobre el significado, papel y uso de la diferencial en la enseñanza de la Física. En otros trabajos (Alibert *et al.*, 1987; Artigue, 1986 y 1989) se puede encontrar un análisis histórico más detallado del concepto de diferencial y de su incorporación a la enseñanza en el país de los autores.

En un esfuerzo de síntesis, hemos identificado tres concepciones representativas de esta larga evolución: la diferencial de Leibniz, asociada al origen del concepto y muy ligada a los problemas físicos; la diferencial de Cauchy, con una clara ruptura que reivindica el rigor y el formalismo; y la diferencial de Fréchet, que supone una especie de *reencuentro* con la idea original pero respetando el rigor exigido dentro de la Matemática.

1.2.1. La primera noción de diferencial: la diferencial de Leibniz

Todas las soluciones sugeridas a lo largo del siglo XVII para los cuatro tipos de problemas ya citados estaban basadas en el uso de las *cantidades infinitesimales* o *cantidades infinitamente pequeñas*[2]. Así, Pascal, Barrow y Fermat usaron el *triángulo característico* para el cálculo de tangentes, un triángulo *tan pequeño* que llegan a confundirse arco y tangente; por otra parte, Kepler, Galileo, Cavalieri y Roverbal consideraron el área bajo una curva como una suma de cantidades infinitamente

[2] Las cantidades infinitesimales usadas habitualmente en la Física coinciden en significado y características con las que aquí se describen, y que se remontan a los orígenes del Cálculo. Son estas cantidades, y su relación con la diferencial, de las que nos ocuparemos en este apartado, y nada tiene que ver con la nueva incorporación de las cantidades infinitesimales dentro del Análisis no estándar (NSA). Este nuevo Análisis, desarrollado por Robinson a partir de la década de los 60, es poco conocido por los usuarios del Cálculo, y es razonable admitir que el uso habitual de los infinitesimales se hace refiriéndose a su significado original. Dentro del NSA existen trabajos que al mismo tiempo que reconocen la simplicidad que adquieren algunas definiciones y razonamientos reconocen también las dificultades que conlleva el uso de la lógica matemática (Cuenca, 1986; Kossak, 1996), o que muestran serias reservas a la sustitución del Análisis estándar por el NSA en niveles elementales decantándose por su introducción con los ya expertos en el Análisis estándar (Machover, 1993).

pequeñas, técnica perfeccionada analíticamente por Wallis, Gregorio de St. Vicent, Mercator...

¿Qué eran estas cantidades infinitamente pequeñas? Su significado evolucionó durante este siglo como respuesta a las críticas que se formulaban contra su uso. Podemos identificar tres significados: la concepción de *indivisibles*, la concepción como *cantidad fija* muy pequeña, y la de *cantidad variable* que puede hacerse tan pequeña como se quiera.

Los **indivisibles** constituían las *partes últimas* de una magnitud que cambia, con una dimensión distinta de la que tiene la propia magnitud. Por ejemplo, Cavalieri consideraba el área constituida por un número indefinido de segmentos rectos, paralelos y equidistantes; Galileo consideró la ordenada en la gráfica rapidez-tiempo como la rapidez en un instante y como una distancia infinitesimal recorrida; y el mismo Leibniz consideró en sus primeros trabajos que el área bajo una curva era la suma de ordenadas. Pero la teoría de los indivisibles contradecía la teoría aristotélica según la cual toda magnitud era continua y divisible en partes del mismo tipo que la magnitud original, y además se apoyaba excesivamente en la intuición; todo ello provocó duras críticas y actitudes de recelo entre los matemáticos. Para una discusión más detallada del uso de los indivisibles y las ideas subyacentes, tanto en sus orígenes como en su uso en la enseñanza, puede verse el trabajo de Schneider (1991).

En respuesta a esas críticas, Fermat, Pascal, Roverbal y otros se alejaron de los indivisibles, asegurando que ellos no tomaban ordenadas sino rectángulos de anchura infinitesimal; salvaban así el problema de la dimensionalidad, pero no añadían ningún rigor. Los indivisibles fueron sustituidos por **incrementos muy pequeños, considerados como cantidades fijas**[3]. Desde esta **visión estática** de los infinitesimales, un cambio en cualquier magnitud era considerado como un agregado de cambios infinitesimales. Estas cantidades permitían realizar aproximaciones cuyo error podía ser más pequeño que cualquier cantidad fijada de antemano.

[3] Jean Bernouilli, al igual que Leibniz, utilizaba analogías para explicar lo que eran las diferenciales o cantidades infinitesimales: “las cantidades infinitamente grandes son como distancias astronómicas y las infinitamente pequeñas son como animalillos descubiertos en el microscopio” (Kline, *op. cit.*, p. 512).

Es precisamente esta justificación del uso de los infinitesimales la que llevó a la **visión dinámica:** son **cantidades que tienden a cero, que se pueden hacer tan pequeñas como se quiera**, de forma que el resultado al que conducen es una aproximación cuyo error es más pequeño que cualquier cantidad finita. Un cambio en una magnitud era considerado ahora como un movimiento continuo, y no como un agregado discreto de pequeños cambios. Son las "cantidades divisibles evanescentes" que aparecen en los *Principia* de Newton, o las "cantidades incipientes", en oposición a las "cantidades ya formadas", usadas por Leibniz.

Leibniz y sus seguidores (hermanos Bernouilli, Marqués de L´Hôpital, Euler...), cuya notación y lenguaje se impusieron en el Cálculo diferencial, llamaron *diferencial* de una magnitud (d*y*)[4] a la variación infinitesimal de esa magnitud (*y*) (su "momento", en el lenguaje de Newton). A partir de la diferencial, que ocupaba un lugar central en la estructura del Cálculo, se definían la derivada y la integral: la primera como un cociente de diferenciales o cantidades infinitesimales, y la segunda como una suma de *infinitas* diferenciales. En el caso de Newton, usaba los "momentos" sólo como medio para el cálculo de fluxiones (derivadas), mientras redujo la integral, después de reconocer el carácter inverso de la derivación y la integración, al cálculo de primitivas.

Los siguientes ejemplos ilustran el uso original de Newton y Leibniz de estas cantidades infinitesimales en sus cálculos y razonamientos, que ellos planteaban siempre en clave geométrica[5]:

- Para calcular la derivada de la función $y=x^2$, consideraban que una variación infinitesimal $\mathrm{d}x$ produciría una variación también infinitesimal $\mathrm{d}y$: $y+\mathrm{d}y = (x+\mathrm{d}x)^2 = x^2+2x\cdot \mathrm{d}x+\mathrm{d}x^2$; por tanto: $\mathrm{d}y = 2x\cdot \mathrm{d}x+\mathrm{d}x^2$. Después dividían ambos miembros por $\mathrm{d}x$: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=2x+\mathrm{d}x$, y sólo en este momento despreciaban los sumandos infinitesimales, obteniendo: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 2x$

[4] Para referirnos a la diferencial de cualquier magnitud o función, siguiendo las recomendaciones de la IUPAP (1987), escribiremos siempre la letra "d" normal, seguida del símbolo de la magnitud o función en cursiva. Por ejemplo: d*y*, d*f*, d*x*, d*h*, d*e*, d*T*...

[5] El Análisis del siglo XVII tenía como objeto de estudio las curvas geométricas, y fue Euler, en el siglo XVIII, el encargado de separar Análisis y Geometría, dando una definición precisa de función y convirtiendo a éste concepto en el objeto de estudio del Análisis.

- Para *demostrar* la relación inversa entre la derivación y el cálculo de áreas $A(x)$ bajo curvas $y(x)$, consideraban que una variación infinitesimal dx produciría una variación infinitesimal dA, la cual podía *aproximarse* por el rectángulo de altura $y(x)$ y base dx, resultando: $dA=y\cdot dx$; dividiendo ambos miembros por dx, obtenían la relación básica: $dA/dx=y$

Como puede apreciarse, el uso de los infinitesimales presentaba ciertas ventajas: se escribía como igualdad lo que sólo podía considerarse como aproximación si se utilizaban *incrementos finitos* –lo que resulta *doloroso* para un matemático actual, según Freudenthal (1973)-; además, los términos que contenían estas cantidades podían despreciarse en el momento justo del razonamiento que se considerase oportuno, lo que resume el Marqués de L'Hôpital mediante la ecuación: $\boldsymbol{y+dy=y}$ Pero, junto a estas ventajas, el uso de los infinitesimales generaba grandes dudas y fuertes críticas que pueden resumirse en las siguientes cuestiones:

- ¿Cómo puede justificarse la supresión de algunos términos? Decir simplemente que las cantidades suprimidas eran cero, sin explicar por qué al principio no eran nulas y al final sí, parecía violar el *principio de identidad* según el cual no existe estatuto intermedio entre la igualdad y la diferencia (aunque ésta sea muy pequeña) para dos entes matemáticos; George Berkeley era tajante al concluir: "no pueden obtenerse proposiciones verdaderas de principios falsos" (citado por Rossi, 1997, p. 204).

- Otras veces se decía que no eran cero, pero sí despreciables frente a cantidades incomparablemente más grandes. El siguiente texto literal de Leibniz, en una carta a Wallis, refleja este proceder (Laugwitz, 1997*a*): "Es útil considerar cantidades infinitamente pequeñas tales que, cuando se busca su cociente, son omitidas, en vez de ser consideradas como cero, cuando aparecen seguidas de cantidades incomparablemente más grandes (...)". Pero, entonces, ¿cómo puede obtenerse un resultado exacto despreciando términos que no son cero?

- ¿Cómo puede explicarse que la suma de infinitesimales, de cantidades despreciables, conduzca a un resultado finito?, se preguntaba el físico y geómetra holandés Nieuwentijdt (Kline, *op. cit*., p. 509)

- ¿Con qué criterio se pasa de escribir una expresión sólo aproximada en términos de incrementos, a otra exacta en términos de diferenciales?, ¿puede realizarse este paso para cualquier expresión? En el ejemplo citado más arriba, se aproxima el área de la curva por la de un rectángulo (Ä*A* *y*· d*x*) e inmediatamente se escribe como igualdad en términos de diferenciales (d*A*=*y*· d*x*), pero no se trata de una deducción sino de una definición. En otros casos, como por ejemplo d*A* de una esfera, no es tan evidente el paso de la expresión aproximada como incrementos a la expresión diferencial (ver **Anexo 2**), y mucho menos evidente resulta en la mayoría de los problemas físicos, en los que son posibles muchas expresiones distintas de partida que relacionan incrementos muy pequeños de forma aproximada. ***La idea intuitiva de que la suma de infinitos "trocitos" infinitamente pequeños dará lugar al trozo grande deseado sin importar la "forma" de los trocitos, fallaba en muchas ocasiones, conduciendo a resultados absurdos***[6].

Newton y Leibniz fueron incapaces de responder con claridad a estas críticas y objeciones debido, en gran parte, a la falta de una definición precisa del concepto de límite. En los últimos trabajos de Newton existe un intento de abandonar el uso de los infinitesimales: "en matemáticas no se deben despreciar ni los errores más diminutos", decía (citado por Kline, *op. cit*., p. 480). Para ello, define la derivada como la "razón última" del cociente de los incrementos "no antes de que se anulen, no después, sino aquella con la que se anulan", escribe en los *Principia* (citado por Kline, *op. cit*., p. 482), y la calcula partiendo de una expresión incremental aproximada, calcula el cociente y conserva el primer término de una suma "haciendo tender el incremento a cero". Para evitar las integrales como suma de infinitesimales, escribe directamente la derivada de una función incógnita y después antideriva. Sin embargo, todo era un intento formal para evitar contradicciones de las que era consciente, ya que, como criticaba Berkeley, "al final es preciso volver a la idea de los incrementos evanescentes" (citado por Edwards, 1937, p. 294).

[6] En el trabajo titulado *Campo di tartufi*, en el siglo XVII, Torricelli inscribe en una esfera un cilindro cuyo diámetro es igual a su altura, dando lugar a la división de la esfera en dos sólidos;

Por su parte, Leibniz admite su impotencia ante las críticas formuladas y reconoce en alguna ocasión que él “no cree en magnitudes verdaderamente infinitas o verdaderamente infinitesimales” (Kline, *op. cit*., p. 511). No obstante, defiende su uso por una cuestión meramente práctica, convencido de que una formulación clara de las reglas de operación y una debida aplicación de las mismas, conducía a resultados correctos y razonables, aunque fuese dudoso el significado de los símbolos empleados, que podían ser considerados “ficciones útiles para abreviar y hablar universalmente” (Edwards, *op. cit*., p. 264). En su réplica a las críticas del físico Nieuwentijdt, el propio Leibniz afirma: "Se pueden utilizar estos entes últimos -esto es, cantidades infinitas e infinitamente pequeñas- como un instrumento, en la misma forma en que los algebristas utilizaban las raíces imaginarias con gran provecho” (Kline, *op. cit.*, p. 509).

Esta apelación última al éxito de las conclusiones obtenidas, anteponiendo la fecundidad frente al rigor, es un reconocimiento implícito del fracaso para justificar el uso de los infinitesimales, pero es también una característica del nacimiento del Cálculo (Bourbaki, *op. cit*., p. 239). “El rigor es la preocupación de la filosofía, no de la geometría”, afirma Cavalieri (citado por Kline, *op. cit*., p. 507), manifestando así una actitud imprescindible para avanzar y evitar el freno del rigor: “La Matemática del siglo XVII presenta una inflexión radical respecto a la clásica griega (...) Se impone el lema 'primero inventar, después demostrar' (si se puede)” (Glez. Urbaneja, *op. cit*., p. 60). Esta actitud resulta lógica y razonable, pues ante situaciones abiertas, ante verdaderos problemas, la incertidumbre forma parte del proceso de investigación, y los conceptos científicos implicados en esa investigación no son inventados *de una vez para siempre* sino que son fruto de un lento y, frecuentemente, confuso proceso de gestación.

Este breve relato histórico ha mostrado la importancia que tuvo en la construcción del Cálculo el concepto de diferencial, y en general las cantidades infinitesimales, a pesar de la falta de una definición precisa y las dificultades para comprender su significado. Estas deficiencias confieren a la diferencial un carácter ambiguo: a veces son cantidades muy pequeñas, otras veces no se sabe lo que son, simplemente

haciendo uso de una descomposición infinitesimal de ambos sólidos, concluye en el resultado erróneo de que los dos deben tener el mismo volumen (citado por Schneider, 1991).

funcionan. Según Wallet (1982), esta diversidad de acepciones, extraña en un concepto matemático, proporciona una gran riqueza a la diferencial. Esta imagen se aleja de las ingenuas concepciones habituales sobre la naturaleza rigurosa y precisa de los conceptos matemáticos y se acerca a la vertiente tentativa y nebulosa de la invención de conceptos físicos[7].

Los creadores del Cálculo, conscientes de la debilidad conceptual de sus argumentos, destacaron su carácter algorítmico. Es comprensible que el éxito obtenido por la aplicación reiterada de esos algoritmos para resolver problemas, llevase a sus seguidores a una despreocupación por el significado. En particular, la creencia errónea de que toda relación aproximada entre incrementos puede considerarse exacta cuando son infinitamente pequeños, es decir, cuando se transforma en una expresión diferencial, les impedía comprender por qué en algunas ocasiones fallaba el algoritmo, lo que generó inseguridad entre matemáticos y físicos de la época.

Como tendremos ocasión de mostrar más adelante, esta concepción histórica (la diferencial como incremento infinitesimal) y la actitud mecánica a la que conduce, es dominante en la enseñanza habitual de la Física. Aunque la diferencial de Leibniz, con sus dificultades y contradicciones, supuso un enorme avance para la comprensión y estudio de la Física, el mantenimiento de esta misma concepción en la enseñanza tres siglos después no parece ser lo más adecuado para promover la confianza, y autonomía de los estudiantes.

1.2.2. La diferencial de Cauchy

Durante los dos siglos siguientes a la creación del Cálculo se puso de manifiesto su enorme utilidad para resolver una gran variedad de problemas. Este notable éxito, al no ir acompañado de ningún avance significativo en la clarificación y fundamentación de los conceptos y procedimientos utilizados, reforzó su carácter algorítmico y mecánico, y mantuvo la ambigüedad sobre la justificación y el significado de lo que se

[7] Este carácter incierto y *discutible* fue en sí mismo un objeto de crítica; una vez más, George Berkeley se queja en una nota a *Siris* (1744) de que los matemáticos de su tiempo "adoptan nociones oscuras y opiniones inciertas, y se rompen la cabeza por su causa,

hacía en cada problema. Como afirma Eves (1981, p. 134) en referencia a este período: "atraídos por la potente aplicabilidad del asunto, careciendo de una verdadera comprensión de los fundamentos sobre los que debe apoyarse, los matemáticos manipulaban los procesos analíticos de una manera casi ciega, a menudo guiados por una ingenua intuición de que lo que hacían debía ser válido".

Resulta lógico entonces que los grandes tratados del Cálculo de mediados del XVIII, como el de Euler, ofrecieran pocas novedades en cuanto a la clarificación conceptual y sí supusieran, en cambio, un claro exponente de la manipulación formal del infinito y de los infinitamente pequeños; los intentos de Euler por explicar el significado de ambos términos se saldaron con más confusión que claridad (Laugwitz, 1997*a*).

Consciente de las imprecisiones y ambigüedades del uso del infinito e infinitesimales, Lagrange convocó en 1784, en la Academia de Berlín, un concurso para reemplazar tales nociones sin perder simplicidad en los razonamientos[8]. Ante la falta de respuestas satisfactorias, Lagrange publicó su propia solución, una teoría de las funciones analíticas que liberaba al Cálculo diferencial de los infinitamente pequeños, volvía al Análisis de las magnitudes finitas, y colocaba a la noción de derivada en un lugar preeminente[9]. Pero, como ya les había ocurrido a otros antes, no se trataba más que de un desarrollo teórico, pues en el momento de las aplicaciones físicas, como se refleja en su *Mecánica Analítica*, Lagrange recuperaba el uso de la diferencial y de los infinitamente pequeños (Laugwitz, 1997*a*).

La contribución decisiva para la justificación rigurosa del Cálculo se debe al matemático francés Cauchy, cuyo trabajo se desarrolla en la primera mitad del siglo XIX, con el objetivo expresado por él mismo de "reconciliar el rigor con la simplicidad

contradiciéndose unos a otros y discutiendo como hacen todos los hombres" (citado por Rossi, *op. cit.*, p. 203).

[8] En dicho concurso se pedía expresamente: "explicar cómo es posible derivar tantos resultados verdaderos de una asunción inconsistente así como proporcionar un principio genuinamente matemático que reemplazase la noción del infinito sin pérdida de simplicidad y claridad de los resultados que se derivasen" (Laugwitz, 1997*a*).

[9] Es significativo su cambio de notación para referirse a la derivada, sustituyendo la expresión df/dx por esta otra: f'. Este mismo cambio se refleja en la enseñanza de la Física y las Matemáticas.

que proporciona el uso directo de cantidades infinitamente pequeñas” (citado por Edwards, *op. cit.*, p. 309). Gracias a un mejor conocimiento del concepto de límite y del conjunto de los números reales, Cauchy proporcionó una definición precisa de las cantidades infinitesimales, la derivada y la integral. En cuanto a la diferencial, Cauchy dejó de identificarla con un incremento infinitesimal y la vació de todo significado físico, pasando a ocupar un lugar marginal en la estructura del Cálculo.

En el primer parágrafo del segundo capítulo de su libro *Cours d’Analyse* (1821), Cauchy define la cantidad infinitamente pequeña como “una variable cuyo valor numérico decrece indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero” (pp. 26-27). Esta simple definición, y sobre todo una correcta interpretación del concepto de límite[10], son suficientes para superar algunas de las objeciones que se habían formulado en los siglos anteriores. En concreto:

- Los infinitesimales no son cantidades muy pequeñas, sino variables (x) o funciones ($f(x)$) que cumplen una propiedad: su límite cuando x tiende a cero, es cero. Esta propiedad no impone restricción alguna al valor numérico que puede tomar esa variable o función; por ejemplo: el incremento de cualquier función continua se ajusta a esta definición de infinitesimal, y dicho incremento puede tomar cualquier valor numérico.
- La *aplicación* del concepto de límite a una expresión produce un nuevo objeto matemático. Por ejemplo, en la función $y=x^2$ se puede calcular el cociente incremental: Ä*y*/Ä*x*=2*x*+Ä*x*, cuyo valor nunca será 2*x*, por muy pequeño que sea Ä *x*; sin embargo, cuando se calcula el límite de esa expresión cuando Ä *x* tiende a cero, el nuevo objeto obtenido (que no es ningún cociente de incrementos) es igual a 2*x*. Por tanto, cuando en una expresión aparecen cantidades infinitesimales, dichas cantidades no son cero, pero sí lo son sus límites, justificando así no el que se desprecien sino que en ese momento se les iguale a cero, *exactamente* a cero.

Conviene advertir que estas conclusiones descansan sobre una adecuada comprensión del concepto de límite, lo cual no fue inmediato en tiempos de Cauchy, ni

[10] Según Aleksandrov *et al.*, el nombre de “Cálculo infinitesimal” debería ser sustituido por el de “Cálculo de los límites” (*op. cit.*, p. 108).

se produce en la enseñanza actual de la Física y las Matemáticas (Cottrill, 1996; Lauten *et al*., 1994; Sánchez y Contreras, 1998; Schneider, 1992; Williams, 1991). El propio Cauchy dudaba sobre el significado de los infinitesimales: en el mismo libro donde aparecen definidos como variable, parecen encontrarse razonamientos donde está implícita la concepción de cantidad fija[11]; en otros trabajos sobre Física Matemática y Análisis de Fourier, Cauchy habla de números infinitamente pequeños, tratándolos como magnitudes matemáticas independientes, sin recurrir al concepto de variable. Esta confusión pudo llevar a Cauchy a prescindir de los infinitesimales en sus clases de Análisis, decisión que le supuso enfrentarse con el físico Petit y el propio Consejo de Instrucción de la Escuela Politécnica, pues no entendían cómo podían omitirse los infinitesimales en las clases teóricas dada su utilidad para resolver problemas prácticos (Laugwitz, 1997*b*).

La definición de límite proporcionaba también una definición precisa de la derivada y la integral, así como un procedimiento no ambiguo para calcularlas. La derivada, en lugar de ser un cociente de infinitesimales, se definió como el límite de un cociente de incrementos; para calcularla, se partía de una relación entre incrementos, aunque fuese aproximada, y después se calculaba el límite de un cociente. La integral, reducida en la práctica a la operación inversa a la derivación después del enunciado del Teorema Fundamental, recuperó con Cauchy el importante papel que había jugado durante la primera mitad del siglo XVII: se definió como el límite de una serie de sumas que se construía a partir de una relación entre incrementos, aunque fuese aproximada; para calcularla, se aplicaba el Teorema Fundamental, el cual quedó demostrado con mayor rigor.

[11] Laugwitz (1997*b*) demuestra, con el uso de contraejemplos sencillos, que aunque en el enunciado del primer teorema de funciones continuas y en el del primer teorema de series convergentes de funciones continuas no se menciona directamente a las cantidades infinitesimales, ambos teoremas resultan ser falsos si se mantiene la concepción de tales cantidades como variables de límite cero. Según este autor: “(...) Un genio como Cauchy no pudo pasar por alto este hecho; por tanto, debía tener en mente una concepción distinta de los infinitesimales”. Laugwitz considera a Cauchy el precursor del conjunto de los números hiperreales, definidos por Robinson 140 años más tarde en el desarrollo del Análisis no estándar (NSA); en el mismo sentido, Kossac (1996) precisa que Robinson es quizás el “recreador” (y no el creador) del NSA

De esta forma, la diferencial no era ya necesaria para definir y calcular derivadas e integrales. Además, como el incremento de cualquier función continua obedece a la definición formal de infinitesimal, no tiene sentido utilizar el término diferencial para referirse al incremento (infinitesimal) de una función[12]. Si a esto se añade la sospecha acumulada durante años sobre la diferencial y los infinitesimales de servir de base a tratamientos matemáticos poco rigurosos, el terreno resultaba claramente abonado para que la diferencial quedase relegada a un papel marginal en el nuevo marco teórico del Cálculo.

Cauchy definió la diferencial como una expresión construida a partir de la derivada: $\mathrm{d}f=f'(x)\cdot \mathrm{d}x$, siendo d$x$ un incremento arbitrario de la variable; pasó a convertirse así en un simple instrumento formal, necesario para justificar y abreviar ciertas demostraciones. Se desprendió entonces a la diferencial de la ambigüedad de los infinitamente pequeños, pero al mismo tiempo quedó desprovista de cualquier significado físico y/o intuitivo propio, alejada de la idea original de aproximación. Como afirma Freudenthal (1973, *op. cit*., p. 550): "Diferenciales inútiles pueden ser despedidas de inmediato. Si dy, dx aparecen sólo en la combinación dy/dx o bajo el signo integral después del integrando, la pregunta sobre qué significan individualmente dx, dy es equivalente a preguntarse qué significan 'l', 'o', 'g' en 'log'".

En el único párrafo dedicado a la diferencial que aparece en la *Enciclopedia de las Ciencias Matemáticas* elaborada a finales del siglo XIX en Alemania (citado por Artigue, 1989), se muestra con claridad el nuevo carácter de la diferencial:

> *"Una fórmula diferencial, es decir una relación entre x, y, dx y dy, que debe expresar, por ejemplo, la ley que rige un fenómenos físico, <u>no tiene, en verdad, ningún sentido preciso</u>[13]. Sin embargo, la mayoría de las veces resulta cómoda de establecer y no hay ningún inconveniente en usarla (...) Los símbolos dx, dy no son aquí más que intermediarios que permiten obtener rápidamente las relaciones finales (ecuaciones diferenciales) en las cuales ya no aparecen".*

[12] Tampoco tiene sentido definir la diferencial como el límite del incremento, como hace algún libro de Física General escribiendo: $ds = \lim_{\Delta s \to 0} \Delta s$ Es evidente que entonces la diferencial sería siempre cero.

[13] El subrayado es nuestro

Pero esta concepción de la diferencial, aunque satisface las exigencias de rigor matemático, no resulta satisfactoria en el contexto de las aplicaciones físicas –e incluso geométricas- donde las expresiones diferenciales, ya vacías de significado físico, siguen constituyendo el punto de partida para resolver un gran número de problemas. ¿Con qué criterio se decide cuál es la expresión diferencial correspondiente a la situación física que se está estudiando?; por ejemplo, si las diferenciales no tienen ningún significado físico, ¿qué argumento se utiliza para decidir cuál es la expresión diferencial que representa el proceso de absorción de una onda plana por un medio?

Pero no es sólo la ausencia de significado físico de las expresiones diferenciales el único inconveniente del nuevo Análisis que nace con Cauchy, sino las dificultades que provoca el lenguaje puramente matemático alejado de la realidad física. Así, a pesar de disponer de una definición precisa de la derivada y la integral, es difícil reconocer la relación inversa entre ellas, tal como se pone de manifiesto en lo artificioso del procedimiento seguido en los textos de Matemáticas para demostrar el Teorema Fundamental, y del cual prácticamente ningún alumno o profesor es capaz de recordar sus argumentos fundamentales. Más evidente aún es la dificultad para interpretar el significado físico de los conceptos y expresiones en las que aparecen; sirva de ejemplo el diálogo que encabeza un artículo del *American Mathematical Monthly* (citado por Cuenca, 1986):

Alumno: *El coche tiene una velocidad de 50 millas por hora, ¿qué quiere decir esto?*
Profesor: *Dado å>0, existe un ä tal que si* (t_2-t_1)*< ä entonces:* $[(s_2-s_1)/(t_2-t_1) - 50]$*<å*

Esta respuesta tiene lugar cuando se renuncia a dar significado al concepto de diferencial, reduciendo el concepto de rapidez instantánea (o, en general, el de derivada) a su definición operativa como el cálculo de un límite.

Como puede apreciarse, el rigor adquirido por el Cálculo en el siglo XIX, trajo consigo también un divorcio entre Física y Matemáticas, aplaudido por algunos como un "proceso de descolonización, de vuelta a la cultura aborigen" (Aghadiuno, 1992) y criticado por otros (Glez. Urbaneja, 1991). Ese divorcio se refleja aún hoy en la distinta perspectiva sobre la diferencial: en Matemáticas es un instrumento formal que ocupa un lugar marginal; en física es un instrumento de aproximación, una cantidad muy pequeña, que ocupa un lugar central (Artigue, 1986; Artigue y Viennot, 1987)[14].

Resulta evidente que la aportación de Cauchy no es suficiente para superar la sensación de inseguridad y la actitud mecánica cuando se usa el Cálculo en las aplicaciones físicas, e incluso lo agrava al vaciar de significado a un concepto tan importante como el de diferencial para tales aplicaciones. Es necesario pues llevar a cabo una clarificación que consiga reconciliar por un lado la estrecha vinculación con las situaciones físicas de las expresiones diferenciales, y por otro el rigor y la precisión de su significado, saliendo al paso de la situación imposible descrita por Freudenthal (*op. cit*., p. 553): "Es una situación imposible que el matemático enseñe unas matemáticas que no pueden ser aplicadas y el físico aplique unas matemáticas que no pueden ser enseñadas por el matemático".

1.2.3. La diferencial de Fréchet

A partir del siglo XIX, mediante la teoría de los límites desarrollada por Cauchy, el Cálculo diferencial adquiere el rigor del que carecía en sus orígenes, al tiempo que el concepto de diferencial se libera de toda ambigüedad e identificación con los infinitamente pequeños, al quedar convertido en una expresión formal que se obtiene a partir de la derivada: $\mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$. En el caso de funciones de varias variables, si existen las derivadas parciales, la diferencial será la expresión: $\mathrm{d}f = f'_x \cdot \mathrm{d}x + f'_y \cdot \mathrm{d}y + \ldots$, siendo f'_x la derivada parcial de f respecto de x, dx un incremento arbitrario de la variable x, y así sucesivamente. Esta última expresión es invariante frente a los cambios de variable.

Sin embargo, cuando se intentó extender algunos de los teoremas del Cálculo diferencial de una sola variable al caso de varias variables o, más aún, de infinitas variables, surgieron ciertas dificultades que obligaban a incluir un mayor número de

[14] Este divorcio se manifiesta incluso en trabajos expresamente dirigidos a la mejora de la enseñanza del Cálculo. En concreto, en uno de ellos (Orton, 1983 *b*), realizado claramente desde la perspectiva matemática, se advierte "que los símbolos dx, dy no tienen significado por sí solos", y que "sólo significan algo cuando están juntos en la forma dy/dx, o cuando se usa dx en la integración". Coincide así con la definición ya citada (ver, en este mismo capítulo, p. 44) de la *Enciclopedia* del siglo XIX, que después de negar significado alguno a los términos diferenciales, añade: "(...) para hacerle adquirir un sentido preciso, basta con dividir ambos miembros por dx y hacer a continuación un paso al límite..."

precisiones o hipótesis suplementarias en los enunciados de esos teoremas que no eran necesarios en el Análisis clásico (por ejemplo: no bastaba ya con exigir la existencia de derivadas parciales en un punto, sino también en un entorno de ese punto y que además fuesen continuas) (Alibert *et al.*, 1987; Artigue, 1989)

En este contexto, apareció la necesidad de formular una nueva definición de la diferencial que evitase esas dificultades, manteniendo la invariancia formal frente a los cambios de variable, y que fuese trasladable tanto al caso de funciones de una variable como al de muchas o infinitas variables. En esta nueva invención trabajaron algunos matemáticos durante los primeros años del siglo XX, poniendo el acento sobre el concepto mismo de diferenciabilidad antes que en el de diferencial, en un esfuerzo por dotar de un claro significado a la diferencial y no dejarla reducida a una expresión (Artigue, 1989).

La diferenciabilidad fue introducida por Stolz en 1887 y la diferencial fue definida como función lineal, por primera vez, por Fréchet en 1911 en el marco del desarrollo del Análisis Funcional (Artigue y Viennot, 1987). A continuación se reproduce la definición original de Fréchet (citada por Artigue, 1989, p. 34):

> *"Una función f(x, y, z, t) admite una diferencial en mi sentido en el punto* (x_0, y_0, z_0, t_0) *si existe una función lineal y homogénea de los incrementos, sea: A·Äx + B· Äy + C· Äz + D· Ät, que no difiere del incremento de la función Äf a partir del valor* $f(x_0, y_0, z_0, t_0)$ *más que en un infinitamente pequeño, con relación a la distancia ä entre los puntos* (x_0, y_0, z_0, t_0), $(x_0+Äx, y_0+ Äy, z_0+Äz, t_0+Ät)$. *Entonces la diferencial es, por definición:*
>
> d*f = A· Äx + B· Äy + C· Äz + D· Ät*
>
> *Podemos entender por distancia entre dos puntos la suma de los valores absolutos del incremento de cada variable, o la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de esos incrementos, o incluso el mayor de todos esos incrementos.*
>
> *Esta definición es expresada por la fórmula: Äf =* d*f + å· ä, donde å tiende a cero cuando ä tiende a cero. Recuerda a la antigua definición como la parte principal y presenta todas sus ventajas, pero escapando a las objeciones de rigor que muy justamente se le habían hecho"*

Aunque dedicaremos el próximo capítulo a la transposición didáctica de esta concepción, consideramos necesario deshacer el error al que podría inducir la expresión “infinitamente pequeño con relación a ä”. Debe advertirse que esa expresión se refiere a (Ä*f*- d*f*), por tanto: ni Ä*f* ni d*f* son infinitamente pequeños con relación a ä. Además, de esa expresión no puede deducirse que (Ä*f*- d*f*) sea siempre un número muy pequeño, y menos aún que lo sean Ä *f* o d*f*; por el contrario, el significado correcto de esa expresión es que (Ä*f*- d*f*) tiende a cero más rápidamente que ä, es decir, que el límite de (Ä*f*- d*f*)/ä es cero cuando ä tiende a cero: $\underset{ä \to 0}{lím} \frac{(Äf - df)}{ä} = 0$

Dicho de otra forma –como aclara la propia definición de Fréchet-, la expresión “(Ä*f*- d*f*) es un infinitamente pequeño con relación a ä”, indica que d*f* es una función lineal y homogénea de los incrementos que permite expresar el Ä*f* de la forma: d*f* + å· ä, donde: $\underset{ä \to 0}{lím}\, å = 0$

Aunque la definición de Fréchet que hemos presentado tiene su origen en el Análisis Funcional y es donde adquiere todo su sentido, no debe pensarse que sólo se aplica en ese contexto. Por el contrario, son ya varios los textos de Análisis Matemático que parten de esta definición para el caso de funciones de una sola variable y luego generalizan (Hallez, 1989, p. 67). En nuestro país puede verse, por ejemplo, el capítulo 2 del texto de Análisis Matemático de Del Castillo (1980): en él, después de definir la diferencial de una función de una sola variable, presenta la *derivada de una función en el sentido habitual* como un caso particular de la diferencial -algo que justificaremos más adelante-, lo que supone una importante alteración de la estructura conceptual en favor del papel de la diferencial.

La definición de Fréchet es tan precisa como la de Cauchy, pero sin vaciarla de significado ni reducirla a un ente formal útil para abreviar desarrollos. Antes al contrario, con Fréchet la diferencial recupera el carácter de aproximación y el importante papel que había desempeñado en los orígenes del Cálculo -y que sigue desempeñando hoy día en cualquier análisis físico que requiera el uso del Cálculo diferencial-. *Desde esta nueva concepción, las expresiones o fórmulas diferenciales adquieren un significado preciso en sí mismas, independientemente del tratamiento* *operatorio que vayan a recibir después, y no ligado necesariamente a las cantidades infinitamente pequeñas.*

No intentaremos mostrar las propiedades y ventajas de la diferencial de Fréchet siguiendo el esquema propio de los manuales de Matemáticas (definición – teorema – corolario...), ni mucho menos plantearemos los problemas originados en el contexto del Análisis Funcional y la manera en que esta concepción los resuelve. Teniendo en cuenta que nuestro objetivo es mejorar el uso con comprensión del Cálculo diferencial en la enseñanza de la Física, intentaremos *reconstruir* de un modo sencillo (utilizaremos funciones de una sola variable) el proceso que conduce a *inventar* la diferencial: identificaremos cuál es el problema que se trata de resolver, la estrategia global que se utiliza, y el significado y requisitos que debe cumplir la diferencial para resolver con éxito el problema. Mostraremos así que la concepción de Fréchet coincide con la diferencial *inventada* para resolver situaciones físicas. A ello dedicaremos el siguiente capítulo.

RESUMEN: **Esta breve revisión histórica nos ha permitido identificar los problemas que están en el origen del Cálculo diferencial, y constatar que la diferencial, como todos los conceptos y teorías físicas, es una invención, un concepto inventado para avanzar en la solución a los problemas planteados, que ha sufrido cambios importantes a lo largo de su historia que afectan a su significado y papel en el conjunto del Cálculo diferencial. Hemos destacado tres concepciones representativas de la evolución del concepto:**

La diferencial de Leibniz

Se identificaba con un incremento infinitesimal de una magnitud, por lo que expresiones tales como d*y* o d*x* tenían sentido en sí mismas. El término infinitesimal indicaba un valor muy pequeño, a veces una cantidad fija y otras una cantidad variable que podía hacerse tan pequeña como se quisiera. Estas cantidades permitían escribir como igualdad lo que sólo era una aproximación en términos *finitos*, y además podían despreciarse en el momento más conveniente del razonamiento ($y+dy=y$), consiguiendo así que en el resultado final no apareciesen infinitesimales. La diferencial así entendida desempeñaba un papel central en la estructura del Cálculo, pues estaba presente en la resolución de todos los problemas y era clave para definir los conceptos de derivada e integral.

Pero el método de los infinitesimales presentaba lagunas que provocaban dudas y críticas: en un momento del razonamiento se consideraba que la diferencial no era cero y, en otro momento de ese mismo razonamiento se hacía cero; lo que es peor, a pesar de esta contradicción se llegaba a resultados exactos partiendo de aproximaciones. Pero las dudas no afectaban sólo a la comprensión, sino que tenían consecuencias prácticas: en el rango de lo muy pequeño, todo parecía ser una buena aproximación, aunque la mayoría de las veces no era la *adecuada*; esto hizo que, junto a resultados verdaderos, se acumulasen una serie de resultados falsos.

Sin embargo, la fecundidad del uso de la diferencial para resolver problemas físicos relegó a un segundo plano las evidentes contradicciones teóricas y prácticas, reforzando el carácter meramente algorítmico del Cálculo diferencial.

La diferencial de Cauchy

Cauchy formuló una definición precisa de las cantidades infinitesimales: variables cuyo límite es cero. Se superaron así algunas de las objeciones que se habían hecho al método de los infinitesimales, aunque no se despejaron las dudas sobre su valor. Según la definición explícita, esa variable podía tomar cualquier valor, tan sólo debía cumplir la propiedad de que su límite fuese cero; pero, en la práctica, eran considerados valores muy... muy pequeños, e incluso en la teoría llegó a pensarse en nuevos números más pequeños que cualquier número real.

Gracias al concepto de límite, definió con precisión los conceptos de derivada e integral, y además, la definición de los infinitesimales dotó de rigor al cálculo de ambas. Derivada e integral pasaron a convertirse en los conceptos centrales en la estructura del Cálculo, en detrimento del concepto de diferencial.

En estas condiciones, la diferencial, con su *historial de dudas y sospechas*, pasó a ser un concepto innecesario. Desvinculada de los infinitesimales, Cauchy la definió como una expresión a partir de la derivada ($\mathrm{d}f=f'\cdot\ \mathrm{d}x$), útil para abreviar los desarrollos formales. Las expresiones y términos diferenciales dejaron de tener un significado propio, y se convirtieron en simples intermediarios para obtener ecuaciones en las que aparecen funciones y sus derivadas.

Se consiguió así dotar de rigor y justificación formal al Cálculo, pero en los problemas físicos concretos, donde se siguió usando la diferencial como punto de partida e instrumento de aproximación, no supuso ninguna mejora.

La diferencial de Fréchet

La diferencial de Fréchet mantiene dos características básicas de la concepción de Cauchy: se rompe la identificación con las cantidades infinitesimales y se formula una definición rigurosa. Pero, al mismo tiempo, recupera otras características importantes de la concepción de Leibniz: se trata de un instrumento de aproximación, adquiere un significado en sí misma y recupera su papel central en la estructura del Cálculo. Se consigue conciliar así el rigor con la utilidad para abordar situaciones físicas y geométricas.

La diferencial de Fréchet es definida como una estimación del incremento, una estimación que es lineal respecto al cambio de variable. Se trata de una función que puede tomar cualquier valor numérico. El criterio para decidir cuándo una expresión lineal respecto al cambio de variable (Ä*x*) es la diferencial (d*f*), consiste en exigir que Ä*f*-d*f* sea un infinitamente pequeño respecto a Ä*x*. Por tanto, lo que es un infinitamente pequeño respecto a Ä*x* no es la diferencial sino su diferencia con el incremento (Ä*f*-d*f*) (lo que no significa en ningún caso que su valor numérico tenga que ser necesariamente un número muy pequeño).

Como veremos en el siguiente capítulo, esta concepción de la diferencial no sólo dota de significado preciso a todas las expresiones y términos diferenciales que se usan en los problemas físicos, sino que proporciona un criterio claro para determinar cuándo una expresión corresponde a la diferencial, y permite explicar por qué en ese caso se obtiene un resultado exacto partiendo de una aproximación.

Capítulo 2

EL CONCEPTO DE DIFERENCIAL EN LA FÍSICA. INDICADORES DE SU COMPRENSIÓN EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE.

En el capítulo anterior se ha puesto de manifiesto que el significado y estatus de la diferencial ha ido cambiando de acuerdo con los principales problemas y retos con los que se ha enfrentado el Cálculo diferencial en cada momento histórico. En concreto, se han identificado tres momentos representativos, caracterizado cada uno de ellos por una distinta concepción de la diferencial. Así, la **concepción de Leibniz** es característica de los dos primeros siglos de existencia del Cálculo, donde se aplicaron los nuevos métodos a una amplia variedad de situaciones, al mismo tiempo que se acumulaban importantes deficiencias relacionadas con la comprensión y validez de esos métodos. La **concepción de Cauchy**, característica del siglo XIX, supone un alejamiento de los problemas de aplicación y un esfuerzo por dotar de rigor y significado preciso al conjunto del Cálculo. Por último, la **concepción de Fréchet**, aparece como respuesta a los problemas planteados dentro del Análisis Funcional al comienzo del siglo XX, y en ella pueden encontrarse las virtudes de cada una de las concepciones anteriores.

En nuestro caso, el problema con el que nos enfrentamos consiste en mejorar el uso con comprensión del Cálculo diferencial en la enseñanza de la Física; se pretende en este capítulo determinar cuál es la concepción de la diferencial más adecuada para resolver este problema didáctico. Esperamos obtener, como conclusión, una definición precisa y cargada de significado físico para la diferencial que, como veremos, coincide con las características y el contenido de la concepción de Fréchet, adaptada al caso de funciones de una sola variable. Pero, evidentemente, no sólo esperamos clarificar con ello un concepto aislado sino también conocer mejor la estrategia global del Cálculo así como el significado de los conceptos fundamentales en ese contexto *aplicado*.

Para ilustrar con cierto detalle el uso y significado de la diferencial, hemos considerado oportuno desarrollar algunos problemas geométricos *clásicos* y problemas físicos del nivel de COU o primer curso universitario. Siendo conscientes de las dificultades de lectura que podría conllevar su aparición repetida, hemos optado por incluir esos ejemplos en los tres primeros **Anexos**.

Como conclusión de estos dos primeros capítulos, estaremos en condiciones de avanzar de un modo fundado qué constituiría una comprensión adecuada del concepto de diferencial en el campo de la Física, como paso previo y necesario para analizar en qué medida en la enseñanza habitual de la Física se suministran oportunidades adecuadas para generar dicha comprensión, y servirá también de guía para elaborar después propuestas alternativas.

2.1. SIGNIFICADO Y UTILIDAD DE LA DIFERENCIAL EN LA FÍSICA

Los conceptos son invenciones que se realizan para avanzar en la solución a algún problema o superar alguna dificultad existente. Por este motivo, para determinar cuál es la concepción de la diferencial más adecuada para mejorar la comprensión del uso y el significado del Cálculo diferencial en las clases de Física, el mejor camino será reconocer cuál es el problema que está en el origen de la necesidad de usar la diferencial, la estrategia seguida para solucionarlo y el papel de la diferencial en todo ese proceso, de manera que se resalte el significado físico y geométrico de lo que se hace.

2.1.1. ¿Cuál es el problema que hace necesaria la invención de la diferencial y cómo se soluciona?

Una de las actividades más importantes de la Física consiste en establecer relaciones cuantitativas entre las distintas magnitudes que intervienen en el estudio de un determinado fenómeno. El objetivo final de ese estudio es llegar a obtener una expresión que relacione distintas magnitudes (x, y, z, t...), expresada en general mediante una función que relaciona explícitamente una de esas magnitudes con las restantes: y = f(x, z, t...), siendo x, z, t... variables independientes. El problema consiste pues en averiguar esa *función incógnita*: y = f(x, z, t...).

Cuando se trata de relacionar tan solo dos magnitudes físicas (x, y), bien sea porque en el fenómeno en cuestión no intervienen más magnitudes físicas o porque las magnitudes restantes se consideran constantes, entonces la *función incógnita* es de una sola variable: y=f(x), que es de lo que nos ocuparemos en este trabajo.

Si se conoce una condición inicial: $y(x_1)=y_1$, el problema de hallar la relación funcional entre x e y es equivalente a: *averiguar el* Ä*y producido por un cambio de variable desde* x_1 *hasta* x_1+Äx (ver fig. 2.I).

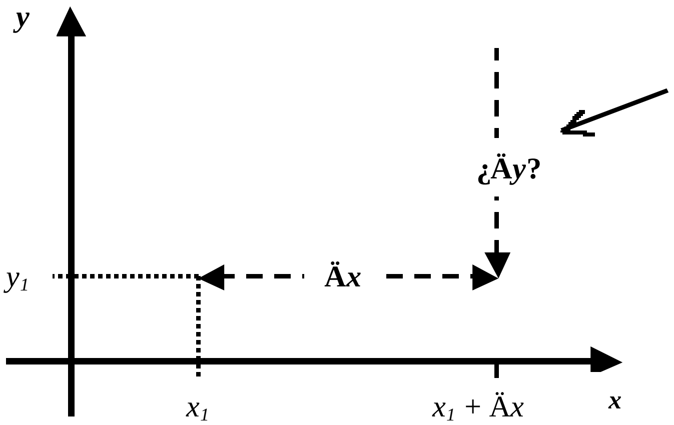


Figura 2.I. ¿Cuál es el valor de Äy cuando se produce un cambio de variable desde x_1 hasta x_1+Äx?

Por ejemplo, ¿cuál es la variación de rapidez de un móvil (Äv) producida en un cierto intervalo de tiempo (Ät)?, ¿cuál es la variación de intensidad (ÄI) que experimenta una onda plana al atravesar un medio de espesor Äx?, ¿cuál es la variación de energía potencial de un muelle (ÄE) cuando se estira una distancia Äx?, ¿cuál es la variación de intensidad del campo magnético creado por un conductor en un punto (ÄB) debido a un aumento de su longitud (Äl)?, ¿cuál es la variación de presión atmosférica (ÄP) al ascender una altura Äh?

El punto de partida más sencillo es suponer que la gráfica es una recta, es decir, que la relación que liga Äy con Äx es lineal: Äy=k· Äx. Cuando el conocimiento y análisis físico de la situación, incluyendo la contrastación experimental, confirma esa dependencia, el problema está resuelto en su aspecto matemático, y sólo falta obtener el valor del parámetro k. Pero, en la mayoría de las situaciones, el análisis físico muestra precisamente que el comportamiento real no es de tipo lineal, es decir, que el coeficiente k no es constante en el intervalo Äx, sino que varía con x: $k(x)$. ¿Qué valor de k debe tomarse en estos casos? ¿Cómo avanzar en el objetivo de hallar $y=f(x)$, descartando el *ensayo y error*? Por ejemplo: si la aceleración tangencial varía con el tiempo, la fuerza depende del estiramiento o la densidad del aire varía con la altura, ¿cómo hallar el Äv en un intervalo Ät, la variación de la energía potencial elástica al estirar Äx o el cambio de presión, ÄP, que se producirá al variar la altura Äh?

La razón que obliga a usar el Cálculo diferencial es la necesidad de superar la dificultad que supone la *no-linearidad*. La estrategia para obtener la *función incógnita* $y=f(x)$ en situaciones no lineales, está basada en lo que Dieudonné (1960, p. 145) considera la idea fundamental del Cálculo: *la aproximación de funciones por medio de funciones lineales*. En el Cuadro 2.I se resumen los principales pasos de esa estrategia.

Cuadro 2.I. Estrategia del Cálculo diferencial para averiguar la función incógnita: $y=f(x)$

1. Realizar una estimación del valor de Ä*y* a partir de x_1, y para un incremento Ä*x*, suponiendo que la función tiene un comportamiento lineal a partir de x_1 y en todo el intervalo Ä*x* (¡que puede ser tan grande como se quiera!). Representaremos esta estimación lineal por d*y*=*k*· Ä*x* (donde *k* es constante desde x_1 hasta x_1+Ä*x*)

2. El error cometido al realizar esta estimación (Ä*y*–d*y* = Ä*y*–*k*· Ä*x*) dependerá del valor de Ä*x* (*en general*, para un valor dado de *k*, el error será menor cuanto menor sea Ä*x*) y del valor de *k* (que puede ser cualquiera, es decir, es posible cualquier pendiente de la recta).

Podemos, pues, mejorar la aproximación al Ä*y* dividiendo el intervalo Ä*x* en *N* subintervalos, de valor: Äx_i=x_{i+1}–x_i, calculando una estimación lineal del Äy_i correspondiente (dy_i =k_i· Äx_i), y sumando las estimaciones lineales parciales para obtener una estimación total: Ä$y \approx \sum dy_i$. Si el error cometido en cada subintervalo es: å$_i$ = Äy_i – dy_i, entonces:

$$\text{Ä}y = \sum_{i=1}^{N} \text{Ä}y_i = \sum_{i=1}^{N} (dy_i + \text{å}_i) = \sum_{i=1}^{N} dy_i + (error\ total) = \sum_{i=1}^{N} k(x_i) \cdot \text{Ä}x_i + (error\ total)$$

La *calidad* de esa aproximación aumenta disminuyendo el valor de cada Äx_i, es decir, aumentando el valor de *N*. Para poder realizar la estimación para cualquier *N*, hemos de disponer de un valor de *k* para cada *x*, pasando así de un conjunto discreto de k_i a una función: *k*(*x*). Se define así la *función diferencial* para cualquier *x* y Ä*x*: d*y*=*k*(*x*)· Ä*x* La *calidad* de la aproximación dependerá del valor de *N* y de la *k*(*x*) elegida.

3. Cambiando el valor de *N* se obtiene una serie de estimaciones totales del Ä*y*, y una serie de errores totales. El límite de la serie de estimaciones, cuando $N \to \infty$, será exactamente Ä*y* si, y sólo si, el límite de la serie de errores totales, cuando $N \to \infty$, es cero. Es decir:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} dy_i = \lim_{N\to\infty} k(x_i) \cdot \text{Ä}x_i = \text{Ä}y \qquad si,\ y\ sólo\ si: \qquad \lim_{N\to\infty} \sum \text{å}_i = 0$$

Esto no ocurrirá para cualquier función *k*(*x*), aunque Ä$x_i \to 0$ (este era el error que llevaba a resultados absurdos en la concepción de Leibniz). Pero, si sabemos encontrar la función *k*(*x*) que hace que eso ocurra, el problema quedará resuelto: habremos obtenido la *función incógnita*: *y*=*f*(*x*) a partir del límite de una suma de estimaciones lineales de pendiente *k*(*x*).

¿Es posible obtener el Ä*y* exacto mediante esta estrategia? Para que así ocurra, ¿debe cumplir algún requisito la relación aproximada de partida: d*y*=*k*(*x*)· Ä*x*?; en caso afirmativo, ¿cuál es ese requisito?

Aunque habitualmente no se presta mucha atención a este tipo de preguntas en la enseñanza de la Física –ni tampoco en la enseñanza de las Matemáticas-, se actúa implícitamente como si no existiese duda sobre la obtención del Ä*y* exacto, y la única condición que se exige a la expresión aproximada de partida es que se trate de un Ä*y* muy pequeño, *infinitesimal*, tan pequeño que desaparezca la cualidad de aproximación. Se actúa como si fuese válida cualquier expresión con tal de que tenga ese carácter infinitesimal, pues *todo cabe* ante magnitudes tan pequeñas, y al final el error será nulo; sin embargo, no se considera explícitamente que, aunque el error sea muy pequeño, aunque sea infinitesimal, al final se van a sumar una gran cantidad de esos términos, *infinitos errores infinitesimales*.

Como la propia historia del Cálculo ha mostrado, y como cualquier estudiante de carreras científico-técnicas habrá tenido ocasión de comprobar, muchas expresiones aproximadas de partida conducen a resultados claramente erróneos, por *muy infinitesimales* que se consideren esas expresiones y por muy bien que se apliquen las reglas del Cálculo[15]. Debe existir un criterio para seleccionar la expresión de partida, alguna condición que ha de cumplir.

Para ver si existe una solución general al problema de encontrar la *función incógnita* o la relación entre Ä*y* y Ä*x*, y en caso afirmativo determinar qué condición debe cumplir la diferencial, vamos a poner en práctica con detalle la estrategia indicada en el Cuadro 2.I.

[15] Ver, por ejemplo: Artigue y Viennot (1987), Schneider (1991), o el **Anexo 2** de este trabajo.

Realizar una estimación del valor de Ä *y* suponiendo un comportamiento lineal, es decir, escribir la expresión diferencial a partir de x_1

Aunque sabemos que Ä*y* no es lineal respecto a Ä*x*, podemos realizar una estimación de su valor, suponiendo que la función tiene un comportamiento lineal (es una recta), es decir, su pendiente es constante en el intervalo (¡que no es infinitesimal!) Ä*x*: d*y*=*k*· Ä*x*. Así pues, estamos *seguros* de que d*y* no coincide con Ä*y:* representa lo que variaría la función desconocida en un Ä*x*, a partir de x_1, si lo hiciera linealmente con una pendiente *k* (ver fig. 2.II). Para dar simetría a esa expresión, suele escribirse: d*y*=*k*· d*x*, pues d*x*=Ä*x* (la función *y*=*x* es lineal, con *k*=1).

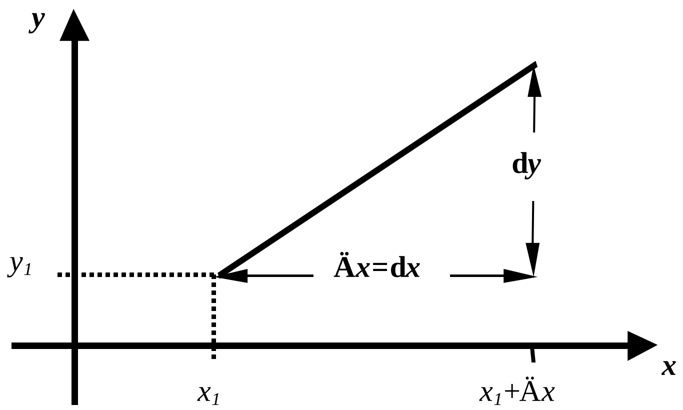


Figura 2.II. d*y* es una estimación del Ä*y*, lineal respecto al Ä*x*

Como es fácil reconocer, el valor de la diferencial a partir de x_1 dependerá del tamaño de Ä*x*.

Al escribir la expresión en términos diferenciales (d*y*=*k*· Ä*x*) se está simplificando la realidad, pues *se estima el* Ä*y suponiendo un comportamiento lineal respecto a x*. Esta idealización simplificadora de la realidad constituye una de las principales características del trabajo científico: "No es ver las cosas de forma diferente sino el construir los objetos ideados, representarlos y manipularlos matemáticamente, lo que diferencia a la nueva ciencia" (Matthews, 1994*b*).

Por ejemplo, cuando se quiere averiguar el cambio de rapidez (Ä*v*) experimentado por un móvil a partir de un instante (t_1) durante un intervalo de tiempo determinado (Ä*t*) en el que la aceleración tangencial no se mantiene constante, se puede realizar la estimación diferencial suponiendo que dicha aceleración se mantiene constante con el valor de a_t al principio del intervalo (t_1), escribiendo entonces[16]: $dv=a_t \cdot \Delta t$ Esa estimación puede tomar cualquier valor numérico, grande o pequeño, dependiendo del instante t_1 (que determina el valor de a_t) y del Δt. Así, si en $t_1=5$ s la aceleración tangencial es de 3 m/s^2, el valor de la diferencial de la rapidez a partir de ese instante dependerá del intervalo de tiempo que se considere: $dv=3\cdot \Delta t$; si $\Delta t=20$ s, entonces $dv=60$ m/s, lo que significa que la rapidez cambiaría 60 m/s en 20 s si, a partir de $t_1=5$ s, la aceleración tangencial se mantuviese constante.

Conviene salir al paso en este punto de algunas respuestas habituales –y erróneas- sobre la diferencial. A veces se afirma que $dy=\Delta y$; sin embargo, si damos por supuesto que Δy no es lineal respecto al Δx, dy e Δy nunca serán iguales, por muy pequeño que sea Δx. En el ejemplo recién citado, dv nunca coincidirá con Δv, por muy pequeño que sea Δt; en el caso de la absorción luminosa, nunca coincidirá dI con ΔI pues la disminución de intensidad nunca es en realidad proporcional al espesor del medio, por muy pequeño que éste sea.

Otras veces, con la intención de imponer una mayor restricción, se afirma que coincidirán *en el límite*, es decir: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y - dy) = 0$; sin embargo, dicha igualdad es cumplida por toda dy que verifique: $dy=0$ cuando $\Delta x=0$, lo que no supone entonces restricción alguna. La persistencia de esta pretendida condición, y la interpretación ambigua de la diferencial que de ella se deriva, se pueden explicar a partir de algunos errores relacionados con el concepto de límite (Cottrill, 1996; Ferrini-Mundy y Geuther, 1991; Lauten *et al.*, 1994; Orton, 1983 *a* y *b*; Sánchez y Contreras, 1998; Schneider, 1992; Williams, 1991).

Así, una *visión estática* del límite, que lo identifica con el último término de la sucesión, sin admitir la posibilidad de que no pertenezca a la misma, puede llevar a pensar que dy coincide con Δy cuando Δx es *muy pequeña*; sin embargo, esto no ocurre nunca (mientras $\Delta x \neq 0$ y la función buscada no sea realmente lineal). En otros

[16] Para nombrar esa diferencial de la rapidez, con rigor deberíamos añadir: *respecto al tiempo*, especificando respecto a qué variable se realiza la estimación lineal, ya que podría haber sido por ejemplo la *diferencial de la rapidez respecto a la posición*. Sin embargo, omitiremos este añadido dando por supuesto en este contexto cuál es la variable (el tiempo). Aunque se produce esta misma omisión cuando se nombra a la derivada, no es infrecuente en la enseñanza de la Física que se especifique la variable respecto a la cuál se deriva; sin embargo, *nunca* se especifica en el caso de la diferencial.

casos, una *visión dinámica* del límite, entendido como un simple proceso sin fin cuyo resultado es *algo en potencia pero no en acto*, puede llevar a pensar que d*y* no toma ningún valor concreto, que no se trata de un objeto sino que es un ente abstracto, que es un procedimiento que permite acercarse cada vez más a Ä*y* conforme Ä*x* tiende a cero.

Para escribir la expresión de la diferencial a partir de x_1, necesitamos especificar un valor de la pendiente *k*; pero, existen infinitos valores posibles, es decir, infinitas estimaciones lineales (ver fig. 2.III). ¿Cualquiera de ellas es válida, o sólo hay una que permita resolver el problema (hallar el valor exacto de Ä*y*)?

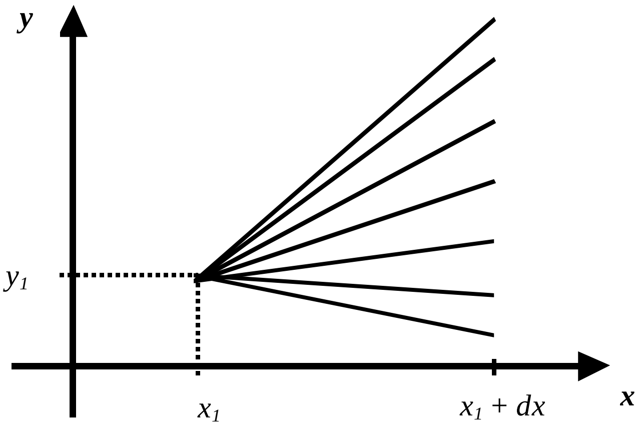


Figura 2.III. Para un valor dado x_1, existen infinitas funciones lineales que permiten estimar el valor de Ä*y* para un Ä*x*

Mejorar la aproximación del Ä*y* (función diferencial)

En general, el error cometido mediante la estimación diferencial es menor cuanto menor sea el Ä*x*, pues la suposición: *k se mantiene constante* se acerca más al comportamiento real. Por ello, una mejora de la estimación consiste en dividir el intervalo Ä*x* en *N* subintervalos, calcular la estimación dy_i correspondiente a cada subintervalo y después sumar.

Este procedimiento obliga a conocer no sólo el valor de la diferencial a partir de x_1 y para todo el intervalo, sino en cada uno de los subintervalos en que dividimos el Ä*x*. La diferencial a partir de x_i para el correspondiente Äx_i (dy_i), será una estimación lineal del Äy_i, de pendiente k_i.

Esta mejora de la estimación se expresa mediante la ecuación: $\Delta y \approx \sum_{i=1}^{N} dy_i = \sum_{i=1}^{N} k_i \cdot dx_i$ (ec. 2.I), y también mediante las siguientes representaciones gráficas (ver figs. 2.IV y 2.V):

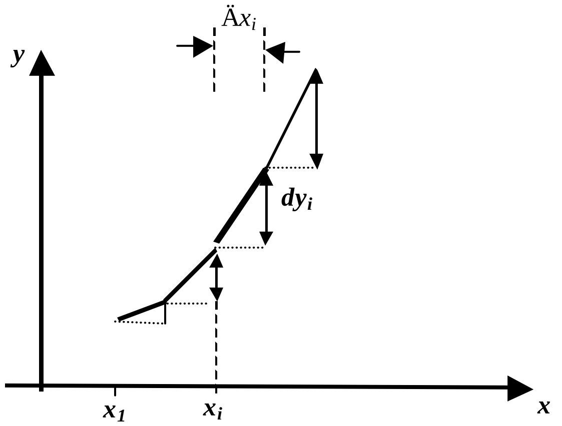


Figura 2.IV. Representación gráfica, en el sistema de coordenadas *y-x*, del intento de mejora de la estimación del Δy mediante el cálculo de d*y* consecutivas. k_i es la pendiente del segmento más grueso ($dy_i/\Delta x_i$). La suma de todos los segmentos verticales es una estimación del Δy.

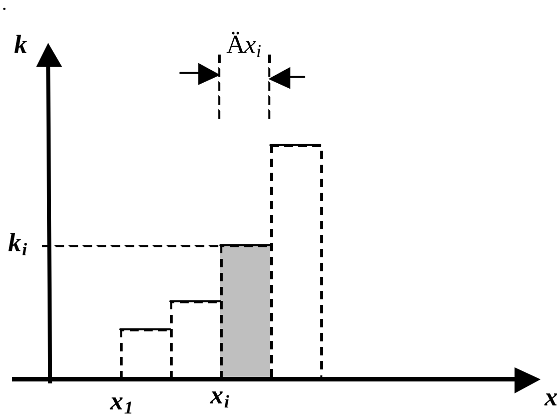


Figura 2.V. Representación, en el sistema de coordenadas *k-x*, del intento de mejora de la estimación del Δy mediante el cálculo de d*y* consecutivas. $dy_i=k_i\cdot \Delta x_i$ es el área del rectángulo rayado. La suma del área de todos los rectángulos es una estimación del Δy.

Llamando ε_i al error cometido al realizar la estimación de cada Δy_i, entonces: $\Delta y_i = dy_i + \varepsilon_i$. El signo de cada ε_i puede ser distinto, según la estimación realizada difiera por exceso o por defecto en cada subintervalo; en lo que sigue, se va a considerar que los ε_i son todos positivos[17]. Para la suma total:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{N}\left(dy_i + \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{N} dy_i + \left(\textbf{\textit{error total}}\right) \qquad \text{(ec. 2.II)}$$

Cada ε_i es una función creciente de Δx_i, o una función decreciente de N (ya que: $\Delta x_i \propto N^{-1}$). En cuanto al ***error total*** acumulado (suma de errores parciales), el

[17] Todos los ε_i son positivos si la segunda derivada: *y''(x)* es positiva en todo el intervalo. Hemos hecho esta suposición para evitar trabajar con valores absolutos y facilitar la lectura del texto. Aunque desde un punto de vista riguroso algunas de las afirmaciones que se hacen en el texto no son ciertas (en especial cuando hay puntos de inflexión en algún subintervalo), la conclusión final que se obtiene al calcular el límite es cierta en todos los casos.

aumento del número de sumandos se ve compensado por la disminución del valor de cada uno de ellos, de forma que el ***error total*** será también una función decreciente de *N*, ya que las estimaciones se acercan cada vez más al comportamiento real. Se dispone entonces de un método de cálculo aproximado del comportamiento global a través de una suma de *N* estimaciones, con la ventaja de que se puede reducir el ***error total*** cometido con sólo repetir el proceso aumentando el valor de *N*.[18]

Para poder calcular la estimación obtenida con cualquier *N*, necesitamos conocer la diferencial no sólo para un conjunto de valores discretos, sino a partir de cualquier *x* y para cualquier Ä*x*. Esto obliga a conocer no ya un conjunto discreto de pendientes (k_i), sino una función que asigne a cada *x* un valor de la pendiente: *k*(*x*). La diferencial debe ser definida entonces como una función de dos variables (*x*, d*x*), cuya expresión tendrá la forma: d*y*=*k*(*x*)· d*x*; dicha función es una estimación lineal de la correspondiente función: Ä*y*(*x*, Ä*x*).

La diferencial no es entonces una cantidad fija muy pequeña, ni una cantidad variable con límite cero, ni un ente formal del que sólo pueden obtenerse valores aproximados, sino una *función* que puede tomar cualquier valor exacto, positivo o negativo, grande o pequeño, según los valores de *x* y Ä*x* El único requisito –por ahora- exigido a la función diferencial es que sea lineal respecto al d*x* (=Ä*x*); serán válidas expresiones del tipo: $dy=(3x^6+\cos x^{-2})\cdot dx$, $dy=4x\cdot dx$... pero no serán válidas: $dy=5x\cdot dx^2$, $dy=4x/dx$... pues no deben aparecer términos que contengan potencias de Ä*x* distintas de uno (ver **Anexo 1**, pp. 392, 396).

Podemos aplicar a una situación física concreta la justificación y el significado sobre la diferencial que hemos adelantado hasta aquí. Cuando se escribe: d*N*=-ë· *N*· d*t* para expresar la ley de las desintegraciones nucleares, el problema planteado es calcular el Ä*N* producido en un Ä*t*, y se escribe en forma diferencial porque previamente se ha debido reconocer que el Ä*N* no es lineal respecto al Ä*t*, es decir, que en doble tiempo no se producen el doble de desintegraciones. El significado físico de esa expresión diferencial es: una estimación del número de desintegraciones que

[18] Cuando se conoce un conjunto finito de esos k_i, existen métodos aproximados de cálculo numérico (regla de los rectángulos, regla de los trapecios, regla de Simpson...) que disminuyen el error cometido. No obstante, el objetivo del Cálculo diferencial no es obtener una aproximación, sino el valor exacto de Ä*y* expresado **en forma de función** de Ä*x*.

se produciría en ese Δt si los parámetros de los que depende se mantuviesen constantes[19]. Por ejemplo, si en un cierto instante hay $3 \cdot 10^{20}$ núcleos en una muestra cuya constante radiactiva es de $4 \cdot 10^{-8}$ s^{-1}, el valor de dN correspondiente a un Δt de 30 s sería: dN=$-3.6 \cdot 10^{14}$ núcleos (¡-360 billones!); este valor se interpreta diciendo que se habrían desintegrado 360 billones de núcleos a partir de ese instante y durante 30 s, si N hubiese cambiado uniformemente.

Del mismo modo, cuando se estudia la variación de la presión atmosférica (P) con la altura (h), se reconoce en primer lugar que esa variación no es lineal pues la densidad (ρ) no es constante. Se escribe entonces la expresión diferencial: dP= $\rho \cdot g \cdot \Delta h$, que es una estimación del ΔP que se produciría si el cambio fuese uniforme, es decir, si la densidad (y g) se mantuviese constante en el intervalo Δh.

Obtener el valor exacto de Δy (condición que debe cumplir la función diferencial)

Para una función $k(x)$ determinada, dando distintos valores a N se obtiene una serie de estimaciones globales y su correspondiente serie de ***errores totales***. Ninguno de los términos de esta última serie será nulo, pues ε_i es siempre distinto de cero por muy grande que sea N, ya que el comportamiento seguirá siendo no lineal por muy pequeño que sea el intervalo Δx_i. Tampoco tiene que ser necesariamente cero el límite de esa serie cuando N tiende a infinito, aunque -ahora sí- existe la posibilidad de que así ocurra[20], dependiendo de qué comportamiento sea dominante: el del número de sumandos (N) que se hace cada vez mayor, o el de cada sumando (ε_i) que se hace cada vez menor.

[19] Puede extrañar que se suponga que N no cambia en ese Δt cuando lo que pretendemos calcular es precisamente ΔN. Es posible imaginar una situación en lo que esto ocurre: se introduce un nuevo núcleo en la muestra cada vez que se produce una desintegración (en promedio, es lo que sucede con la desintegración del ^{14}C en un ser vivo). Sin embargo, no es necesario poder imaginar esta situación para superar la aparente contradicción, pues dN no es la solución real del problema sino una suposición razonable para llegar a resolverlo.

[20] Para salir al paso de algunas dificultades para aceptar esta posibilidad, conviene recordar algunos errores relacionados con el concepto de límite que han sido citados más arriba: el límite no es *un proceso sin fin* sino un valor concreto, que además no tiene por qué coincidir con ninguno de los términos de la serie o de la sucesión, sino que constituye un *objeto mental nuevo* (Cottrill, 1996; Lauten *et al.*, 1994; Sánchez y Contreras, 1998; Schneider, 1992; Williams, 1991).

Aclarada esta posibilidad, el límite de la serie de sumas de estimaciones $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} dy_i$ (que recibe el nombre de integral[21] y se representa por $\int_{x_1}^{x_1+\text{Ä}x} dy$) será exactamente Ä*y* si, y sólo si, el límite de la serie correspondiente de ***errores totales*** es cero. Como el límite de esa serie depende de la función *k*(*x*) elegida, el problema quedará resuelto si sabemos encontrar la función *k*(*x*) que hace que el límite de la serie de ***errores totales*** sea cero.

Para ello, debemos tener en cuenta que si å es el mayor de los errores parciales cometidos ($\text{å} \geq \text{å}_i$ **,** $\forall i$), el ***error total*** será siempre menor que *N*· å, y entonces (teniendo presente que *N* es inversamente proporcional a Äx_i):

$$0 \leq \lim_{N\to\infty} \textbf{\textit{(error total)}} \leq \lim_{N\to\infty} N \cdot \text{å} = cte \cdot \lim_{\text{Ä}x_i\to 0} \frac{\text{å}}{\text{Ä}x_i} \qquad \text{(ec. 2.III)}$$

Por tanto, el límite del ***error total*** será cero si el último miembro de la ec. 2.III es cero. Si ese miembro es cero para å, lo será también ∀å$_i$, es decir, para cualquier (Ä*y*-d*y*). Por tanto, **la estimación lineal que hace que el límite del *error total* sea 0 (y, por tanto, que la integral sea exactamente Ä*y*) será aquélla, d*y*, que cumpla:**

$$\lim_{\text{Ä}x\to 0} \frac{\text{å}}{\text{Ä}x} = \lim_{\text{Ä}x\to 0} \frac{\text{Ä}y - dy}{\text{Ä}x} = 0 \quad \mathbf{,} \quad \forall x, \qquad \text{es decir:} \quad \lim_{\text{Ä}x\to 0} \frac{\text{Ä}y}{\text{Ä}x} - \lim_{\text{Ä}x\to 0} \frac{dy}{dx} = 0$$

Como: $\lim_{\text{Ä}x\to 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{\text{Ä}x\to 0} \frac{k(x)\cdot dx}{dx} = k(x)$ y, además: $\lim_{\text{Ä}x\to 0} \frac{\text{Ä}y}{\text{Ä}x} = y'(x)$, entonces:

$$k(x) = y'(x) \quad \forall x \qquad \text{(ec. 2.IV)}$$

[21] Esta es la concepción de Cauchy sobre la integral -modificada por Riemann para ampliar el conjunto de funciones integrables- y es la que se utiliza en el contexto de la enseñanza de la Física. En otros trabajos, todos ellos relacionados con la enseñanza de las Matemáticas, se discute el concepto de integral más adecuado para utilizar en los niveles introductorios. Así, Turégano (1998) argumenta sobre las ventajas didácticas de la definición de Lebesgue frente a los inconvenientes -en parte relacionados con el concepto de infinitesimal- que ella encuentra en la definición de Riemann-Cauchy. Por otra parte, Calvo (1998) realiza una trasposición didáctica de la definición de Riemann, y Bartle (1996) reivindica la concepción de Riemann no sólo por su simplicidad sino por su mayor potencia, en especial si se acepta la generalización descubierta por Kurzweil y Henstock en 1960; según este autor, los estudiantes universitarios no están preparados para estudiar la integral de Lebesgue, pero sí una versión simplificada de la integral generalizada de Riemann.

Así pues, el límite de la serie de sumas de estimaciones lineales será exactamente Ä*y* (el límite del error total correspondiente será cero) si y sólo si *k*(*x*) -la pendiente de la estimación realizada en cada *x*- coincide con la derivada de la función *y*=*f*(*x*) en ese punto. Dicho de otro modo: la única estimación lineal que permite obtener la relación exacta entre Ä*y* y Ä*x* *vía* integral, es la que cumple la condición expresada mediante la ec. 2.IV.

En definitiva:

$$\underset{N\to\infty}{lím}\sum_{i=1}^{N} dy_i \equiv \int_{x=a}^{x=b} dy = \int_{x=a}^{x=b} k(x)\cdot dx = y(b) - y(a) \qquad \text{si, y sólo si:} \qquad k(x) = \frac{dy}{dx} = y'(x)$$

(ec. 2.V)

Como vemos, la interpretación de la derivada como cociente de diferenciales, el cálculo de integrales mediante *antiderivadas* y, en general, la relación entre diferencial, derivada e integral, aparecen de un modo justificado e intuitivo utilizando la estrategia que parte de la concepción de la diferencial como *la mejor* estimación lineal del incremento.

El significado gráfico de la integral, en el sistema de coordenadas *k*-*x*, también queda aclarado (ver fig. 2.VI). El área bajo la curva no es la suma de áreas de

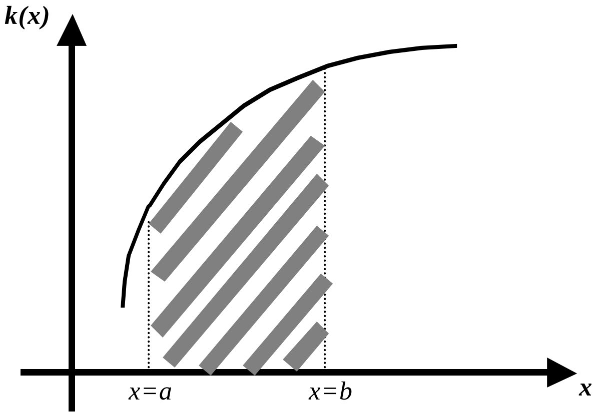


Figura II.6. El valor del área de la figura rayada, en el sistema de coordenadas *k*-*x*, será *y*(*b*) – *y*(*a*), si y sólo si *k*(*x*) = *y'*(*x*).

rectángulos, sino un objeto nuevo: el límite de la serie de sumas de rectángulos.

2.1.2. Recapitulación. Diferencial, integral y derivada: significado y relaciones entre ellos.

La respuesta al problema general planteado en las aplicaciones físicas nos ha permitido obtener una visión conjunta de la estrategia del Cálculo para resolverlas y nos ha llevado a *inventar* una serie de conceptos y establecer relaciones entre ellos.

Diferencial

La diferencial ha sido *inventada* para superar la dificultad que supone la no-linearidad de muchas situaciones físicas cuando se abordan con un mínimo de complejidad, y consiste precisamente en una estimación del Äy, lineal respecto al Äx: **d*y*=*k*(*x*)· d*x*** El *cociente diferencial* (dy/dx) representa la pendiente de esa estimación lineal.

A pesar de que la condición impuesta a la diferencial coincide con la *fórmula de Cauchy*: dy=y'· dx, la nueva concepción difiere claramente de la definición de Cauchy pues ahora las expresiones diferenciales adquieren un claro significado físico, en concordancia con su importante papel en la estructura del Cálculo cuando se aplica a la resolución de problemas físicos. Por otra parte, aunque la idea de aproximación y la cercanía a las situaciones físicas acercan la *nueva concepción* a la definición de Leibniz, supera todas las objeciones que a ella se realizaban y, en particular, deja de identificarse con una cantidad infinitamente pequeña.

La concepción de la diferencial que se ha deducido para dar sentido físico al uso del Cálculo en las aplicaciones físicas, coincide con la diferencial del Fréchet cuando se concreta en el caso de funciones de una variable, concepción que fue inventada a principios del siglo XX para superar algunas deficiencias surgidas en el Análisis Funcional.

Integral

La integral ha sido *inventada* con la aspiración de llegar al resultado exacto mediante el límite de la mejora de la estimación: $\int_x^{x+\text{Ä}x} dy = \underset{N\to\infty}{\text{lím}} \sum_{i=1}^{N} dy_i$ Para que esa integral proporcione el resultado exacto (Äy), la diferencial debe cumplir la siguiente condición: dy/dx=y'

De esta forma, toda estimación lineal que "suponemos" que es la diferencial conduce a un determinado comportamiento global. *Uno y otro -expresión diferencial y resultado global- tienen carácter de hipótesis, aunque en Física sólo el segundo es directamente contrastable; la contrastación del resultado global servirá para contrastar también la expresión diferencial elegida, aunque sea "a posteriori".* Pueden explicarse así muchas paradojas (Schneider, 1991; Artigue y Viennot, 1987) a las que puede llevar el resultado de integrales cuando se toman d*y muy pequeños* en los que, en último término, parece que *todo vale*, cuando en realidad la fuente de error reside en la expresión diferencial de partida (ver **Anexo 2**).

En muchas ocasiones se puede evitar la *construcción* de la integral: se escribe la expresión diferencial: $dy=k(x)\cdot dx$, se le impone la condición: $dy/dx=y'$, y se pasa directamente al comportamiento global aplicando reglas de *antiderivación*: la función *y(x)* es **una** *antiderivada* de *k(x)*[22]. Se obtiene así *y(x)* salvo constantes, y si se conoce una *condición de contorno* se puede alcanzar el objetivo final que es llegar a obtener: $y = f(x)$.

Sin embargo, aunque este *paso directo* está basado en aceptar la *nueva concepción* de diferencial, en la práctica esta idea queda oscurecida y el paso se reduce al cálculo de *antiderivadas*. La definición operativa de antiderivada se limita a identificarla como una regla de cálculo, basada en la definición anterior de derivada, pero en sí misma no supone ninguna aportación conceptual. Junto a las ventajas de disponer de una técnica, susceptible de aplicación reiterada y algorítmica, este paso directo presenta también algunos inconvenientes. Por ejemplo, no permite obtener el comportamiento global *y(x)* que se deriva de la expresión: $dy=k(x).dx$ cuando la función *k(x)* no tiene antiderivada; tampoco permite, a modo de aproximación, realizar cálculo numérico ya sea porque no exista antiderivada o porque ésta resulta difícil de obtener; no permite tampoco vincular el procedimiento con la resolución de los problemas de *sumas infinitas*. Pero el mayor inconveniente reside, precisamente,

[22] En el uso habitual del Cálculo diferencial, la función antiderivada se denomina *función primitiva* o *integral indefinida*, aunque muy pronto acaba perdiendo ese adjetivo y se le llama simplemente *integral*; las reglas y técnicas de antiderivación se llaman entonces reglas y técnicas del cálculo de integrales o primitivas. En este contexto, la expresión $\int f$ se utiliza para simbolizar la función antiderivada de *f*, es decir, la integral de la función *f*; a veces se especifica la variable respecto de la cual se antideriva introduciendo el término *dx*, y se escribe: $\int f dx$.

en su carácter meramente operativo, pues enmascara y desatiende una pregunta clave: *¿cómo es posible que, partiendo de una estimación (*d*y), pueda concluirse en un conocimiento preciso y no estimado del valor buscado (Äy)?,* de forma que el algoritmo concebido como ayuda puede convertirse en un refugio tras el que se esconda la falta de comprensión.

Para superar estos inconvenientes, y en especial para dar una respuesta clara a esta última pregunta, es recomendable construir primero la integral correspondiente, con un significado que va más allá de la simple operación inversa a la derivación (Calvo, 1998), y relacionar después su solución con la *nueva concepción* de diferencial y, por tanto, con el cálculo de antiderivadas. De esta forma, se favorece la comprensión y el significado del denominado Teorema Fundamental del Cálculo que establece la relación inversa entre los procesos de derivación e integración[23] (ver el apartado 2.1.1, y los **Anexos 1, 2 y 3**).

Charalampos (1993) reflexiona sobre lo relativo que resulta el calificativo de *fundamental*, concluyendo que no debe referirse tanto al teorema como a las ideas y pruebas que aportan. En este sentido, se puede afirmar que tanto la formulación como la demostración que se ha realizado utilizando la diferencial de Fréchet contribuye a hacer *más fundamental* aún dicho teorema.

Derivada

La *nueva concepción* de la diferencial –la diferencial de Fréchet- permite definir la función derivada como un caso particular de la función diferencial, estableciendo: $y'(x)=\mathrm{d}y(x,\mathrm{d}x=1)$ (ver, por ejemplo: Del Castillo, 1980). Sin embargo, en nuestro intento de abordar situaciones físicas, se ha conservado la definición de derivada como el límite del cociente incremental, que es la definición habitual que se utiliza en las

[23]Aunque la idea esencial del Teorema Fundamental del Cálculo es establecer esta relación inversa, existen distintas formulaciones del mismo en los textos matemáticos, como explica Charalampos (1993). Este autor identifica dos posibles teoremas, cada uno susceptible de conducir al otro:

T1) Si f es continua en [a,b] y $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $x\in[a,b]$, entonces: $\boldsymbol{F'(x)=f(x)}$

T2) Si F es diferenciable y F' integrable en $[a,b]$, entonces: $\boldsymbol{\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)}$

y reivindica el carácter fundamental para el T2, en contraposición con lo habitual en los textos de matemáticas que lo asignan al T1. Nosotros hemos coincidido con la propuesta de este autor al referirnos al Teorema Fundamental.

clases de Física. Pero el hecho de que el cociente diferencial tenga que coincidir con la derivada aclara y facilita la comprensión de algunos aspectos relacionados con la derivada y que aparecen con frecuencia en las aplicaciones físicas.

La *nueva concepción* de diferencial legitima los razonamientos basados en la interpretación de derivada como un verdadero cociente, sobre los cuales recae la sospecha de la falta de rigor. Por ejemplo:

- $F = \frac{dp}{dt}$; despejando se obtiene: d*p*=*F*· d*t*
- Como: d*N*=-ë· *N*· d*t*, entonces pasando d*t* al primer miembro: *N'*=-ë· *N*
- $F_t \cdot dr = m \cdot a_t \cdot dr = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dr = m \cdot dv \cdot \frac{dr}{dt} = m \cdot v \cdot dv$

La expresión d*y*/d*x* no es un simple operador matemático (d/d*x*) aplicado sobre la función, ni tampoco es una forma abreviada de referirse a la derivada o de especificar la variable de derivación. Esa expresión (d*y*/d*x*) es un cociente de dos términos con significado en sí mismos, y representa la pendiente de una estimación lineal.

La expresión: d*y*=*y'*· d*x*, más allá de una definición de diferencial como instrumento operativo a partir de la derivada, tal como la concebía Cauchy, pasa a representar una propiedad de la función diferencial, *aun cuando no sean conocidas ni la función y(x) ni su derivada*. Esta nueva interpretación es coherente con el uso del Cálculo diferencial en la *Física* donde, como ya hemos señalado, *se escriben las expresiones diferenciales sin conocer la expresión de la función que se busca o "función incógnita", y sin conocer tampoco la expresión de su derivada.*

Los mismos errores ya comentados sobre el concepto de límite (ver, en este capítulo, pp. 62-63) explican frecuentes interpretaciones erróneas del significado de la derivada y, mediante la expresión *y'*=d*y*/d*x*, también sobre la diferencial. Así, cuando se identifica el límite con el último término de la sucesión y no como un objeto nuevo, se considera entonces el cociente d*y*/d*x* con un cociente Ä*y*/Ä*x* cuando Ä*x* es *casi cero*, interpretando entonces los términos diferenciales como incrementos muy... muy pequeños. Esto es lo que sucede cuando se piensa que la recta tangente es la recta secante que une dos puntos de la curva *muy próximos*, o que la velocidad instantánea es la velocidad media correspondiente a un intervalo de tiempo *muy pequeño*.

En otros casos, cuando se interpreta el límite como la expresión de un simple proceso o una forma de proceder, se considera entonces que la expresión d*y*/d*x* no es un objeto sino que representa un procedimiento, y se interpretan los términos diferenciales como entes formales sin significado propio. Cuando se confunden *rectas* secantes con *segmentos* de cuerda y no con rectas ilimitadas, entonces la tangente como el límite de esos segmentos resulta evidentemente cero; se recurre entonces a esta interpretación del límite como proceso para evitar esta contradicción.

Teniendo en cuenta que la derivada en cada punto representa la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto, se dice que la diferencial es la *estimación lineal tangente*. Además, aunque el cociente d*y*/d*x* nunca llegue a coincidir con ninguno de los cocientes Ä*y*/Ä*x*, del mismo modo que la tangente nunca llega a coincidir con ninguna secante, sí puede afirmarse que la pendiente de la estimación diferencial en el punto x_1 es reflejo del comportamiento de la función: $y=f(x)$ en un entorno próximo del punto x_1. En este sentido, se dice que la diferencial es una *estimación lineal basada en un comportamiento local*.

La clarificación del concepto de diferencial, además de legitimar la interpretación de la derivada como cociente de diferenciales, ofrece una clara explicación del significado físico de las expresiones en las que aparece la derivada y los resultados numéricos, más allá de las descripciones operativas relacionadas con la forma de cálculo. Por ejemplo:

- La rapidez en un instante se define habitualmente como el límite de rapideces medias, pero puede explicarse mejor el significado físico de este concepto: lo que cambiaría la posición cada segundo a partir de ese instante si se mantuviese la rapidez constante (es decir, *v* es: d*e*/d*t*).
- Es difícil explicar el significado físico de un resultado numérico de la derivada en términos de límite (ver cap. 1, p. 45). Sin embargo, un resultado numérico como por ejemplo: *N*'=-3500 núcleos/seg puede interpretarse ahora diciendo: cada segundo se desintegrarían 3500 núcleos si, a partir de ese instante, el proceso ocurriese de forma uniforme.

- La relación: $E_r = -V_r' = -\dfrac{dV}{dr}$ es difícil de explicar en términos del límite de un cociente incremental. Sin embargo, puede interpretarse ahora de esta manera: la componente de la intensidad del campo en la dirección *r* indica lo que disminuiría el potencial por cada metro en esa dirección y sentido, si esa disminución se produjese de forma uniforme a partir de ese punto. Desarrollando esta misma idea, aparecen como evidentes algunas propiedades del vector intensidad de campo: es perpendicular a la superficie equipotencial, señala hacia donde la disminución de potencial es más brusca, etc.

2.1.3. ¿Cómo seleccionar la expresión diferencial correspondiente a cada situación física? Naturaleza hipotética de la diferencial en Física.

La estrategia del Cálculo nos ha permitido mostrar que, a partir de la expresión diferencial, se puede hallar –vía integral- el Ä*y* buscado. Sin embargo, queda aún por resolver la importante cuestión de cómo se determina cuál es la expresión diferencial que corresponde a cada situación física.

En el uso habitual del Cálculo diferencial en física se piensa erróneamente que cualquier aproximación *suficientemente pequeña* es válida, lo que conduce con frecuencia a resultados equivocados, como ya se ha explicado. Por otra parte, no es posible aplicar directamente la igualdad: dy=y'· dx, pues en la mayoría de las situaciones físicas se desconoce tanto la función y=f(x) como su función derivada y'=g(x). En este caso, es necesario avanzar *a título de hipótesis*, apoyados en el análisis y conocimiento físico de la situación, una estimación lineal del Ä*y* respecto al Ä*x*, *suponer* que es la estimación diferencial, y obtener el resultado global al que conduce (la función incógnita) que sí es contrastable (experimentalmente o por su coherencia con el cuerpo de conocimientos en que se inserta el problema).

Por ejemplo, si queremos hallar cómo varía la intensidad, *I*, de una onda plana al atravesar un medio, es decir *I*(*x*), siendo *x* la distancia atravesada por la onda en el interior del medio, desconocemos *I*(*x*) y, por supuesto, también su derivada. Podemos, no obstante, formular hipótesis razonables sobre los factores que influirán en el Ä*I* producido al atravesar una distancia Ä*x*, y concretarlas en una estimación lineal del Ä*I*. En este caso, por ejemplo, cabe esperar que Ä*I* dependa de la naturaleza del medio atravesado, de Ä*x* y del valor de la intensidad (a mayor intensidad mayor absorción por el medio, en un mismo Ä*x*), pero no podemos escribir Ä*I* = -á· *I*· Ä*x*, pues sabemos que *I* varía con *x* (es decir que ΔI no es lineal respecto a Δx: $\frac{\text{Ä}I}{\text{Ä}x} \neq cte.$). Pero una estimación lineal del Ä *I*, al pasar de *x* a *x*+Ä*x*, podría ser: d*I* = -á· *I*(*x*)· d*x*, que representa lo que valdría Ä *I*, a partir de *x* y en un d*x* (que es exactamente lo mismo que Δx y no tiene por qué ser pequeño) si la variación de *I* se produjera uniformemente, siempre al mismo ritmo, desde el comienzo del intervalo. También serían igualmente posibles expresiones como d*I* = -á· $I^2(x)$· d*x* o $dI = -á \cdot \sqrt{I(x)} \cdot dx$.

La expresión elegida conducirá, *vía* integral, a una expresión funcional de ΔI o –si se conoce una condición de contorno- de *I*=*f*(*x*), que puede ser sometida a contrastación, lo que permite aceptarla o no y, en consecuencia, aceptar o no la expresión diferencial seleccionada. Lamentablemente, en los libros de texto no aparecen estas consideraciones sobre la naturaleza hipotética de la diferencial, transmitiendo una falsa e incomprensible sensación de seguridad *a priori*. No es infrecuente, incluso, encontrar expresiones del tipo "(..) se comprueba *experimentalmente* que *dI* = ..."

No obstante, sí que existen situaciones en las que es posible asegurar desde el principio cuál es la expresión diferencial adecuada, debido a que tal expresión se deriva de alguna definición previa. Por ejemplo:

- Cuando conocemos bien el ritmo de cambio, es decir, la derivada: *y'*, basta con sustituir directamente en la fórmula: d*y*=*y'*· d*x*. Ejemplo de esta situación es escribir la expresión de la diferencial de la rapidez respecto al tiempo cuando conocemos la aceleración tangencial en función del tiempo: si sabemos que $a_t=5t^2$, no existe ninguna duda que la expresión diferencial: d*v*=5t^2· d*t* es correcta.

- Cuando, por la definición de la magnitud *y*, conocemos con certeza la relación entre Ä *y* y Ä*x* cuando ésta es lineal (Ä*y*=*k*· Ä*x*) y queremos encontrar Ä*y* en una situación en que *k* varía con *x*; en este caso, la función diferencial es, seguro: d$y=k(x)\cdot$ dx [24] Por ejemplo: sabemos que la variación de energía total de un sistema físico que se produce debido al trabajo exterior realizado por una fuerza constante cuyo punto de aplicación se desplaza una distancia Δx, es: Ä$E=F\cdot$ Äx; si la fuerza varía con la distancia, de la forma $F(x)$, para hallar ΔE será necesario recurrir a la estimación diferencial, que será: d$E=F(x)\cdot$ dx

- Cuando se trata de hacer el paso de un comportamiento discreto a otro continuo, basta con tener en cuenta el significado físico de la magnitud. Por ejemplo, sabemos que el momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje cambia cuando añadimos una masa puntual a una distancia r del eje de giro: Ä$I=m\cdot r^2$; caben dos posibilidades cuando es un continuo: d$I=r^2\cdot$ dm, d$I=m\cdot$ dr^2; la primera posibilidad consiste en estimar el ÄI con un valor que equivale a añadir un trozo de masa (Äm) a una distancia siempre constante del eje de giro, es decir, hacer una estimación como si se tratase de una masa puntual; la segunda posibilidad, en cambio, consiste en estimar el ÄI considerando que la masa del cuerpo no cambia cuando se aumenta la distancia al eje de giro; resulta evidente que es la primera posibilidad la que coincide con el significado físico del momento de inercia.

En ocasiones excepcionales, generalmente relacionadas con problemas geométricos, se puede demostrar *a priori* que la expresión diferencial adelantada es la adecuada (cumple la condición de Fréchet: dy/d$x=y'$). Se describen aquí dos métodos:

- Por *encuadramiento* del Äy, donde se trata de encontrar una función $g(x)$ que cumpla: $g_m\cdot$ Äx < Äy < $g_M\cdot$ Äx, siendo g_m y g_M los valores mínimo y máximo respectivamente que toma la función $g(x)$ en el intervalo [x, x+Äx]. Si $g(x)$ es continua entonces $y=f(x)$ es diferenciable y su diferencial

[24] Una interpretación equivocada de este tipo de situaciones podría conducir a errores en algunos problemas geométricos. Por ejemplo, identificar la diferencial del área de la superficie de un casquete esférico con el área lateral de un cilindro de la misma altura (situación donde la relación entre ÄA y Äh es, efectivamente, lineal y es conocida con certeza: ÄA=2ð$r\cdot$ Äh). Sin embargo, conviene tener en cuenta que el cilindro no es un *caso particular* de casquete esférico, y por tanto, no puede garantizarse directamente que la expresión : dA=2ð$r\cdot$ dh sea válida para el casquete (de hecho no lo es), y será necesario asegurarnos mediante otro procedimiento (ver **Anexo 2**).

es precisamente: d*y=g(x)*· d*x* (Alibert y Legrand, 1989) (ver **Anexo 1**, p. 393).

- Por comparación de Ä*y* con d*y*, demostrando que el error cometido es un infinitésimo de orden superior a Ä*x*, lo cual equivale a demostrar que se cumple la condición de Fréchet. Teniendo en cuenta que la expresión definitiva del Ä*y* no se conoce *a priori*, esta demostración directa puede hacerse a través de una magnitud intermedia (Ä*M*) que verifique: $\text{Ä}M \geq |dy - \text{Ä}y|$, $\forall\, x, \text{Ä}x$ (o al menos cuando Ä*x* tiende a cero). Si se encuentra una expresión para ese Ä*M* y se demuestra que Ä*M*/Ä*x* tiende a cero cuando Ä*x* tiende a cero, con mayor razón entonces lo hará: |*dy*-Ä*y*|/Ä*x*, *demostrando así que se trata, efectivamente, de la diferencial* (ver **Anexo 1**, p. 396).

  En sentido contrario, si se encuentra una magnitud intermedia (Ä*M*) que verifique: $\text{Ä}M \leq |dy - \text{Ä}y|$, $\forall\, x, \text{Ä}x$ (o al menos cuando Ä*x* tiende a cero), y se demuestra que Ä*M*/Ä*x* **no** tiende a cero cuando Ä*x* tiende a cero, con mayor razón entonces podemos asegurar que tampoco tiende a cero el término: |*dy*-Ä*y*|/Ä*x*, *demostrando así que era incorrecto suponer que* d*y* *era la diferencial* (ver **Anexo 2**, pp. 404-406).

Sin embargo, en la mayoría de las situaciones físicas no es posible usar estos métodos, cuya aplicación resulta, además, bastante tediosa. Es más coherente con las características del trabajo científico y con la práctica de resolución de problemas considerar la expresión diferencial como hipótesis contrastable indirectamente a través del resultado al que conduce.

2.2. ¿QUÉ SUPONDRÍA UNA COMPRENSIÓN ADECUADA DE LA DIFERENCIAL EN EL CONTEXTO DE LA ENSEÑANZA/APRENDIZAJE DE LA FÍSICA?

Como se ha mostrado en el apartado anterior, el Cálculo diferencial es una estrategia sistemática para abordar con éxito la mayoría de las situaciones físicas reales, caracterizadas por cierto grado de complejidad. No obstante, en los niveles de enseñanza previos al Bachillerato, las situaciones estudiadas en la asignatura de Física se idealizan -habitualmente de forma no explícita- suponiendo un comportamiento lineal, evitando con ello recurrir al uso del Cálculo diferencial. Así, por ejemplo, aunque en la mayoría de los movimientos el comportamiento de la rapidez frente al tiempo no es lineal, es conveniente al principio limitarse a situaciones en las cuales la aceleración tangencial es constante; del mismo modo, aunque la variación de la presión en el interior de un fluido no es lineal con la profundidad, es conveniente al principio limitarse a situaciones en las cuales puede considerarse constante la densidad; idéntica limitación se establece al estudiar la dilatación de una varilla frente al aumento de su temperatura, el estiramiento de un muelle frente a la fuerza ejercida, etc.

Sin embargo, a partir de 1º Bachillerato Logse o 3º BUP se empieza a reconocer la complejidad de algunas situaciones, obligando así a que ciertos fenómenos, conceptos y desarrollos sean tratados haciendo uso del Cálculo diferencial. A título de ejemplo pueden mencionarse los siguientes apartados que se estudian a partir de ese curso haciendo uso de expresiones diferenciales:

- Velocidad y aceleración instantánea. Ecuaciones del movimiento.
- La fuerza como intercambio de momento. Impulso mecánico.
- Definición del trabajo y búsqueda de expresiones para la energía potencial
- Relación entre fuerza y energía potencial, o entre intensidad de campo y potencial. Concepto de gradiente.
- Teorema de la energía cinética (o de las fuerzas vivas)
- Potencia instantánea y su relación con la velocidad
- Definición y cálculo del centro de masas
- Cálculo de la intensidad y/o del potencial del campo creado por fuentes extensas
- Energía de un condensador cargado y, en general, de un campo eléctrico
- Definición de flujo
- Fuerza que actúa sobre un conductor en un campo magnético
- Absorción de ondas por un medio
- Desintegración nuclear

Si a ello añadimos el uso constante de la diferencial en los primeros cursos de Universidad, es lógico suponer que la existencia de deficiencias en el aprendizaje de este concepto afectará seriamente a la comprensión de los conceptos físicos y a la actitud de los alumnos hacia la Física y su aprendizaje. Es, pues, del mayor interés para la enseñanza de la Física en Bachillerato y primeros cursos de Universidad, identificar dichas carencias y planificar actuaciones que puedan evitarlas.

El estudio histórico y epistemológico que se ha presentado hasta aquí, nos permite avanzar de un modo fundado qué constituiría una comprensión adecuada del concepto de diferencial en el campo de la Física, como paso previo y necesario para analizar en qué medida en la enseñanza habitual de la Física (y las Matemáticas) se suministran oportunidades adecuadas para generar dicha comprensión.

De acuerdo con el estudio realizado, los indicadores más importantes de una buena comprensión del concepto de diferencial en los cursos citados, sea cual sea la concepción de la diferencial que se utilice, se recogen en el Cuadro 2.II.

Cuadro 2.II. Indicadores de una comprensión adecuada de la diferencial y su uso

1. Saber cuándo y por qué se hace necesario su uso, es decir, conocer cuál es el problema que hace insuficiente el cálculo ordinario. En concreto, saber que es necesario recurrir a la diferencial cuando queremos hallar el Äy producido en un Äx, y la relación entre Äy e Äx no es lineal ($\frac{\text{Ä}y}{\text{Ä}x} \neq cte$).

2. Conocer la estrategia que utiliza el Cálculo para resolver ese problema y comprender el sentido de los distintos pasos que se recorren. En concreto:

- Saber explicar con precisión y sentido físico el significado de las expresiones diferenciales, reconocer sin ambigüedad que la diferencial puede tomar valores numéricos e interpretar el significado de los mismos.
- Conocer y justificar la relación que existe entre la diferencial (dy) y la derivada (y'): $y' = \frac{dy}{dx}$, y aceptar sin ambigüedad los razonamientos en los que se utiliza esa relación.
- Conocer el significado de la integral y saber justificar el denominado Teorema Fundamental, es decir, por qué la integral definida requiere el cálculo de *antiderivadas* o funciones primitivas
- Utilizar con sentido esa estrategia en situaciones y problemas en los que se domine el contenido físico de los mismos.

3. Ser consciente de la naturaleza hipotética, tentativa, en casi todas las situaciones físicas, de la expresión diferencial de partida, y saber que la validez de esa hipótesis no puede ser contrastada directamente sino a través del resultado al que conduce.

4. Valorar positivamente el papel de la diferencial en el aprendizaje de la Física. Este componente axiológico debería ser una consecuencia natural cuando se comprende el papel crucial que juega la diferencial en el tratamiento de situaciones físicas de interés.

Como hemos tratado de mostrar, las concepciones *históricas* de la diferencial resultan insuficientes para contemplar todos esos indicadores, mientras la concepción de la diferencial presentada en este trabajo y basada en la definición de Fréchet contempla de forma precisa todos y cada uno de ellos. Para ilustrar esta última conclusión, en el **Anexo 3** se utiliza la *nueva* concepción de la diferencial para resolver tres problemas de Física, similares a los que se encuentran resueltos en cualquier libro de Física General utilizando la concepción habitual.

La clarificación conceptual realizada en estos dos capítulos y las conclusiones obtenidas sobre lo que debería constituir una adecuada comprensión de la diferencial en la Física, servirán como punto de partida para intentar dar respuesta a las cuestiones ya planteadas:

- *¿comprenden los alumnos el concepto de diferencial y, en general, los conceptos implicados en la estrategia del Cálculo, cuando se utilizan en las clases de Física?, ¿cuáles son las deficiencias en su comprensión y cuáles son sus consecuencias?*
- *¿la enseñanza habitual de esos conceptos es potencialmente significativa, o tiene deficiencias que hacen muy poco probable una comprensión adecuada de los mismos?*
- *¿es posible una enseñanza que evite las deficiencias detectadas?, ¿produce mejoras respecto a la situación actual?*

En concreto, la segunda parte de este trabajo, constituida por los capítulos que van del 3 al 6, está dedicada a comprobar que, efectivamente, los indicadores mencionados de una adecuada comprensión del uso de la diferencial en la Física, están ausentes en la enseñanza habitual.

RESUMEN: El problema general que subyace en toda situación física que requiere el uso del Cálculo diferencial es encontrar una expresión funcional que relacione dos magnitudes físicas (x, y), es decir, encontrar la función incógnita: $y(x)$. Si se conoce una condición inicial: $y(x_1)=y_1$, el problema es equivalente a encontrar una expresión que relacione los incrementos: Ä$y=f($Ä$x)$. El Cálculo diferencial se utiliza para obtener esa relación en situaciones no lineales, aplicando la siguiente estrategia:

1. Realizar una estimación del valor de Äy a partir de x_1, y para un incremento Äx, suponiendo que la función tiene un comportamiento lineal a partir de x_1 y en todo el intervalo Äx lo que se representa por: d$y=k\cdot$ Äx

2. El error cometido al realizar esta estimación (Ä$y-$dy) dependerá del valor de Äx (*en general*, el error será menor cuanto menor sea Äx) y del valor de k (que puede ser cualquiera, es decir, es posible cualquier pendiente de la recta).

Podemos, pues, mejorar la aproximación al Δy dividiendo el intervalo Äx en N subintervalos, calculando una estimación lineal del Äy_i correspondiente (dy_i $=k_i\cdot$ Äx_i), y sumando las estimaciones lineales parciales Si el error cometido en cada subintervalo es: å=Äy_i-dy_i, entonces:

$$\text{Ä}y = \sum_{i=1}^{N}\text{Ä}y_i = \sum_{i=1}^{N}\left(dy_i + \text{å}_i\right) = \sum_{i=1}^{N}dy_i + \left(error\ \ total\right) = \sum_{i=1}^{N}k\left(x_i\right)\cdot\text{Ä}x_i + \left(error\ \ total\right)$$

La "calidad" de esa aproximación aumenta disminuyendo el valor de cada Äx_i, es decir, aumentando el valor de N. Para poder realizar la estimación para cualquier N, hemos de disponer de una valor de k para cada x, pasando así de un conjunto discreto de k_i a una función: $k(x)$. Se define así la *función diferencial* para cualquier x y Äx: d$y=k(x)\cdot$ Äx La *calidad* de la aproximación dependerá del valor de N y de la $k(x)$ elegida.

3. El límite de la serie de estimaciones, cuando $N\to\infty$, será exactamente Äy si y sólo si el límite de la serie de errores totales, cuando $N\to\infty$, es cero. Es decir:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}dy_i = \lim_{N\to\infty}k\left(x_i\right)\cdot\text{Ä}x_i = \text{Ä}y \qquad si\text{, } y\ sólo\ si\text{:} \qquad \lim_{N\to\infty}\sum\text{å}_i = 0$$

Esto no ocurrirá para cualquier estimación lineal de partida, aunque Ä$x_i\to 0$. La condición que debe cumplir la diferencial para que pueda obtenerse la *función incógnita*: $y(x)$ a partir del límite de una suma de estimaciones lineales, es que: dy/d$x=y'$.

La concepción de la diferencial que se ha deducido para dar sentido físico al uso del Cálculo en las aplicaciones físicas, coincide así con la diferencial del Fréchet cuando se concreta en el caso de funciones de una variable.

En las aplicaciones físicas, en general, es necesario avanzar *a título de hipótesis*, apoyados en el análisis y conocimiento físico de la situación, una estimación lineal del Ä*y* respecto al Ä*x*, *suponer* que es la diferencial, y obtener el resultado global al que conduce (la función incógnita) que sí es contrastable. Será la contrastación de este resultado el que validará o no la expresión diferencial de partida.

El estudio realizado, además de clarificar el uso con sentido físico de todo el Cálculo diferencial, nos ha llevado a concluir, de un modo fundado, que una comprensión adecuada del concepto de diferencial en el campo de la Física supondría:

- *Saber cuándo y por qué se hace necesario su uso*. En concreto, saber que es necesario recurrir a la diferencial cuando queremos hallar el Ä*y* producido en un Ä*x*, en situaciones no lineales.

- *Conocer la estrategia que utiliza el Cálculo para resolver ese problema* y comprender el sentido de los distintos pasos que se recorren. En concreto:

  - Saber explicar con precisión y sentido físico el significado de las expresiones diferenciales.
  - Conocer y justificar la relación que existe entre la diferencial (dy) y la derivada (y'): $y'=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$
  - Conocer el significado de la integral y saber justificar el denominado Teorema Fundamental
  - Utilizar con sentido esa estrategia en situaciones y problemas en los que se domine el contenido físico de los mismos.

- *Ser consciente de la naturaleza hipotética*, tentativa, en casi todas las situaciones físicas, *de la expresión diferencial de partida*, y saber que la validez de esa hipótesis no puede ser contrastada directamente sino a través del resultado al que conduce.

- *Valorar positivamente el papel de la diferencial en el aprendizaje de la Física*. Este componente axiológico debería ser una consecuencia natural cuando se comprende el papel crucial que juega la diferencial en el tratamiento de situaciones físicas de interés.

Capítulo 3

ENUNCIADO Y FUNDAMENTACIÓN DE LA PRIMERA HIPÓTESIS.

3.1. FORMULACIÓN DE LA PRIMERA HIPÓTESIS

En el capítulo 2 se ha visto la necesidad de hacer uso del Cálculo diferencial para abordar situaciones físicas con un mínimo de complejidad, y la importancia de la diferencial para dotar de significado a los conceptos y procedimientos básicos del Cálculo diferencial. Puede afirmarse entonces que es necesaria una comprensión significativa de la diferencial para poder comprender *de verdad* los conocimientos físicos que se desarrollan más allá de la enseñanza elemental de la Física, es decir, si se quiere que sean adquiridos de un modo funcional de manera que puedan ser utilizados para enfrentarse a situaciones novedosas.

Al ser el concepto de diferencial un concepto alejado del interés y experiencia espontáneas de los alumnos, no tendría sentido dedicar un estudio únicamente dirigido a analizar cómo ellos lo entienden y utilizan. Resulta evidente que no se trata de un concepto como la fuerza, el calor, la energía o la luz, en los que la influencia extraescolar (lenguaje, sensaciones y experiencias cotidianas...) da lugar a concepciones espontáneas que interfieren con el aprendizaje escolar y que hace que los estudios sobre la comprensión de los alumnos de dichos conceptos tengan sentido en sí mismos.

Desde nuestro punto de vista parece lógico suponer que las posibles deficiencias en la comprensión de la diferencial por los alumnos tienen su origen en el ámbito escolar y que, por tanto, dichas deficiencias constituirán un indicador de las de su enseñanza, es decir, podrán ser consideradas como un reflejo de aquello que libros y profesores saben y dicen (Artigue y Viennot, 1987). La hipótesis, pues, desde la que se va a realizar el análisis a lo largo de este trabajo, por las razones que se desarrollarán a continuación, afirma que:

> ***la enseñanza habitual del concepto de diferencial (introducción y utilización del mismo) adolece de varias carencias que afectan a su comprensión por los alumnos en el contexto de la Física, generando actitudes negativas hacia la Física y su aprendizaje.***

Las deficiencias que se presuponen en esta hipótesis no se refieren al desconocimiento de la concepción de Fréchet –que, como se ha visto, es la que ofrece una mayor potencia, sentido físico y claridad conceptual-, sino que se refieren a todos y cada uno de los indicadores de una adecuada comprensión que han sido formulados en el capítulo anterior (Cuadro 2.II, p. 27).

3.2. JUSTIFICACIÓN DE LA PRIMERA HIPÓTESIS

La información recogida en el aula, en los libros de texto y en intercambios con compañeros, primero como estudiantes y como docentes más tarde, nos llevan a pensar en la ausencia casi generalizada de los indicadores mencionados de una adecuada comprensión de la diferencial y su uso en el campo de la Física.

La reflexión sobre esta experiencia acumulada, a la luz del estudio exhaustivo que hemos presentado en el capítulo anterior, nos conduce a creer que los estudiantes adquieren una sensación de comprensión del Cálculo diferencial basada en la idea intuitiva, aparentemente correcta, de que la suma de infinitos trozos infinitamente pequeños dará como resultado el incremento exacto. Sin embargo, ya hemos mostrado que únicamente se producirá el resultado exacto si y sólo si esos términos infinitesimales corresponden a estimaciones lineales que, además, son estimaciones tangentes.

Nuestra experiencia docente nos permite intuir que en la enseñanza habitual se ignora que la diferencial es una estimación lineal, que además debe ser la estimación lineal tangente, y que tiene carácter hipotético. La concepción habitual, basada en la creencia errónea antes mencionada, identifica a la diferencial con un simple incremento infinitesimal, y se utiliza como una certeza con el convencimiento de que sea cual sea la estimación, cuando se hace muy... muy pequeña, consigue anular el error.

Pero no se trata sólo de una impresión personal: distintos trabajos de investigación reconocen que tanto la enseñanza del Cálculo diferencial como lo que aprenden los estudiantes resulta claramente insuficiente, y que el hecho de tratarse de un contenido de otra asignatura que se utiliza en las clases de Física dificulta aún más un uso del mismo con comprensión.

En los siguientes apartados se presentarán las conclusiones de distintos trabajos referidos a la insuficiencia de la enseñanza del Cálculo, a su aprendizaje deficiente y a los problemas de transferencia de una asignatura a otra, corroborando nuestra experiencia personal como docentes, y justificando así nuestra primera hipótesis. Se trata de trabajos realizados en diferentes países y en distintos niveles, lo que viene a reforzar la generalidad de la hipótesis formulada.

3.2.1. La enseñanza del Cálculo diferencial parece ser inadecuada

Durante la última década ha venido denunciándose, a través de trabajos publicados en distintas revistas especializadas, la falta de conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes de ciencias e ingeniería tanto en lo que se refiere a destrezas matemáticas básicas como a la matematización de situaciones (Aghadiuno, 1992; Bisquert *et al.*, 1990; Breitenberger, 1992; Unesco, 1975*b*). En concreto, muchos trabajos han criticado la baja calidad de la enseñanza del Cálculo, caracterizada por un reduccionismo que se centra casi exclusivamente en aspectos algorítmicos, mecánicos y repetitivos con un claro desprecio hacia los aspectos más comprensivos y conceptuales (Artigue y Viennot, 1987; Ferrini-Mundy y Gaudard, 1992; Ferrini-Mundy y Geuther, 1991; López, 1991; Orton, 1983 *a* y *b*; Schneider, 1991; Thompson, 1994; Thompson y Thompson, 1994). Se alcanza así, a lo sumo, una "comprensión instrumental", válida para reproducir rutinas manipulativas, pero insuficiente para resolver problemas de aplicación si no va acompañada de un conocimiento conceptual (White y Mitchelmore, 1996).

Los *Principles and Standards for School Mathematics* destacan la importancia de la comprensión conceptual para crear personas competentes, para facilitar aprendizajes posteriores y poder aplicar los conocimientos en situaciones novedosas. Al mismo tiempo, analizan críticamente la enseñanza habitual: "Desgraciadamente el aprendizaje de las matemáticas *sin* comprensión ha sido durante mucho tiempo el resultado de la instrucción matemática (...), lo que ha sido objeto de discusión e investigación al menos desde los años 30. En el siglo XXI, todos los estudiantes deben tener expectativas de comprender y ser capaces de aplicar las matemáticas" (NCTM, 2000, p. 20).

Este tipo de enseñanza, de marcado carácter procedimental, podría estar en el origen del claro rechazo que muestran los estudiantes hacia el aprendizaje del Cálculo: en Estados Unidos, sólo el 15% de los cursos de Cálculo en Secundaria corresponden al nivel avanzado -a pesar de las recomendaciones del *National Council of Teachers of Mathematics* sobre el particular- y desciende fuertemente el número de alumnos que se matriculan en esta asignatura en la universidad; junto al rechazo, existe también un alto fracaso: sólo el 46% de los estudiantes matriculados en Cálculo I en la universidad consiguieron una calificación D o superior, lo cual supone una proporción de fracaso alarmantemente alta (Ferrini-Mundy y Gaudard, 1992; Jhonson, 1995). Esta situación ha llevado a muchos investigadores a buscar la mejora de la enseñanza del Cálculo, convencidos incluso de que tal mejora "tendrá impacto en la mejora de la capacidad crítica de la nación" (Conley *et al.*, 1992), y ha abierto un interesante debate en la comunidad científica en torno al llamado "movimiento de reforma del Cálculo", en el que se discute sobre el papel del rigor y la abstracción, de las demostraciones, de los problemas prácticos... y que ya se ha concretado en la elaboración de cursos y materiales alternativos por la Universidad de Harvard (Jhonson, 1995; Kleinfeld, 1996; Knisley, 1997; Ostebee y Zorn, 1997; Swann, 1997; Tucker, 1997).

Es preciso, no obstante, salir al paso de una mala interpretación: no se trata de poner en cuestión la importancia del dominio de algoritmos relacionados con el Cálculo diferencial, sino el hecho de que esto constituya el único objetivo de su enseñanza (Cajaraville, 1991). El trabajo de Nagy *et al.* (1991) con varios profesores de Matemáticas aporta datos concretos para mostrar que durante las sesiones dedicadas al estudio del Cálculo existe un claro predominio de la categoría de: "Técnicas", tanto en las actividades realizadas como en la puntuación de los exámenes, en detrimento de otras categorías relacionadas con aspectos de comprensión. Se trata, en cambio, no sólo de saber técnicas sino de conocer el significado de los conceptos, cuándo y por qué deben usarlos, etc. Kopel y Schramm (1990) resumen esta polémica formulando las siguientes preguntas: "¿Cómo, en un nivel elemental, podemos ir más allá de realizar cálculos en un ejemplo tras otro para aprender la diferenciación? ¿Podemos estudiar lo que la diferenciación **es** y no sólo **cómo** funciona?"

A veces se argumenta, en defensa de la situación denunciada, que un primer acercamiento al Cálculo a través del estudio y aplicación de técnicas debe ser considerada como una fase inicial que facilitaría después un aprendizaje con mayor comprensión. Sin embargo, las conclusiones del trabajo realizado por Ferrini-Mundy y Gaudard (1992) niegan esta posibilidad: la formación recibida en Cálculo durante la Secundaria -dedicada básicamente al entrenamiento en técnicas-, ya sea esta nula o de un año de nivel avanzado, tiene una escasa influencia en el rendimiento de los alumnos durante el primer año de universidad en esa misma asignatura; en concreto, aparece una leve diferencia durante el primer cuatrimestre en habilidades procedimentales, pero estas diferencias desaparecen durante el segundo cuatrimestre; los autores del trabajo llegan a afirmar que el entrenamiento intensivo en "técnicas" durante la Secundaria predispone a estos alumnos a fijarse más en los cursos siguientes en esos mismos aspectos siendo menos receptivos hacia los aspectos conceptuales y de comprensión, mientras que los estudiantes sin este *vicio* pueden tener una actitud menos sesgada.

El tipo de enseñanza del Cálculo que hasta aquí se ha recogido y criticado es una clara consecuencia de un modelo de enseñanza más general dominante en las aulas. El modelo de transmisión verbal de conocimientos presupone que es posible transmitir significados ya elaborados: una explicación clara y bien presentada por el profesor debería producir, junto con los clásicos ejercicios y experimentos, una comprensión significativa de los conceptos por parte de los alumnos. Así, se dan las definiciones y a continuación se repite un ejercicio tras otro con el objetivo de aplicar los conceptos definidos y llegar a comprenderlos, sin haber dado opción siquiera a tomar conciencia del problema que está en el origen de la invención de los conocimientos que se dan ya hechos.

Sin embargo, los resultados obtenidos al comprobar la comprensión de los conceptos considerados esenciales en Física han puesto en evidencia serias deficiencias en el modelo: la mayor parte de los conceptos no son comprendidos de modo significativo por los alumnos, pero no sólo por aquellos que suspenden, sino incluso por los que obtienen calificaciones elevadas. En efecto, una de las líneas de investigación más fecundas que se ha desarrollado a lo largo de las últimas décadas en el campo de la didáctica de las ciencias, impulsada por trabajos pioneros como el de Viennot (1976), ha sido la realizada en torno al estudio de los graves errores conceptuales cometidos por los alumnos de cualquier nivel, como lo atestigua la abundante bibliografía existente (Osborne y Wittrock, 1983; Carrascosa, 1985; Driver, 1986; Hierrezuelo y Montero, 1988).

Este modelo de enseñanza por transmisión-recepción de conocimientos es todavía el más extendido en la enseñanza de la Física y la Química, lo que viene refrendado por los resultados de investigaciones recientes relativas al modo en que se enseña a resolver problemas (Garret *et al.*, 1990; Gil, Mtnez. Torregrosa y Senent, 1988), la manera en que se realizan los trabajos prácticos (Gil y Payá, 1988; Payá, 1991), la forma en que se introducen los conceptos (Gil y Carrascosa, 1985) y hasta la propia evaluación (Alonso, Gil y Mtnez. Torregrosa, 1992 *a* y *b*).

La pervivencia de este modelo didáctico viene apoyada por una *formación docente ambiental*, adquirida inconscientemente por cada profesor cuando fue alumno. Así, la concepción del Cálculo diferencial como un instrumento para conseguir resultados de forma mecánica aunque no se comprendan bien los procedimientos empleados, ha podido ser adquirida acríticamente a través de ese período de formación escapando a una reflexión seria. Por ello, algunos autores sugieren que el cambio de orientación en la enseñanza del Cálculo pasa por investigar los esquemas de los propios profesores y la manera de cambiarlos (Thompson y Thompson, 1996).

3.2.2. El aprendizaje de los estudiantes sobre el Cálculo parece tener deficiencias

Toda concepción y estrategia de enseñanza debe encontrar su reflejo en lo que verdaderamente aprenden los estudiantes. Es por ello que el modelo de enseñanza habitual, y más concretamente su plasmación en la enseñanza del Cálculo y su uso en la Física, debe reflejarse en el aprendizaje de los alumnos y en su capacidad para hacer uso del Cálculo diferencial: la experiencia docente diaria revela las dificultades de los alumnos para seguir o elaborar los razonamientos en los que intervienen las nociones diferenciales así como la falta de preguntas explícitas de los alumnos que muestren su interés por superar tales dificultades.

Esta experiencia viene apoyada por las conclusiones de distintos trabajos que muestran claras deficiencias entre los estudiantes, e incluso entre los profesores, en relación con la comprensión de las ideas fundamentales del Cálculo (Azcárate, 1990; Breitenberger, 1992; Ferrini-Mundy y Gaudard, 1992; Ferrini-Mundy y Geuther, 1991; Orton, 1983 *a* y *b*) y, más concretamente, en relación con el concepto de diferencial (Alibert *et al.*, 1987; Artigue y Viennot, 1987). Otros trabajos revelan la existencia de otras dificultades relacionadas con aspectos imprescindibles para una buena comprensión del Cálculo diferencial: dificultades de tipo conceptual tales como los conceptos de variable, función, límite e infinito (Cottrill *et al.*, 1996; Espinoza, 1995; Lauten *et al.*, 1994; Moreno y Waldegg, 1991; Orton, 1983 *a* y *b*; Sánchez y Contreras, 1998; Turégano, 1998; White y Mitchelmore, 1996; Williams, 1991); dificultades de tipo gráfico y manipulativo (Aspinwall *et al.*, 1997; Calvo, 1998; Orton, 1983 *a* y *b*); o dificultades relacionadas con el tipo de lenguaje usado durante las explicaciones (Thompson y Thompson, 1994). Cabe señalar, como situación extrema, que incluso los mismos trabajos de investigación dedicados a analizar deficiencias en la comprensión del Cálculo diferencial, incurren en errores como negar cualquier significado a los términos diferenciales, aduciendo que se trata de meros símbolos, o como identificarlos con incrementos muy pequeños.

Algunos trabajos han ido más allá de la identificación de errores y dificultades que se derivan de una enseñanza como aplicación rutinaria de reglas, y han detectado la existencia de ideas entre los estudiantes que actúan como verdaderos obstáculos para el aprendizaje. A título de ejemplo:

a) la idea geométrica de tangente como línea que toca a la curva en un solo punto puede actuar como obstáculo en la construcción del concepto de velocidad instantánea (Ferrini-Mundy y Lauten, 1994; Speiser y Walter, 1994)

b) la percepción de un área generada por acumulación de líneas o de un sólido por acumulación de áreas es a menudo trasladada de forma inconsciente a los cálculos provocando una "heterogeneidad en las dimensiones" (suma de distancias resulta en una superficie, suma de superficies resulta en un volumen), y puede actuar como obstáculo para entender correctamente el concepto de integral como *sumas de Riemann* (Schneider, 1991; Turégano, 1998)

c) el rechazo de los llamados objetos mentales frente a los objetos reales y empíricos puede llevar a rechazar conceptos como el de velocidad instantánea frente al de velocidad media, o reducir aquél a una velocidad media que puede ser medida directamente (Schneider, 1992; Speiser y Walter, 1994)

d) la atracción por los símbolos a los que aplicar manipulaciones conocidas, junto a las dificultades para realizar abstracciones (White y Mitchelmore, 1996).

En los *Principles and Standards for School Mathematics* se destaca la debilidad del aprendizaje sin una verdadera comprensión: "los estudiantes que memorizan hechos o procedimientos sin comprensión, generalmente se sienten inseguros sobre cómo o cuándo usar lo que saben, y se trata de un aprendizaje muy frágil" (NCTM, 2000, p. 20).

Como consecuencia de esta falta de dominio y comprensión del uso de las Matemáticas en la Física, los estudiantes se ven obligados a usar destrezas que no comprenden, vaciando de sentido a las tareas que realizan; esto provoca una pérdida de confianza en sus capacidades para aprender ciencias, un aumento de la percepción de dificultad de la asignatura de Física, y un claro rechazo hacia la misma (Martin y Coleman, 1994; Monk, 1994; Rice-Evans, 1994). Aghadiuno (1992) destaca que esta inseguridad de los alumnos cuando discuten en términos matemáticos llega a producir un preocupante estado de "ansiedad". En sentido positivo, los resultados obtenidos por Rutter (1994), sin ser concluyentes, parecen mostrar que una mejor formación en Matemáticas produce una mejor formación en Física.

Estas dificultades no sólo son reconocidas por los profesores y puestas de manifiesto a través de trabajos como los que se recogen más arriba, sino que los propios estudiantes coinciden al señalar las dificultades matemáticas como una de las causas más importantes para explicar los bajos resultados obtenidos en la asignatura de Física o la falta de atracción hacia la misma (Lavaly, 1990).

3.2.3. Compartir conocimientos entre dos disciplinas, o transferir de una a otra, genera nuevas dificultades

La justificación de nuestra primera hipótesis no se apoya solamente en la constatación de una concepción y enseñanza del Cálculo reducida a la transmisión y aplicación inmediata de reglas, ni en la comprobada existencia de graves errores y obstáculos que manifiestan alumnos y profesores. El mismo hecho de tratarse de un conjunto de conceptos utilizados en dos disciplinas distintas, con diferencias de visión y finalidad, dará lugar, en nuestra opinión, a la aparición de conflictos y lagunas, distintas interpretaciones, que no facilitan un buen uso del Cálculo diferencial en la Física.

En efecto, la breve descripción histórica realizada en el primer capítulo sobre el significado del concepto de diferencial no es más que una muestra de las relaciones y vínculos históricos entre Física y Matemáticas, lo cual tiene a su vez un claro reflejo en la enseñanza de ambas asignaturas, tal como es planteado en el trabajo de Aghadiuno (1992). Así, aunque el origen de las Matemáticas se encuentra ligado a problemas y necesidades cotidianas, los griegos consiguieron transformarla en un sistema deductivo no basado en procedimientos empíricos: como resultado Ciencia y Matemáticas pasan a ocuparse de mundos distintos -mundo empírico *versus* mundo de las ideas y teorías-, aunque no independientes pues, con Galileo como figura paradigmática, las ciencias acaban *matematizándose*, reivindicando su derecho a idealizar y manipular matemáticamente (Mathews, 1994*b*). Sin embargo, de acuerdo con Aghadiuno (1992), la aportación de Newton en el siglo XVII supone un punto crítico en esta relación entre Física y Matemáticas: con sus trabajos sobre el Cálculo diferencial llega a producirse una “colonización” (*sic*) de la Física sobre las Matemáticas, donde se trabajan los problemas de los “colonizadores” desde el lenguaje de los *colonizadores*, de tal manera que las Matemáticas pasan a ser sólo las

Matemáticas para físicos. Ya en el siglo XIX, con Gauss y Cauchy, se producirá la “descolonización”, la vuelta a la “cultura aborigen”.

Desde esta perspectiva histórica, se ha criticado a la enseñanza actual de las Matemáticas afirmando que adolece de una visión desequilibrada, más imbuida de los aspectos abstractos del XIX, olvidada de sus orígenes (González, 1991). Frente a esto, se reivindica la cultura matemática del XVII frente a la cultura del XIX, una búsqueda de alternativas a la matemática de Cauchy que no sólo ofrezcan una mayor intuición sino que consigan destacar con mayor claridad las ideas esenciales: diferenciabilidad, aspecto funcional y lineal... (Burn, 1993; Cuenca, 1986; Khun, 1991). En este sentido, son reveladores algunos de los criterios recomendados en los *Principles and Standards for School Mathematics* para seleccionar ideas matemáticas importantes: su utilidad para representar y resolver problemas dentro y fuera de las matemáticas, o su potencia para modelar y predecir fenómenos de la vida real (NCTM, 2000).

Este devenir histórico permite entender la falta de conexión entre la enseñanza de la Física y las Matemáticas a pesar de que comparten en muchas ocasiones conceptos, ideas y técnicas comunes. Es frecuente que en la asignatura de Física se realice una introducción superficial y meramente formal de los conceptos básicos del Cálculo diferencial, con la única intención de que sepan aplicar reglas sencillas y *entender* el lenguaje cuando la situación lo requiera; por otro lado, el escaso contenido conceptual del Cálculo en la asignatura de Matemáticas está dominado por un lenguaje abstracto bastante alejado de la intuición y de los problemas físicos. En estas condiciones, no es de extrañar que la única transferencia real de las enseñanzas de una asignatura a la otra se limite al uso de técnicas sin sentido (Monk, 1994), y que no reconozcan el concepto de derivada, diferencial o integral de una asignatura a otra: con frecuencia los alumnos sólo al final y con relativa sorpresa, cuando ya el lenguaje les resulta familiar, identifican todo el proceso que conduce al cálculo de la velocidad instantánea con *la derivada de Matemáticas*, o todo el proceso que conduce al cálculo del trabajo realizado por una fuerza variable con *la integral de Matemáticas*. Es comprensible entonces que conceptos como el de diferencial gocen de un estatus, papel y significado completamente distinto en cada disciplina y, por tanto, en su enseñanza (Artigue, 1986; Artigue y Viennot, 1987).

Esta falta de conexión entre la enseñanza de ambas asignaturas agrava los lógicos problemas de transferencia de una a otra cuando comparten conceptos o teorías. Foros como el de la Unesco o el de la sección editorial del *Journal of Research in Science Teaching* se hacen eco de estos problemas y recomiendan hacer esfuerzos por coordinar el currículo y la instrucción de las asignaturas de Ciencias y Matemáticas así como promover la investigación relativa al aprendizaje de las Matemáticas y los conceptos físicos (Unesco, 1975*b*; Good, 1991). Así, *Physics Education* dedicó en 1994 un número completo a tratar el tema, reconociendo que "el lugar de las matemáticas en la física parece ser un tema perenne de discusión entre profesores de física de todos los niveles" (Parker, 1994). Pero no basta con una simple coordinación de programas, sino que es preciso un cambio en la mentalidad del profesor, que sea capaz de poner en duda su propia concepción de las Matemáticas (Confrey y Smith, 1994; Ferrini-Mundy y Geuther, 1991; Mura, 1993 y 1995).

Por último, debe tenerse en cuenta que el concepto específico de diferencial ha sufrido una evolución de manera que el establecimiento de un significado que aúna precisión y sentido físico se ha realizado en épocas recientes, asignándole a partir de entonces un papel fundamental en la estructura del Cálculo. Cabe esperar que estas aportaciones aún no hayan sido recogidas en los programas y materiales de enseñanza, y menos aún en los de Física, tal como parecen mostrar los primeros estudios (Alibert *et al.*, 1987; Artigue, 1986; Menigaux, 1989).

Capítulo 4

DISEÑO EXPERIMENTAL PARA LA CONTRASTACIÓN DE LA PRIMERA HIPÓTESIS.

En el capítulo 3 se han expuesto las razones por las que creemos que la enseñanza y uso habitual del concepto de diferencial adolece de serias carencias que afectan negativamente a su comprensión por parte de los alumnos en el contexto de la Física, afirmación que constituye el contenido de nuestra primera hipótesis. En este capítulo presentaremos la operativización de la hipótesis en un conjunto de consecuencias directamente contrastables, y los instrumentos concretos que utilizaremos para su contrastación.

4.1. OPERATIVIZACIÓN DE LA HIPÓTESIS Y VISIÓN GENERAL DEL DISEÑO

Antes de presentar una panorámica general del diseño experimental queremos advertir contra el error, en el que en ocasiones se ha incurrido, de confundir la investigación didáctica con trabajos de tipo sociológico: en la investigación educativa lo más relevante no es, en general, el tamaño de la muestra sino la riqueza del diseño y la medida en que es capaz de explorar diversas facetas e implicaciones de la hipótesis. Nuestra intención no es, pues, obtener resultados representativos de toda una población; por el contrario, pretendemos abordar problemas concretos con profundidad sin recurrir necesariamente a muestras muy amplias, pero sí utilizando en cambio distintas formas de contrastación, con el objeto de mostrar la coherencia de los resultados obtenidos. Por otra parte, en educación interesan en general las grandes diferencias, lo que evidentemente reduce las exigencias de tamaño de las muestras para poder considerar que dichas diferencias sean estadísticamente significativas (Hayman 1981; Wilson *et al.*, 1986). Este es el caso, por ejemplo, de la tesis doctoral de M. Hewson, basada en el trabajo realizado con unos 40 alumnos (Hewson y Hewson, 1984). Por supuesto, ello plantea el problema de la generabilidad que, como es lógico, hay que buscar fundamentalmente en la replicación de las investigaciones realizadas por otros autores.

Este ha sido el planteamiento utilizado para el presente trabajo. No obstante, hemos de indicar que dada la escasa existencia de estudios sobre este tema dentro y fuera de nuestro país, en la primera parte -dedicada al diagnóstico o identificación de deficiencias- hemos intentado afianzar al máximo los resultados obtenidos utilizando diversas muestras, lo que ha supuesto implicar aproximadamente a un total de 750 estudiantes, 200 profesores en activo de Secundaria y varias decenas de libros de texto. Sin embargo, la característica general del diseño sigue siendo la multiplicidad de abordes con objeto de mostrar la coherencia de los resultados obtenidos y contribuir así a aumentar su validez. De este modo hemos procedido -como se verá a lo largo del diseño- a la contrastación de un total de veinte consecuencias de la primera hipótesis.

La validación de nuestra hipótesis supone confirmar que los indicadores de una adecuada comprensión del uso de la diferencial en el contexto físico (ver cuadro 2.II, cap. 2, p. 81) están ausentes en la enseñanza y aprendizaje habitual de la Física, más concretamente: en la forma de actuar y en lo que saben y dicen los profesores y estudiantes. Además, si se tiene en cuenta el uso generalizado del libro de texto y su notable influencia en lo que realmente ocurre en las aulas, las deficiencias en la enseñanza deben manifestarse también en los libros de texto. Así pues, la ausencia de los citados indicadores en la enseñanza y aprendizaje habitual de la Física debería reflejarse en: **a) los libros de texto**, **b) los profesores** y, **c) los estudiantes**, lo que da lugar a tres claras derivaciones de la hipótesis y constituye un primer paso en su operativización.

El siguiente paso consiste en analizar, para cada derivación, los indicadores de una adecuada comprensión y concretar consecuencias directamente contrastables que permitan valorar su existencia. Con la intención de proporcionar una visión de conjunto más clara, en las tablas 4.I y 4.II se presentan todas esas consecuencias, relacionadas cada una de ellas con un indicador concreto y con el instrumento experimental que será descrito en las páginas siguientes.

Como se observará, el segundo indicador da lugar a dos consecuencias en cada derivación, mientras otros indicadores no dan lugar a ninguna consecuencia. Así, en la derivación referida a los libros de texto no aparece una consecuencia sobre la actitud que provoca, por razones obvias, ni tampoco aparece una consecuencia sobre el uso con sentido de la estrategia del Cálculo, algo que será difícil medir directamente al analizar el texto y, sin embargo, es más sencillo de contrastar en las restantes derivaciones. Del mismo modo, en las derivaciones referidas a profesores y estudiantes no aparece ninguna consecuencia sobre la naturaleza hipotética de la diferencial, pues lo consideramos muy alejado de las concepciones habituales y bastará con confirmar su ausencia en los libros de texto. Con todo ello, hemos obtenido un total de veinte consecuencias directamente contrastables (seis referidas a libros de texto, siete a profesores y otras siete a estudiantes).

TABLA 4.I. Consecuencias directamente contrastables de la derivación de la primera hipótesis referida a los LIBROS DE TEXTO

Una adecuada comprensión y uso de la diferencial supondría...	**CONSECUENCIAS: Sin embargo, en los libros de texto....**	**INSTRUMENTOS**
Saber cuándo y por qué se hace necesario su uso	**L1.** La atención prestada a la justificación del uso de la diferencial es muy escasa y limitada, si acaso, a las primeras ocasiones, aunque se trate de un nivel en el que se acaba de introducir el concepto de diferencial. En todo caso, no se hace una justificación correcta ni cuando es usada por primera vez ni en las ocasiones sucesivas.	Red de análisis nº 1, apartado A Red de análisis nº 2
Saber explicar con precisión y sentido físico el significado de las expresiones diferenciales, reconocer que la diferencial puede tomar valores numéricos e interpretar el significado de los mismos.	**L2.** No se asigna significado explícito propio a la diferencial, tan sólo se le identifica con un incremento *muy pequeño*. En todo caso, no se conceptualiza d*y* como una estimación del Ä*y*. **L3.** No se asignan valores numéricos concretos a la diferencial, y si se hace en alguna ocasión serán interpretados como incrementos *muy pequeños*.	Red de análisis nº 1, apartado B
Conocer y justificar la relación que existe entre la diferencial y la derivada: *y'*=d*y*/d*x*, y aceptar sin ambigüedad los razonamientos en los que se utiliza esa relación.	**L4.** Se trata de forma ambigua e inconsistente el *cociente diferencial.* En un mismo libro se interpreta la expresión *dy/dx* de distintas maneras, sin establecer relación alguna entre ellas: - como un operador (d/d*x*) que se aplica a la función (*y*) - como un cociente de dos términos (d*y*, d*x*) que se despejan y se someten por separado a cualquier operación matemática. - como un término –*el último*- de la sucesión de cocientes: Ä*y*/Ä*x*, resultando el numerador y el denominador dos incrementos infinitamente pequeños.	Red de análisis nº 1, apartado C

TABLA 4.I (continuación). Consecuencias directamente contrastables de la derivación de la primera hipótesis referida a los LIBROS DE TEXTO

Una adecuada comprensión y uso de la diferencial supondría...	**CONSECUENCIAS: Sin embargo, en los libros de texto....**	**INSTRUMENTOS**
Conocer el significado de la integral y saber justificar el denominado Teorema Fundamental, es decir, por qué la integral definida requiere el cálculo de *antiderivadas* o funciones primitivas	**L5.** Aunque se usa el concepto de integral como *sumas de Riemann*, y no simplemente como *primitivas*, no se explica -aunque sea con algún breve comentario o argumento- por qué el cálculo de esas sumas se realiza mediante el cálculo de la *antiderivada*. En algunos casos, para intentar justificar que d*y*=Ä*y*, se utilizará la idea errónea de que la suma de incrementos *muy pequeños* acaba conduciendo siempre al incremento *macroscópico* buscado.	Red de análisis nº 1, apartado D
Ser consciente de la naturaleza hipotética, tentativa, en casi todas las situaciones físicas, de la expresión diferencial de partida, y saber que la validez de esa hipótesis no puede ser contrastada directamente sino a través del resultado al que conduce	**L6.** No se menciona la naturaleza hipotética de la diferencial, ni siquiera se menciona la idea de que sólo existe una expresión diferencial correcta en cada caso. De forma implícita, se considera que cualquier incremento, con tal de que sea *muy pequeño*, es una buena expresión diferencial.	Red de análisis nº 1, apartado E

TABLA 4.II. Consecuencias directamente contrastables de las derivaciones de la primera hipótesis referidas a los PROFESORES y ESTUDIANTES

Una adecuada comprensión y uso de la diferencial supondría...	**CONSECUENCIAS: Sin embargo, profesores y estudiantes....**	**INSTRUMENTOS**
Saber cuándo y por qué se hace necesario su uso	**P1–E1.** Escriben directamente expresiones diferenciales cuando resuelven problemas, sin justificar su uso, y aplican mecánicamente el Cálculo incluso en situaciones en las que no es necesario hacerlo. Tampoco saben identificar, ante situaciones físicas concretas, la causa que obliga a pasar de una expresión incremental a la expresión diferencial.	Cuestiones: C1ep, C5e Problemas
Saber explicar con precisión y sentido físico el significado de las expresiones diferenciales, reconocer que la diferencial puede tomar valores numéricos e interpretar el significado de los mismos.	**P2-E2.** No explican el significado de las expresiones diferenciales que ellos mismo escriben cuando resuelven problemas de Física, y cuando se les pregunta directamente por el significado de expresiones diferenciales no le asignan un significado específico, tan sólo en ocasiones las identifican con un incremento *muy pequeño*, sin mencionar la idea de estimación. **P3-E3.** Tienen dificultades para calcular valores numéricos concretos de la diferencial, e incluso para admitir distintos valores numéricos. No saben explicar el significado de algún valor numérico concreto de la diferencial.	Cuestiones: C1ep, C3ep, C5p, C7e Problemas Cuestiones: C2ep, C3ep
Conocer y justificar la relación que existe entre la diferencial y la derivada: $y'=dy/dx$, y aceptar sin ambigüedad los razonamientos en los que se utiliza esa relación.	**P4-E4.** Aunque han usado con frecuencia razonamientos en los que interviene la idea de la derivada como cociente de diferenciales, tienen dificultades para reconocer verbalmente esta relación e incluso para aplicarla en el cálculo de diferenciales a partir de un valor conocido de la derivada.	Cuestiones: C3ep, C6e

TABLA 4.II (continuación). Consecuencias directamente contrastables de la primera hipótesis referidas a los PROFESORES y ESTUDIANTES

Una adecuada comprensión y uso de la diferencial supondría...	**CONSECUENCIAS: Sin embargo, profesores y estudiantes....**	**INSTRUMENTOS**
Conocer el significado de la integral y saber justificar el denominado Teorema Fundamental, es decir, por qué la integral definida requiere el cálculo de *antiderivadas* o funciones primitivas	**P5-E5.** Aunque conocen el concepto de integral como *sumas de Riemann*, cuando lo usan se limitan a su mecánica de cálculo, evitando así justificar por qué el cálculo de las *sumas* se realiza mediante *antiderivadas*. Cuando se les pide directamente esa justificación, no aportan ningún argumento, tan sólo enuncian supuestas *evidencias*.	Cuestión C4ep Problemas
Utilizar con sentido la estrategia del Cálculo en situaciones y problemas en los que domine el contenido físico de los mismos	**P6-E6.** El uso del Cálculo en la Física se limita a la aplicación mecánica de reglas, lo que provoca dificultades para utilizarlo en situaciones novedosas, y da lugar a unas bajas expectativas sobre la posibilidad de que el Cálculo sea usado con sentido.	Cuestiones: C6p, C7p, C8e Problemas
Valorar positivamente el papel de la diferencial en el aprendizaje de la Física	**P7-E7.** Perciben el uso del Cálculo diferencial como un obstáculo más que como una ayuda, y lo identifican como una fuente de actitudes negativas hacia la Física.	Cuestiones: C6p, C7p, C8e

En los siguientes apartados presentaremos los instrumentos experimentales que hemos preparado para contrastar cada una de esas consecuencias. Para proporcionar una visión de conjunto y facilitar la localización, en el siguiente cuadro se presenta un índice de esos instrumentos.

Cuadro 4.I. Instrumentos experimentales elaborados para la contrastación de la primera hipótesis

Red de análisis de textos nº 1	p. 111
Red de análisis de textos nº 2	p. 119
Cuestiones abiertas y cerradas para estudiantes y profesores	p. 126
Problemas para estudiantes y profesores	p. 146
Problema *ejemplificador* en situación de enseñanza para profesores	p. 152
Entrevista a estudiantes y profesores en formación	p. 154

4.2. INSTRUMENTOS PARA COMPROBAR LA AUSENCIA EN LOS LIBROS DE TEXTO DE LOS INDICADORES DE UNA ADECUADA COMPRENSIÓN DE LA DIFERENCIAL EN LA FÍSICA

La investigación didáctica ha señalado en repetidas ocasiones que seguramente el libro de texto es el más importante de los recursos que usan los profesores en sus clases (Bullejos, 1983; Otero, 1997). Tanto es así que Del Carmen y Jiménez (1997) afirman que “la importancia que el profesorado les asigna es muy grande, y puede decirse que una de las decisiones más importantes que toman muchas personas cada curso o cada vez que cambia el plan de estudios, es la de escoger un libro de texto”.

Esta influencia de los libros de texto en la enseñanza habitual, nos ha aconsejado estudiarlos para poner de relieve que la manera en que se introduce y se usa el concepto de diferencial no favorece una comprensión adecuada.

Se analizarán textos de Física y Química desde 3º BUP hasta primer curso universitario, por ser aquellos que se encargan de la introducción y primeras ocasiones de uso de la diferencial en las clases de Física. Hemos pretendido que la muestra de libros a analizar cubra ampliamente los distintos niveles, pero también que sea representativa de manera que incluya los textos usados con mayor frecuencia en las aulas.

Para analizar en qué medida los textos de Física -incluyendo sus apéndices matemáticos, si los hubiera- presentan las deficiencias enunciadas hemos elaborado dos redes de análisis complementarias:

- La primera red pretende realizar un análisis global del texto, valorando si en alguna ocasión están presentes los indicadores de una adecuada comprensión de la diferencial.
- La segunda red pretende realizar un estudio más exhaustivo sobre la justificación de la diferencial en *momentos clave* del uso de expresiones diferenciales en el texto. Para ello, hemos seleccionado tres tópicos básicos de un curso de Física, representativos de cada uno de esos *momentos clave*, y que serán analizados en todos los textos.

Red de análisis de textos nº 1

La red (ver p. 112) consta de quince ítems en los que hay que contestar **SÍ** o **NO**. Los dos primeros ítems tratan de identificar qué textos usan la diferencial y de qué forma lo hacen: con sentido en sí misma, dentro de la derivada y/o dentro de la integral. Los trece ítems restantes están organizados en cinco bloques:

A) justificación del uso de la diferencial
B) significado asignado a la diferencial
C) relación que se establece entre diferencial y derivada
D) significado asignado a la integral y justificación del Teorema Fundamental
E) naturaleza hipotética de la diferencial

Cuadro 4. II. Red de análisis de textos nº 1

Datos identificativos del texto: Autor/es: ____ Título: ____ Curso: __________ Editorial: _________________________ Año ed. original: _____ Año ed. español: _____
1. ¿Utiliza en alguna ocasión la diferencial? .... SÍ - NO

2.	¿En qué contextos? - Dentro de la expresión de la derivada	SÍ - NO
	- Dentro de la expresión de la integral	SÍ - NO
	- Con sentido en sí misma	SÍ - NO
	A) Sobre la justificación del uso de la diferencial:	
3.	Cuando se usa la diferencial con sentido en sí misma, ¿en alguna ocasión se muestran las insuficiencias del cálculo ordinario?	SÍ - NO
4.	¿Es habitual en el texto justificar la necesidad de usar la diferencial?	SÍ - NO
	B) Sobre el significado de la diferencial:	
5.	¿Se asigna expresamente algún significado a la diferencial?	SÍ - NO
6.	¿Se afirma que d*f* es un Ä*f* muy pequeño o infinitamente pequeño?	SÍ - NO
7.	¿Se hace referencia en alguna ocasión al carácter lineal de d*f* respecto al Ä*x*?	SÍ - NO
8.	¿En alguna ocasión se asigna un valor numérico concreto a la diferencial?	SÍ - NO
9.	¿Se comenta en algún caso que d*f* puede tomar distintos valores numéricos?	SÍ - NO
	C) Sobre la relación de la diferencial con la derivada:	
10.	¿Se usa la concepción de la derivada como cociente diferencial?	SÍ - NO
11.	¿Se explica dicha concepción?	SÍ - NO
	D) Sobre el significado de la integral y la justificación del Teor. Ftal.:	
12.	¿Se usa la concepción de la integral como *sumas de Riemann*?	SÍ - NO
13.	¿Justifica que d*M* = Ä*M* (ó *M*) simplemente identificando d*M* con Ä*M* muy pequeños cuya suma da el Ä*M* (ó *M*) *macroscópico*?	SÍ - NO
14.	¿Se justifica, al menos intuitiva o geométricamente, el Teor. Fundamental?	SÍ - NO
	E) Sobre la naturaleza hipotética de la diferencial:	
15.	¿En alguna ocasión se refiere al carácter hipotético de la expresión diferencial?	SÍ - NO

Con la finalidad de poder contestar a las preguntas con la mayor precisión posible, hemos elaborado previamente los siguientes **criterios de valoración**, en los que se expresa qué buscamos en cada ítem y las situaciones posibles que podemos encontrar que serán indicadoras de una decisión en uno u otro sentido:

1. ¿Se utiliza la diferencial?

Buscaremos en el texto si, en alguna ocasión, escribe términos o expresiones diferenciales, sea en el contexto que sea.

2. ¿En qué contextos se utiliza?

Para especificar mejor en qué situación se usa la diferencial hemos distinguido tres contextos no excluyentes: a) cuando la usa dentro de la derivada, b) cuando la usa dentro de la integral, y c) cuando la usa con sentido en sí misma, ya sea como término diferencial independiente (como por ejemplo: "tomamos un desplazamiento diferencial d*r*") o dentro de una expresión diferencial (como por ejemplo: "el trabajo realizado en este caso será $dW=F\cdot dr$"). Nuestro máximo interés se centra en el contexto c), y las preguntas de los bloques A, B y E se refieren a esa situación.

3. Cuando se usa la diferencial con sentido en sí misma, ¿en alguna ocasión se muestran las insuficiencias del cálculo ordinario?

Tratamos de averiguar si se justifica la necesidad de hacer uso del concepto de diferencial. Lógicamente, esta justificación debería producirse al menos en la primera ocasión que hace uso de la misma; no obstante, en caso de no ser así analizaremos ocasiones sucesivas para encontrar alguna justificación. Admitiremos como justificación cualquier referencia a la existencia de una variación no uniforme de una magnitud acompañada de algún comentario que haga ver la insuficiencia del cálculo ordinario para abordar la situación o, en su defecto, nos bastará incluso con un comentario que haga ver cómo el Cálculo diferencial supera esta dificultad.

Por ejemplo, en el caso del concepto de trabajo, no se considerará justificación válida comentarios del tipo: *"se define el trabajo elemental realizado por una fuerza variable...", "tomando elementos diferenciales", "el trabajo realizado en un desplazamiento dr...", "si la fuerza no es constante, el trabajo realizado en un desplazamiento infinitesimal..."*; por el contrario, sí admitiremos como justificación válida comentarios similares al siguiente: *"si la fuerza no es constante, tomamos desplazamientos infinitamente pequeños en los* *cuales puede suponerse que la fuerza no varía y puede utilizarse entonces la expresión ya definida..."*.

Aunque, como ya hemos justificado en el primer capítulo de este trabajo, el último tipo de comentarios tampoco es consistente (por muy pequeño que sea el desplazamiento la fuerza nunca será constante), lo admitiremos como válido pues supone un intento de mostrar cómo la nueva expresión supera dificultades que aparecían con la expresión operativa del trabajo realizado por una fuerza constante.

4. ¿Es habitual en el texto justificar la necesidad de usar la diferencial?

Se trata de ver si, una vez justificado el uso de la diferencial con sentido en sí misma en una primera ocasión, se hace también en los distintos tópicos que siguen a continuación. Consideramos importante esta cuestión en los textos de Física, donde al tratarse de situaciones y magnitudes muy distintas, no puede considerarse suficiente la justificación realizada en un primer o único tópico.

Para responder a esta pregunta en un sentido o en otro, estudiaremos si justifica el uso de la diferencial (con el mismo criterio establecido en la pregunta anterior) en una serie de tópicos en los que es previsible que se utilice. Contestaremos afirmativamente cuando el número de veces en que sí se justifica sea mayor que el número de ocasiones en que no se hace.

Los tópicos seleccionados en que fijaremos nuestra atención han sido deducidos de la enumeración que a título de ejemplo se hizo en el capítulo 2 (pp. 79-80) y que corresponden a conceptos muy distintos. Estos han sido:

- La primera vez a lo largo de los temas de Cinemática o Dinámica en que se usa la diferencial sin que haya sido despejada directamente de una derivada. Por ejemplo: d*A* en la demostración de la *segunda ley de Kepler*, o *dv* en movimientos donde existe *fricción con un fluido*, o d*p* antes de escribir la fuerza como derivada del *momento lineal*.
- *Cálculo de momentos de inercia*. Si no existe, nos fijaremos en el cálculo de centros de masas.
- *Trabajo realizado por una fuerza*. Definición y cálculos concretos.
- *Gradiente de una función escalar*
- *Flujo de un campo vectorial*. En el caso general, o en un tipo de campo concreto: eléctrico, gravitatorio, o magnético.
- *Campos creados por distribuciones continuas* (de cargas, de masas, de corrientes)

- *Energía o potencial de un conductor o de un condensador cargado*
- *Fuerza magnética sobre corrientes*
- *Absorción de intensidad de una onda por un medio*
- *Ley de las desintegraciones radiactivas*

En aquellos textos en que no se traten todos los tópicos, completaremos el estudio con otros similares, si los hay.

Lógicamente, la respuesta a esta tercera pregunta quedará en blanco si la diferencial sólo se utiliza una vez a lo largo del texto, o si en la pregunta nº 2 la respuesta ha sido también en blanco.

5. ¿Se asigna expresamente algún significado a la diferencial?

Con este ítem deseamos comprobar en qué medida se da algún significado a la diferencial en alguno de los contextos especificados en el ítem 1. Realizaremos esta valoración analizando si en los comentarios que acompañan a las expresiones donde aparecen términos diferenciales se encuentra alguna frase en la que se asigne algún significado explícito, correcto o no, a la diferencial.

6. ¿Se afirma que d*f* es un Ä*f* muy pequeño o infinitamente pequeño?

Ya hemos advertido en los capítulos anteriores que la concepción de la diferencial como cantidad infinitesimal, siendo errónea, se mantuvo durante la primera etapa de nacimiento del Cálculo. Al ser un significado habitualmente utilizado en el contexto de la Física, hemos dedicado una pregunta específica para este significado particular.

7. ¿Se hace referencia en alguna ocasión al carácter lineal de d*f* respecto al Ä*x*?

Aún cuando esta referencia no se haga explícitamente, admitiremos que podría encontrarse implícita en comentarios del tipo: "d*f* es tan pequeño que permite suponer alguna magnitud como constante, que 'no le da tiempo a variar'". Sin embargo, esperamos que la fijación en el error de que d*f* es un Ä*f* infinitesimalmente pequeño impedirá que esta idea pueda aparecer por innecesaria ("es tan pequeño, que es innecesario suponer que 'algo' se considera constante"). Nuestra intención en este ítem es averiguar si el texto menciona esta idea en alguna ocasión, aunque sea de pasada.

8. ¿En alguna ocasión se asigna un valor numérico concreto a la diferencial?

Pretendemos averiguar si en algún lugar del texto se asigna un valor numérico concreto a la diferencial, sea cual sea ese valor. En este caso no basta con comentar que se trata de una cantidad infinitesimal, sino de asignar una cantidad numérica concreta.

9. ¿Se comenta en algún caso que d*f* puede tomar distintos valores numéricos?

Se trata de averiguar si los textos admiten que la diferencial tiene un carácter funcional, que puede tomar distintos valores según el valor que tomen las variables (x, Äx). Cuando en el texto se haga referencia a distintos valores numéricos posibles para la diferencial la respuesta será afirmativa (desfavorable para nuestra hipótesis), aunque no se mencione explícitamente el carácter funcional de la misma.

10. ¿Se usa la concepción de la derivada como cociente diferencial?

En general, en los textos de Física se escribe la derivada de una función como df/dx, pero esto podría interpretarse como una forma resumida de expresar "derivada de f respecto de x" de manera que no se hiciese una lectura como cociente de dos cantidades sino como un operador (d/dx) que se aplica a la función f, y que podría ser sustituido por otra notación como $f'(x)$ o y'. Pretendemos averiguar con esta pregunta cuál es la verdadera interpretación que hace de esa expresión a través de su manera de usarlo. En concreto, nos fijaremos si en la práctica utiliza la derivada como un cociente de términos diferenciales, por ejemplo: si despeja expresiones diferenciales del denominador pasando al numerador, si divide diferenciales y concluye en la derivada... independientemente de que haya justificado o no este proceder.

11. ¿Se explica la concepción de la derivada como cociente de diferenciales?

Se trata de averiguar ahora no ya el uso de la derivada como cociente diferencial, sino si existe algún comentario que explique que la nueva forma de expresar la derivada es un verdadero cociente, aunque luego pudiera darse el caso de que no lo utilice, e independientemente del significado que se le asigne a la diferencial. Con esta cuestión identificaremos textos que, cuando introduzcan la derivada, la escriban de inmediato como un cociente diferencial sin realizar el menor esfuerzo por interpretarlo. Esta falta de justificación y explicación de un proceso que, en general, luego se va a usar de manera reiterada, puede ser ilustrativo de un enfoque meramente operativista en el uso del Cálculo diferencial y de la actitud acrítica que se espera de los estudiantes.

12. ¿Se usa la concepción de la integral como *sumas de Riemann*?

En el ítem 2, en su segundo apartado, ya se habrá determinado si el texto utiliza la integral. Pretendemos ahora averiguar si la utiliza simplemente como operación inversa a la derivada o a la diferencial (por ejemplo, cuando quita la “d” de diferencial o el operador derivada simplemente comentando: “integrando...”), o si la introduce como *sumas de Riemann*.

Aunque solamente se realice un comentario en algunas líneas donde se haga ver que se puede pasar de la expresión diferencial al incremento mediante una suma... y se relacione ese proceso con la integración, daremos una contestación afirmativa al ítem (contraria a nuestra hipótesis), incluso aunque no se llegue a escribir ni utilizar ninguna integral.

13. ¿Justifica que $\int dM = ÄM$ (o *M*) simplemente identificando d*M* con Ä*M* muy pequeños cuya suma da el Ä*M* (o *M*) *macroscópico*?

Si introduce en alguna ocasión el concepto de integral como *sumas de Riemann*, estudiaremos si el único *argumento* para justificar que el límite de la suma de diferenciales sea igual al incremento consiste en la identificación de la diferencial con incrementos muy pequeños; como ya hemos explicado (cap. 2, pp. 66-68), este argumento es incorrecto y refuerza una idea errónea bastante extendida. Precisamente, para que el límite de la suma de diferenciales sea igual al incremento es necesario exigir que la estimación lineal sea tangente, es decir, que su pendiente coincida con la función derivada: dy/dx=y'.

14. ¿Se justifica, al menos intuitiva o geométricamente, el Teorema Fundamental del Cálculo?

Después de introducir el concepto de integral como *sumas de Riemann*, se resuelven las integrales planteadas mediante el cálculo de la *antiderivada* o *primitiva*, es decir, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo. Sin embargo, es muy posible que nunca se ofrezca una justificación que permita relacionar ese concepto de integral con la *antiderivación*. Aceptaremos como justificación, en contra de nuestra hipótesis, cualquier comentario, aunque sea gráfico o de carácter intuitivo, destinado a relacionar integración y derivación.

Cuando no introduce la integral como *sumas de Riemann* sino que se limita a calcular primitivas a partir de la función derivada, no podemos exigir que se argumente este teorema aunque también lo buscaremos en el texto.

15. ¿En alguna ocasión se hace referencia al carácter hipotético de la expresión diferencial?

Cuando la diferencial se deduce de la expresión de la derivada o se introduce como una definición, es evidente que no tiene un carácter hipotético (este es el caso de la expresión de d*v* deducida de la definición de la aceleración, o la expresión de d*W* para el trabajo realizado). Sin embargo, en otras ocasiones (d*N* en la ley de las desintegraciones radiactivas, d*V* en los cálculos geométricos para averiguar centros de masas o momentos de inercia concretos, d*I* en la absorción de ondas, problemas resueltos, etc.) se plantea una expresión diferencial, como punto de partida, que es una entre las muchas expresiones posibles, y cuya validez está condicionada a la contrastación del resultado obtenido. Se trata de averiguar si el texto hace explícito, de algún modo, este carácter hipotético de la expresión diferencial inicial, o actúa erróneamente como si no cupiera duda alguna de la validez de la expresión de partida. Si en el libro no se tratan situaciones de este tipo, dejaremos sin contestar esta pregunta.

Con la aplicación de la primera red de análisis esperamos obtener unos resultados contundentes, favorables a nuestra hipótesis, sobre cada uno de los indicadores de una adecuada comprensión de la diferencial. Por ello, y para aumentar la fiabilidad de la valoración, adoptaremos el criterio de valorar cualquier ítem desfavorablemente para nuestra hipótesis si se encuentra **una sola ocasión** en el texto contraria a dicha hipótesis, excepto en el ítem 4 con el que pretendemos reconocer si la justificación es anecdótica o es habitual a lo largo del texto.

La valoración será realizada por dos investigadores de forma independiente, que previamente han acordado sus criterios valorando una pequeña muestra de textos y comparando sus resultados.

Para el análisis de los datos recogidos, contabilizaremos el porcentaje de respuestas afirmativas y negativas a cada una de las preguntas. Los resultados se presentarán separados por niveles y también de forma global.

Red de análisis de textos nº 2

La aplicación de la primera red de análisis nos permitirá confirmar la ausencia generalizada de los distintos indicadores de un buen uso de la diferencial en los textos.

Las carencias detectadas por esa primera red de análisis en relación con la presencia o no de una justificación habitual del uso de la diferencial podrían ser achacadas a la necesidad de no repetir una vez tras otra a lo largo del texto los mismos comentarios cuando se usa la diferencial. Parece lógico que esos comentarios sean más amplios y precisos al principio y que después vayan haciéndose más concisos, pero en ningún caso es razonable que desaparezcan.

Para analizar con detalle la existencia de unos comentarios mínimos y comunes a todos los tópicos, así como las diferencias entre unos y otros, hemos seleccionado tres tópicos correspondientes a distintas situaciones o *momentos clave* en que se usa la diferencial:

A) ***Trabajo realizado por una fuerza variable***. Este tópico es el prototipo en el que se escribe por primera vez una expresión diferencial sin haberla *despejado* de una derivada; en él esperamos encontrar los comentarios más precisos.

B) ***Energía almacenada por un condensador cargado***. La expresión diferencial puede constituir la definición operativa de una magnitud, careciendo por tanto de carácter hipotético; en estos casos, previamente se ha definido de forma operativa la magnitud cuando existe un comportamiento uniforme (Äp=F· Ät, ÄE=F_r· Är, ÄE=V· Äq, etc.), y la expresión diferencial no es más que una ampliación de esa definición al caso no uniforme (dp=F· dt, dE=F_r· dr, dE=V· dq, etc.). El primer tópico (*Trabajo realizado por una fuerza variable*) responde a estas características, pero hemos seleccionado este segundo tópico por ser representativo de una situación más, sin la especial atención que merecen las primeras ocasiones.

C) ***Ley de absorción luminosa.*** Este tópico es representativo de la situación más frecuente en la resolución de problemas: se escribe una expresión diferencial que representa un comportamiento físico imaginario, a modo de hipótesis, que se utiliza para llegar a obtener el comportamiento real. Estas situaciones son las más *ricas* tanto para explicar el significado de los conceptos como la estrategia general del Cálculo diferencial. (En ausencia de este tópico, estudiaremos: *Ley de las desintegraciones radiactivas)*.

En cada uno de esos tres tópicos se analizarán los comentarios relacionados con la justificación de la diferencial. En el cuadro 4.III (ver p. 19) se presenta la red de análisis que utilizaremos, distinguiendo:

1. Comentario correcto (comentario 1)
2. Comentarios con algún significado (comentarios 2 y 3)
3. Comentarios carentes de significado (comentarios 4, 5, 6 y 7)

Cuadro 4.III. Red de análisis de textos nº 2 para analizar la justificación de la diferencial en los tres tópicos seleccionados.

Datos identificativos del texto:

Autor/es: ____

Título: ____		Curso: ________________
Editorial: _______________________	Año ed. original: _____	Año ed. español: ______

Comentario para justificar el uso de la diferencial en el tópico:

Trabajo realizado por una fuerza variable .... 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 - 7

Energía almacenada por un condensador cargado ..... 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 - 7

Ley de absorción luminosa .... 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 - 7

Descripción de cada tipo de comentario:

1. Reconoce situación no uniforme y describe la estrategia del Cálculo
2. Reconoce situación no uniforme que le obliga a hacer una estimación lineal
3. Reconoce situación no uniforme que le obliga a tomar cantidades infinitesimales en las que puede considerarse uniforme
4. Reconoce situación no uniforme, sin añadir más comentarios explicativos
5. Simplemente toma valores infinitesimales
6. Términos o frases hechas sin explicar el significado
7. Ningún comentario

Con la finalidad de identificar con la mayor precisión posible cada tipo de comentario, hemos elaborado previamente los siguientes **criterios de valoración**, en los que se expresan las situaciones posibles que podemos encontrar que serán indicadoras de una decisión en uno u otro sentido:

1. Comentario correcto: Se reconoce la existencia de una situación no uniforme que impide hallar directamente el valor exacto de una magnitud, **y se describe la estrategia a utilizar**: realizar una estimación lineal sobre el cambio de esa magnitud, e intentar hallar el valor exacto a través de la acumulación de estimaciones sucesivas. La expresión diferencial representa el primer paso de esta estrategia.

Comentarios con algún significado, que indican alguna ventaja del uso de la diferencial, aunque no la inserten dentro de una estrategia más general:

2. Se reconoce la existencia de una situación no uniforme que produce dificultades de cálculo, lo **que hace necesario realizar una estimación lineal**, pero no describe la estrategia global. Son ejemplos de este tipo de comentario: “cuando la fuerza no es constante a lo largo del desplazamiento, no sabemos qué valor de F utilizar para calcular la variación de energía mediante trabajo, pero sí podemos calcular lo que habría variado la energía si la fuerza se hubiese mantenido constante, lo que constituirá una estimación de la variación real de energía”; o bien: “cuando el potencial no es constante podemos realizar una estimación del aumento de energía si V se hubiese mantenido constante”

3. Se reconoce la existencia de una situación no uniforme que obliga a tomar cantidades infinitesimales en las cuales se puede considerar que esas magnitudes se mantienen constantes. Aunque este comentario asigna un significado erróneo a la diferencial (ver caps. 1 y 2), pone de manifiesto al menos que el uso del Cálculo diferencial aparece ante las insuficiencias del cálculo ordinario. Son ejemplos de este tipo: “en el caso de fuerzas variables dividimos la trayectoria en desplazamientos tan pequeños que podemos considerar que la fuerza es constante a lo largo de cada uno de ellos”; o bien: “si el campo magnético no es uniforme dividimos el conductor en pequeños segmentos para cada uno de los cuales se puede considerar B constante”

Comentarios carentes de significado:

4. Se reconoce la existencia de magnitudes variables y entonces, **sin ningún comentario explicativo**, utiliza diferenciales. Por ejemplo: “en el caso de fuerzas variables se toman desplazamientos infinitesimales”; o bien: “en el caso de campos no uniformes tomamos una superficie elemental”.

5. Se hace una mera referencia nominal al valor infinitesimal o muy pequeño de alguna magnitud sin más comentarios descriptivos o explicativos. No es sólo que asigna un significado erróneo a la diferencial, sino que no se presenta razón alguna que justifique el uso de esas supuestas cantidades muy pequeñas. Por ejemplo: “tomando un desplazamiento infinitesimal...”, “dividiendo la superficie en pequeños trozos...”.

6. Se utilizan términos o frases hechas. Por ejemplo: “elemental”, “elemento diferencial”, etc.

7. No hay ningún comentario previo. Por ejemplo: “la variación de intensidad dI experimentada al atravesar un medio de espesor dx...”

Cualquier referencia, por breve que sea, que haga alusión a alguno de estos comentarios bastará para señalar el tipo correspondiente, siempre en la subcategoría más desfavorable para nuestra hipótesis en caso de duda y que corresponderá al de menor número de orden. En el caso de que la diferencial con sentido en sí misma no se utilice dejaremos en blanco la respuesta.

Para ilustrar con mayor riqueza cada uno de los comentarios reseñados y para que puedan entenderse mejor, realizaremos transcripciones literales de algunos fragmentos de distintos textos.

4.3. INSTRUMENTOS PARA COMPROBAR LA AUSENCIA DE UNA ADECUADA COMPRENSIÓN DE LA DIFERENCIAL EN LA FÍSICA ENTRE LOS ESTUDIANTES Y PROFESORES DE FÍSICA Y QUÍMICA

Teniendo en cuenta nuestro objetivo, hemos de seleccionar una muestra de profesores y estudiantes que impartan o cursen asignaturas de Física en las que se utilice el Cálculo diferencial. Por tanto, los instrumentos experimentales se aplicarán a estudiantes de COU y de carreras universitarias científico-técnicas (Física, Química, Ingenierías...). En cuanto a los profesores, hemos pensado realizar cursos de formación organizados por distintos Centro de Profesores y el ICE de la Universidad de Alicante, sobre "La introducción del Cálculo diferencial en la enseñanza de la Física", lo que permitirá disponer de muestras de profesores en activo que imparten Física de COU. A pesar de no disponer de muestras de profesores universitarios, es presumible que los resultados obtenidos con alumnos universitarios de carreras científico-técnicas y con profesores de Física de Enseñanza Secundaria sean un reflejo de cómo se enseña en las aulas universitarias.

Para obtener evidencias que nos permitan contrastar las consecuencias que hemos recogido en la tabla 4.II (que concretan los indicadores de una comprensión adecuada de la diferencial en la enseñanza de la Física, desarrollados en el cap. 2, p. 81), hemos elaborado instrumentos teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

a) La necesidad de homogeneizar la influencia del contenido específico del contexto en que se va a utilizar la diferencial. Por ello, hemos preparado cuestiones y problemas relacionados con una gran diversidad de contenidos (cinemática, dinámica, fluidos, magnetismo, calor, procesos nucleares...)

b) Suministrar por un lado ocasiones novedosas para que los alumnos y profesores no se vean impulsados a la repetición sino a pensar qué van a hacer, por qué y para qué, pero que al mismo tiempo sean asequibles dentro de su nivel de formación. Por ello, hemos decidido:

   - Preparar problemas de distinto nivel de dificultad conceptual, incluyendo siempre comentarios destinados a recordar los conocimientos físicos implicados.
   - Pasar los cuestionarios a los alumnos en el mes de mayo, garantizando así que se haya cubierto la mayor parte del programa de matemáticas y de Física, y que exista un cierto entrenamiento.
   - Pasar a los profesores un problema *ejemplificador* en situación de enseñanza, donde la dificultad no provenga de sus conocimientos físicos.
   - Realizar la entrevistas semiestructuradas sobre problemas resueltos

c) El tiempo disponible para responder debe ser tal que se favorezcan las respuestas reflexionadas, tranquilas. No buscamos *errores* de inatención o precipitación, sino deficiencias en la comprensión. Por ello, el número de cuestiones y/o problema que conteste cada individuo será tal que el tiempo máximo de respuesta requerido, tras ensayo piloto, no sobrepase los treinta minutos (o cuarenta si debe responder a un problema). Además, para favorecer su implicación en las respuestas, siempre se informará oralmente y por escrito -mediante un encabezamiento del cuestionario- de las intenciones del trabajo que estamos realizando: mejorar, en lo posible, la enseñanza-aprendizaje del Cálculo diferencial en las clases de Física.

Los instrumentos elaborados son:

- 11 cuestiones, cerradas y semiabiertas
- 4 problemas
- un problema *ejemplificador* en situación de enseñanza para profesores

- una entrevista semiestructurada para estudiantes y profesores en formación, que utilizaremos para ilustrar y confirmar la interpretación de los resultados obtenidos mediante respuestas escritas.

Los datos para contrastar una misma consecuencia provienen de instrumentos y muestras diferentes.

En los subapartados siguientes describiremos cada una de las cuestiones y problemas, junto con un comentario sobre su intención y los instrumentos que emplearemos para su análisis. Como norma general, ante cualquier duda para clasificar una respuesta nos decantaremos por la opción más desfavorable para nuestra hipótesis.

Para identificar con facilidad el tipo de pregunta, hemos utilizado las siguientes claves:

- **una letra mayúscula** que indica si es una cuestión (**C**) o un problema (**P**)
- **un número**, y
- **una o dos letras minúsculas** que indican el grupo al que se pasará (**e**: sólo estudiantes, **p**: sólo profesores, **e-p**: estudiantes y profesores)

Para evitar la continua búsqueda de estas preguntas durante la lectura del presente trabajo, hemos decidido reproducir su enunciado en las hojas sueltas plastificadas que se adjuntan, y que hemos llamado: ***hojas recordatorio***.

4.3.1 Cuestiones cerradas y semiabiertas

C1e-p **[e-p • común a estudiantes y profesores]**

En un texto sobre cinemática se llega a la siguiente expresión: Äv=a· Ät, y a continuación se escribe de la siguiente manera: dv=a· dt **Señala** (✓) cuál de las siguientes razones te parece que justifica con mayor precisión la necesidad de hacer este paso. **Califica** de 0 a 10 el grado de seguridad en tu respuesta.

Grado de seg. **(0-10)**

- Porque estamos considerando tiempos infinitamente pequeños .. _______
- Porque la velocidad depende del tiempo .... _______
- Porque la aceleración depende del tiempo .... _______
- Porque nos interesa concluir en una derivada o una integral .... _______
- No lo sé .... _______
- Otra respuesta: ____
  ____

Explica brevemente el significado físico de la expresión: d*v* = *a*.d*t*

Con esta pregunta se pretende mostrar que profesores y estudiantes desconocen las verdaderas razones que hacen necesario recurrir al concepto de diferencial, a pesar de tratarse de una situación bastante familiar para ellos y que se habrá usado en las clases en más de una ocasión.

Conviene aclarar que mientras la aceleración sea constante, es válida la expresión en términos de incrementos ya sean éstos *grandes* o *pequeños* y que, sin embargo, cuando la aceleración no es constante no tiene sentido la expresión en términos de incrementos pues no existe un valor único para la aceleración a lo largo de ese intervalo de tiempo. La respuesta correcta es, por tanto: *Porque la aceleración depende del tiempo*.

Según nuestra experiencia, la mayoría de los profesores y estudiantes justificará el paso de incrementos a diferenciales debido al valor infinitesimal. No se trata sólo de confirmar que este es el significado dominante, sino el *efecto pantalla* que produce: la obsesión por las cantidades infinitesimales les dificulta incluso cuestionarse por qué es necesario recurrir a cantidades tan pequeñas.

Se han incluido las opciones: "*No lo sé*" y "*Otra respuesta*" para evitar en lo posible las contestaciones al azar; siempre que la explicación dada en *"Otra respuesta"* lo permita, asignaremos esta contestación a alguna de las otras opciones que se les presentaban. Aunque en el enunciado se les pide que señalen una sola respuesta, si señalan más de una y una de ellas es la correcta sólo la asignaremos a esa respuesta, y en caso contrario las contabilizaremos en los dos grupos de respuestas.

Con estos criterios, nos fijaremos principalmente en cuántos profesores y cuántos estudiantes señalan la respuesta correcta y el grado de seguridad con que lo hacen. Por otra parte, entre los que contestan incorrectamente estudiaremos el tipo de respuesta que señalan.

La segunda parte de esta cuestión es una pregunta abierta sobre el significado físico de la expresión diferencial. Según nuestra hipótesis, no serán frecuentes las respuestas correctas que mencionen la idea de diferencial como estimación lineal del incremento, es decir, respuestas que expliquen que dv es el Äv que se produciría en un intervalo Ät (=dt) si la aceleración permaneciese constante durante ese intervalo.

Realizaremos una clasificación de repuestas-tipo similar a la utilizada en la red de análisis de textos nº 2 (p. 121, en este mismo capítulo). Hemos establecido así tres categorías: la respuesta correcta en términos de estimación lineal, una respuesta incorrecta pero que pone de manifiesto las ventajas del Cálculo diferencial, y el resto de respuestas incorrectas. Esta clasificación queda reflejada en el estadillo que hemos elaborado para el análisis de las respuestas.

Estadillo para analizar el significado físico que se asigna a la expresión: $dv = a \cdot dt$

(C1e-p)

1. **Respuesta correcta:** Explicación en términos de estimación (lineal) del Ä*v*

2. **Respuesta incorrecta, pero que muestra las ventajas del uso de la diferencial:** La diferencial como cantidad infinitesimal o muy pequeña, pero explican que así se puede suponer constante la aceleración

Respuestas incorrectas que no muestran ventaja alguna de la diferencial:

3. Describen la diferencial como una cantidad infinitesimal o muy pequeña, sin comentario explicativo

4. Se limitan al uso de palabras y frases hechas sin especificar su significado

5. No contestan: respuesta en blanco, comentarios superfluos, lectura literal...

6. Otra respuesta

En caso de duda, siempre optaremos por la respuesta de menor número de orden por tratarse de la más desfavorable para nuestra hipótesis. Teniendo en cuenta la intencionalidad de nuestro trabajo, debemos recordar que sólo nos interesa la parte de la contestación que hace referencia al significado de los términos y expresiones diferenciales, de manera que la cinemática es sólo un contexto físico donde aparecen tales términos.

C2e-p **[e-p • común a profesores y estudiantes]**

Estamos calculando el valor de la diferencial de una magnitud: d*y*. ¿Cuál o cuáles de los siguientes resultados crees que serían posibles? Señala (✓) aquél o aquellos que consideres posibles.

- d*y* = 12,63
- d*y* = 300.000
- d*y* = 0,0001
- Ninguna de las respuestas anteriores
- No lo sé

Justifica brevemente tu respuesta:

Con esta pregunta pretendemos averiguar si profesores y estudiantes conocen el carácter funcional de la diferencial y que, por tanto, puede tomar cualquier valor numérico. Como ya se ha explicado, la diferencial es una estimación lineal de lo que cambiaría la función al producirse un cambio en la variable y, por tanto, su valor numérico puede ser grande o pequeño dependiendo de la pendiente de esa estimación y del incremento de la variable.

Para analizar el primer apartado de esta cuestión nos fijaremos en cuántos profesores contestan coherentemente con el carácter funcional de la diferencial, es decir, señalan simultáneamente los tres valores numéricos o, al menos, más de un valor. Entre las contestaciones restantes, todas ellas inconsistentes con el carácter funcional de la diferencial, identificaremos las que admiten sólo un valor numérico (que esperamos que sea el más pequeño), y las que no señalan ninguno de los valores ofrecidos.

Con el objetivo de conocer mejor el pensamiento de los profesores sobre este aspecto, hemos incluido el **segundo apartado** donde se pide que justifiquen su respuesta. Hemos distinguido de nuevo entre respuestas consistentes con el carácter funcional de la diferencial y respuestas inconsistentes o contrarias a dicho carácter, estableciendo distintas categorías entre esta últimas.

Consideraremos positivas las respuestas que admiten que la diferencial puede tomar distintos valores numéricos, aunque no hagan siquiera referencia a la dependencia de ese valor con x y Äx.

Entre las respuestas inconsistentes distinguiremos:

- Los que admiten un valor numérico pero siempre pequeño; entre ellos, algunos habrán señalado el valor 0.0001 como posible y otros ninguna respuesta numérica pues ni siquiera ese valor lo consideran suficientemente pequeño.
- Los que afirman explícitamente que la diferencial no puede tomar valor numérico alguno, por ejemplo: porque la consideran un símbolo, porque consideran que una cantidad infinitesimal siempre puede ser más pequeña aún...; todos ellos, lógicamente, no habrán señalado ningún valor numérico en el primer apartado.
- Los que dejan la respuesta en blanco, correspondientes a los que han contestado previamente *No lo sé* o a aquellos cuya explicación no es identificable con ninguna de las dos categorías anteriores.

De acuerdo con estas categorías, para el análisis de las respuestas a este segundo apartado, utilizaremos el siguiente estadillo. Como ya se ha comentado, en caso de duda señalaremos la respuesta más desfavorable para nuestra hipótesis.

Estadillo para analizar la justificación del valor numérico que puede tomar d*y* (C2e-p)

1.	**Respuesta consistente con el carácter funcional de la diferencial:** La diferencial puede tomar distintos valores numéricos
	Respuestas inconsistentes con el carácter funcional de la diferencial:
2.	La diferencial sólo puede tomar valores numéricos muy pequeños
3.	La diferencial no puede tomar ningún valor numérico
4.	En blanco
5.	Otra respuesta

C3e-p **[e-p • común a profesores y estudiantes]**

En un horno cuya temperatura se mantiene constante a 3000 ºC introducimos una pieza que lleva incorporado un termómetro. En el momento de introducir la pieza ese termómetro señala 15 ºC, y sabemos que la derivada de la temperatura respecto del tiempo en ese instante inicial es de 1.2 ºC/s

A) ¿Cuál será el valor de la diferencial de la temperatura cuando hayan transcurrido 0.05 s? ¿cuál será el significado físico de ese valor?

B) ¿Cuál será el valor de la diferencial de la temperatura cuando hayan transcurrido 30 minutos? ¿cuál será el significado físico de ese valor?

Esta cuestión intenta averiguar si profesores y estudiantes admiten –aunque sea de un modo operativo- que la diferencial puede tomar distintos valores, si calculan dichos valores utilizando la derivada como cociente de diferenciales, y si interpretan correctamente el significado físico de los mismos. Teniendo en cuenta esta intención, en el análisis de las respuestas nos fijaremos en los siguientes aspectos:

- Si obtienen algún valor numérico, o al menos plantean las operaciones, que ellos relacionan con d*T*, aunque no sea el resultado correcto. Obtener algún resultado numérico es una condición necesaria para aceptar el carácter funcional de la diferencial.
- Si llegan al valor numérico referido en el aspecto anterior usando directamente la fórmula de Cauchy ($dT=T'\cdot dt$). Teniendo en cuenta nuestra intención, consideraremos que utilizan dicha fórmula incluso aunque se limiten a plantear una *regla de tres*, siempre y cuando identifiquen el resultado con la diferencial.
- Si interpretan correctamente el significado del valor numérico obtenido o que podrían haber obtenido, relacionándolo con una estimación o una aproximación del Ä*T*. Estudiaremos también las explicaciones incorrectas de acuerdo con las siguientes categorías: los que identifican d*T* con Ä*T*, o incluso con *T*, los que confunden d*T* con la derivada, o los que no contestan (*en blanco*, *no lo sé*, *lectura literal*...).

Al analizar por separado las respuestas para cambios *pequeños* de la variable (Ä*t*=0.05 s) y cambios *grandes* (Ä*t*=30 min), podremos apreciar si mantienen las mismas respuestas en ambos casos, confirmando así el carácter funcional.

Según nuestra hipótesis esperamos encontrar respuestas que muestren una concepción de la diferencial como un incremento infinitesimal, tanto de un modo explícito (al verbalizar su significado) como indirecto (al no asignar significado alguno cuando el intervalo se hace *grande*).

Para analizar las respuestas, teniendo en cuenta los aspectos mencionados, hemos diseñado un mismo estadillo para ambos intervalos de tiempo: 0.05 s (apdo. A) y 30 minutos (apdo. B).

Estadillo para analizar si admiten valor numérico para la diferencial, cómo lo calculan, y qué significado físico le asignan **(C3e-p)**

	Ä*t*=0.05 s	**Ät=30 min**
Sobre el cálculo de d*T*:		
¿Llegan a algún valor numérico concreto para d*T*?	SÍ - NO	SÍ - NO
¿Utilizan fórmula de Cauchy para calcular directamente d*T*?	SÍ - NO	SÍ - NO
Sobre el significado físico del valor de d*T*	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5
1. Respuesta correcta: Idea de estimación o aproximación del incremento (Ä*T*)		
Respuestas incorrectas:		
2. Identifican la diferencial con el incremento		
3. Identifican diferencial y derivada		
4. Dejan la pregunta sin contestar, en blanco		
5. Otra respuesta		

C4e-p **[e-p • común a profesores y estudiantes]**

El teorema fundamental del Cálculo integral nos permite calcular el valor de una integral definida y, como ya sabrás, se utiliza muy a menudo en la resolución final de muchos desarrollos y problemas de Física. Podemos resumir dicho teorema en la siguiente expresión:

$$\int_A^B f(x)\,dx = P(B) - P(A) \quad , \quad \text{siendo: } \quad P'(x) = f(x)$$

Aunque se trata de un resultado muy importante, es poco probable que recuerdes una demostración estricta del mismo. Pero, **¿puedes dar argumentos gráficos y/o analíticos o razonamientos intuitivos que muestren que es lógico y comprensible este resultado (en particular, el hecho de que aparezca la función primitiva *P(x)*)?. Explica esos argumentos en el espacio que queda en esta misma hoja:**

La relación inversa que existe entre derivación e integración es considerada como la piedra angular del Cálculo, colocada por Leibniz y Newton (Edwards, 1937), y que se establece mediante el llamado Teorema Fundamental. Sin embargo, en las clases de Física, aunque los conceptos de derivada e integral (*sumas de Riemann*) son tratados con cierto detalle en algún momento, el cálculo de *sumas infinitas* es reducido de inmediato al proceso inverso del cálculo de derivadas como si de una definición o un resultado evidente se tratase.

Nuestra intención con esta pregunta es poner de manifiesto la dificultad que tienen profesores y estudiantes para establecer y argumentar esa relación inversa entre integral y derivada. Distinguiremos entre dos tipos de respuestas:

i) Las que aportan argumentos que podrían relacionarse con mayor o menor claridad con una justificación del teorema. Se incluyen aquí respuestas que aportan argumentos claros, pero también aquellas en las que aparecen comentarios o ideas que podrían dar lugar a argumentos razonables. En particular, es interesante saber si llegan a identificar el producto $f(x)\cdot dx$ con dP justificando así que la integral coincida con ΔP, aunque no expliquen por qué en el límite la suma de los dP es realmente ΔP.

ii) Las que no ofrecen ningún argumento, ya sea porque no contestan, o porque se limitan a repetir el enunciado del teorema, o escribir frases sin sentido, o describir el concepto de integral como área bajo la curva f(x), o simplemente a afirmar que derivar e integrar son operaciones inversas.

Para discernir mejor, hemos elaborado un estadillo con estos dos grandes grupos de respuestas, subdivididos en casos más concretos. En caso de duda siempre tomaremos la opción más desfavorable para nuestra hipótesis, que coincide con la respuesta de menor número de orden en el estadillo.

Estadillo para analizar los argumentos utilizados para justificar la relación inversa entre la derivada y la integral (C4e-p)

i) Ofrecen argumentos que podrían relacionarse con una justificación:

1. Justifican claramente la relación: $P'(x)$=f(x) aunque sea de forma intuitiva, usando argumentos gráficos o analíticos.
2. Identifican el producto f(x)· dx con dP
3. Otras ideas

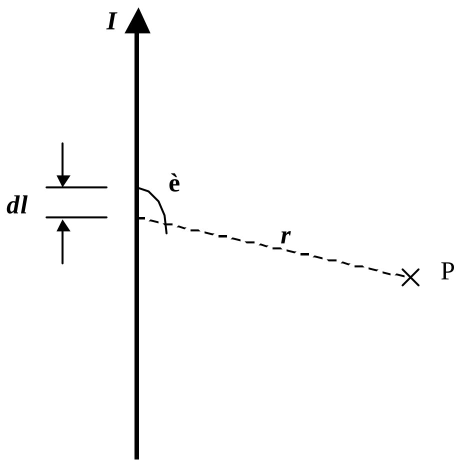
ii) No se ofrecen argumentos:

4. Se limitan a recordar el concepto de integral como área bajo la curva f(x)
5. Por definición, derivar e integrar son operaciones inversas
6. Dejan la respuesta en blanco, parafrasean el enunciado o frases sin sentido

De acuerdo con los criterios establecidos para el uso de esta plantilla, en una misma respuesta podrán reconocerse los puntos 4 y 5, o bien los puntos 2 y 3, pero no son posibles otras repeticiones.

C5p **[p • específica para profesores]**

Para calcular la intensidad del campo magnético producido por una corriente rectilínea en un punto P (ver dibujo) se escribe la siguiente expresión:



$$dB = \frac{\mu}{4\pi}\frac{I \cdot sen\,\theta \cdot dl}{r^2}$$

Explica con tus propias palabras el significado físico de esa expresión:

La intención de esta cuestión es contrastar el significado que los profesores asignan a expresiones diferenciales que con toda seguridad han estudiado y probablemente hayan utilizado en sus clases.

El significado físico correcto de esa expresión diferencial es una estimación de lo que cambia la intensidad del campo magnético (ΔB) en P debido al trozo de hilo de longitud Δl (o dl), y esa estimación consiste en suponer que el cambio es lineal respecto a *dl*, es decir, que la distancia al punto (*r*) y el ángulo (θ) permanecen constantes a lo largo de ese *dl*. Sin embargo, y de acuerdo con nuestra hipótesis, esperamos que los profesores tengan dificultades para explicar correctamente el significado físico de esa expresión diferencial.

Pero no todas las respuestas incorrectas estarán igualmente alejadas de la correcta, por lo cual hemos establecido una gradación que va desde las que hacen referencia a que es un trozo infinitesimal de hilo de manera que *r* y θ permanezcan constantes, hasta las que recurren a palabras y frases hechas (*elemento de corriente*, *contribución elemental*, etc.) carentes de significado explícito.

En el análisis de las respuestas nos fijaremos, de acuerdo con el contenido de nuestro trabajo, en el significado que se atribuye a los términos diferenciales, sin valorar el resto de la explicación. Para llevar a cabo dicho análisis, al igual que en otras preguntas similares, hemos ordenado los distintos tipos de respuesta de manera que la contestación de cada profesor la identifiquemos con la opción de menor número, que sería la opción más desfavorable para nuestra hipótesis. En el siguiente estadillo se recogen y ordenan las distintas respuestas que hemos previsto.

Estadillo para analizar el significado de la diferencial para los profesores a partir de la expresión de d*B* en función de d*I* **(C5p)**

1. **Respuesta correcta:** Idea de diferencial como estimación lineal del incremento

2. **Respuesta incorrecta, pero indicando alguna ventaja del uso de la diferencial:** Cantidad infinitesimal o muy pequeña, explicando que así se puede suponer constante alguna magnitud

Otras respuestas incorrectas:

3. Describen la diferencial como una cantidad infinitesimal o muy pequeña, sin más comentario explicativo
4. Identifican diferencial con incremento
5. Se limitan al uso de términos y frases hechas sin especificar el significado
6. No contestan, leen literalmente la fórmula... Ningún significado para la diferencial
7. Otra respuesta

C6p **[p ª específica para profesores]**

Subraya la opción con la que MÁS te identifiques en cada una de las afirmaciones. Si en alguna no tienes ninguna opinión en absoluto, déjala en blanco.

1. *El uso del Cálculo diferencial en las clases de Física en COU es una importante fuente de rechazo y de actitudes negativas de los alumnos hacia la Física.*

Muy de acuerdo — De acuerdo — Neutral — En desacuerdo — Muy en desacuerdo

2. *Por lo general, cuando se le propone a los alumnos de COU una situación donde tengan que hacer uso del Cálculo diferencial (con tal que dicha situación se separe, aunque sea poco, de aquellas muy sencillas o de las vistas expresamente en clase), suelen aparecer graves deficiencias en su comprensión y uso.*

Muy de acuerdo — De acuerdo — Neutral — En desacuerdo — Muy en desacuerdo

3. *El uso del Cálculo diferencial en los textos y clases de Física de COU enmascaran el significado y contenido físico de los conceptos e ideas que se trabajan.*

Muy de acuerdo — De acuerdo — Neutral — En desacuerdo — Muy en desacuerdo

4. *En realidad lo importante para poder seguir las clases de Física en COU es que los alumnos sepan obtener derivadas e integrales de algunas funciones sencillas y que sepan aplicar métodos de integración simples (cambio de variable, integración por partes).*

Muy de acuerdo — De acuerdo — Neutral — En desacuerdo — Muy en desacuerdo

C7p **[p • específica para profesores]**

Subraya la opción con la que MÁS te identifiques en cada una de las afirmaciones. Si en alguna no tienes ninguna opinión en absoluto, déjala en blanco.

1. *Pienso que los propios profesores no dominan con seguridad suficiente el Cálculo diferencial como para usarlo ante situaciones y problemas nuevos*

Muy de acuerdo De acuerdo Neutral En desacuerdo Muy en desacuerdo

2. *El uso del Cálculo diferencial es necesario para desarrollar la Física que se imparte en COU.*

Muy de acuerdo De acuerdo Neutral En desacuerdo Muy en desacuerdo

3. *Yo me siento seguro para saber cuándo y por qué usar el Cálculo diferencial en Física, y capaz de usarlo para poder resolver nuevos problemas.*

Muy de acuerdo De acuerdo Neutral En desacuerdo Muy en desacuerdo

Las cuestiones C6p y C7p tienen como objetivo conocer la percepción que tienen los profesores sobre su propio grado de seguridad y el de sus alumnos en el uso del Cálculo diferencial, así como su percepción sobre la influencia del uso habitual del Cálculo en las actitudes de los estudiantes hacia la Física.

El instrumento utilizado consiste en proponer a los encuestados una serie de afirmaciones para que ellos indiquen su grado de acuerdo con cada una de ellas, mediante una escala tipo Likert que incluye las siguientes respuestas: *Muy de acuerdo, De acuerdo, Neutral, En desacuerdo, Muy en desacuerdo*. Aunque en el momento del recuento sólo distinguiremos entre profesores que muestran su acuerdo y los que muestran su desacuerdo, hemos considerado oportuno incluir respuestas extremas tales como *Muy de acuerdo* y *Muy en desacuerdo* para evitar que la inseguridad y la tendencia a huir de posturas categóricas pueda provocar una cierta incomodidad en el encuestado dando lugar entonces a un elevado número de posturas neutrales. Puede ocurrir también, y hemos de contabilizarlo aparte, que un profesor no se pronuncie sobre algunas afirmaciones por no tener una opinión al respecto.

Hemos separado las siete afirmaciones en dos preguntas para que un mismo profesor no pueda pronunciarse sobre todas las afirmaciones. Se quiere evitar así que la presencia de ciertas afirmaciones previas pueda inducir la contestación en las siguientes, no permitiendo entonces contrastar el supuesto carácter ambiguo del pensamiento de los profesores. Por ejemplo, si un profesor admite que sólo se necesitan unas pocas reglas de cálculo para salir adelante, es probable que a renglón seguido se resista a admitir que es imprescindible usar el Cálculo diferencial para desarrollar la enseñanza de la Física de COU, aunque es posible que por separado pueda compartir ambas afirmaciones.

Para el análisis de las respuestas calcularemos el porcentaje de profesores que están de acuerdo (respuestas: *De acuerdo* o *Muy de acuerdo*) y los que no lo están (respuestas: *En desacuerdo* y *Muy en desacuerdo*), para cada una de las siete afirmaciones.

C5e **[e • específica para estudiantes]**

Conocemos la ecuación del movimiento de seis móviles distintos. Si queremos calcular la rapidez instantánea de cada móvil, marca con una **S** aquellos casos en que será **imprescindible** hacer uso del Cálculo diferencial (derivadas, diferenciales, integrales,...), y con una **N** aquellos en que no es necesario. (Califica **de 0 a 10** el grado de seguridad de cada respuesta que das):

S / N		Grado de seg. **(0-10)**
______	$x = 12$	_______
______	$x = 8 + 3t^2$	_______
______	$x = 6t - 2$	_______
______	$x = 5 \cos 3t$	_______
______	$x = t/3$	_______
______	$x = 3 + 1/t$	_______

De acuerdo con nuestra hipótesis, los alumnos no conocen las causas que obligan a hacer uso del Cálculo diferencial, reflejo de una actitud mecánica generalizada en el uso del mismo. Como consecuencia, los estudiantes asocian el uso del Cálculo con el recuerdo de determinadas expresiones y fórmulas y no con las causas reales que llevaron a introducirlo en tales expresiones; cabe esperar, por tanto, que consideren *imprescindible* usar el Cálculo diferencial en todas las situaciones descritas, sean lineales o no lo sean, tan sólo porque asocian el término instantáneo con expresiones diferenciales o porque recuerdan la fórmula de cálculo de la rapidez instantánea.

Para el análisis de las respuestas contabilizaremos el número de alumnos que contestan correctamente señalando sólo los casos no lineales (2º, 4º y 6º), pero también contabilizaremos la respuesta tipo más esperada: que señalen todos los casos excepto el primero, reflejo esto último de que han entendido la pregunta y han reflexionado sobre la respuesta, ya que han identificado el primer caso como un móvil en reposo.

Para un análisis más detallado determinaremos el porcentaje de estudiantes que señalan cada una de las ecuaciones del movimiento y el grado de seguridad con que lo hacen.

C6e – 1ª parte **[e • específica para estudiantes]**

En los apuntes de Física de un alumno encontramos escrita la siguiente expresión: $\dfrac{dR}{dz} = L \cdot z$ Señala (✓) cuál o cuáles de las siguientes frases realiza una lectura correcta de esa expresión:

- La derivada de *R* respecto de *z* es igual a *L* multiplicado por *z*
- La derivada de *R* entre la derivada de *z* es igual a *L* multiplicado por *z*
- La diferencial de *R* entre la diferencial de *z* es igual a *L* multiplicado por *z*
- Otra respuesta: ____
  ____

C6e – 2ª parte **[e • específica para estudiantes]**

En los apuntes de Física de un alumno encontramos escrito el siguiente razonamiento:

$\dfrac{dR}{dz} = L \cdot z$ **Despejando d*R* se obtiene:** $dR = L \cdot z \cdot dz$

Señala (✓) con cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones relativas a ese razonamiento te muestras de acuerdo:

- El razonamiento es incorrecto pues no podemos despejar en la primera ecuación
- El razonamiento es correcto y la ecuación que se obtiene se lee: "la diferencial de *R* es igual a *L* multiplicado por *z* y por la diferencial de *z*"
- El razonamiento es correcto y la ecuación que se obtiene se lee: "la derivada de *R* es igual a *L* multiplicado por *z* y por la derivada de *z*"
- Otra respuesta: ____
  ____

Esta cuestión, que consta de dos partes, pretende averiguar en qué medida los alumnos reconocen y aplican la concepción de la derivada como cociente de diferenciales.

En la primera parte de la cuestión se trata de estudiar si reconocen directamente la expresión d*R*/d*z* como un cociente de diferenciales, y en la segunda si utilizan implícitamente esta misma idea en un razonamiento-tipo habitual en las clases y textos de Física. Si lo habitual es el uso mecánico y falto de comprensión del Cálculo diferencial, cabe esperar que los alumnos utilicen la idea en la segunda parte por tratarse de un paso repetido en clase, y sin embargo no admitan abiertamente esa misma idea en la primera parte cuando se les pregunta abiertamente sobre ella, lo que probaría que pueden llegar a *dominar* las reglas pero sin entender la relación entre derivada y diferencial.

Para evitar que la lectura de la segunda parte les haga modificar su respuesta a la primera, sólo pasaremos la segunda parte después de recoger la primera.

Los distractores utilizados en las dos partes se refieren, según nuestra experiencia, a expresiones utilizadas por los estudiantes, y que reflejan también un uso sin comprensión de las ideas básicas del Cálculo diferencial.

Para el análisis de las contestaciones a esta pregunta contabilizaremos el porcentaje de estudiantes que señalan cada una de las respuestas, en especial aquellos que señalan la tercera respuesta en la primera parte (*La diferencial de R entre la diferencial de z es igual a...*), y la segunda respuesta en la segunda parte (*El razonamiento es correcto y la ecuación que se obtiene se lee: 'la diferencial de R es igual a L multiplicado por z y por la diferencial de z"*).

C7e **[e • específica para estudiantes]**

> Una sustancia radiactiva es aquella cuyos núcleos están transformándose en otros núcleos o partículas, es decir, se están produciendo desintegraciones. Si llamamos *N* al número de núcleos de una sustancia radiactiva en un instante *t*, este número disminuirá en un intervalo de tiempo debido a las desintegraciones que se hayan producido.
>
> La ley de las desintegraciones radiactivas se refiere a la cantidad de núcleos que se desintegran de una determinada sustancia radiactiva en un intervalo de tiempo, y su primera expresión matemática es la siguiente: $\mathbf{d}\boldsymbol{N} = -\lambda \cdot \boldsymbol{N} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{t}$ siendo λ una constante característica de cada elemento radiactivo.
>
> **Explica con tus propias palabras, y lo más claramente que puedas, el significado físico de d*N* que se deduce de esa expresión matemática:**

El significado físico correcto de esa expresión diferencial es el siguiente: d*N* es una estimación de lo que cambia el número de núcleos (ΔN) durante el intervalo de tiempo Δt (o d*t*), y esa estimación consiste en suponer que el cambio es lineal respecto a d*t*, es decir, que *N* permanece constante[25].

Sin embargo, de acuerdo con la operativización de nuestra hipótesis, esperamos que los estudiantes tengan serias dificultades para asignar un significado físico -aunque sea erróneo- a las expresiones diferenciales, incluso a las que ya han visto en clase y libros de texto. A lo sumo, interpretarán d*N* como una manera de referirse al ΔN cuando se trata de intervalos de tiempo *muy pequeños* o que *tienden a cero*, pero sin llegar a comentar siquiera que de esa manera puede suponerse constante el número de núcleos presentes en la muestra.

En el análisis de las respuestas centraremos nuestra atención en el significado que se atribuye a la expresión diferencial, sin entrar a valorar el resto de la explicación. Para realizar este análisis, y dentro de las respuestas incorrectas, hemos establecido varias categorías ordenadas de forma que la contestación de cada estudiante se

---

[25] Puede resultar llamativo que se suponga que *N* es constante para calcular el ΔN, pero este hecho resalta precisamente que se trata de una **estimación lineal**; lo que se considera constante es la velocidad de desintegración, la pendiente de la recta diferencial, para poder realizar la estimación del ΔN correspondiente.

asigne a una sola de esas categorías, la de menor número de orden posible por ser la opción más desfavorable para nuestra hipótesis. En el siguiente estadillo se recogen y ordenan las distintas categorías de respuesta establecidas.

Estadillo para analizar el significado físico que los estudiantes asignan a la diferencial d*N* a partir de la expresión: d*N* = -ë *N* d*t* **(C7e)**

1. **Respuesta correcta:** La diferencial como estimación lineal del incremento

2. **Respuesta incorrecta, pero indicando alguna ventaja del uso de la diferencial:** Cantidad infinitesimal o muy pequeña, explicando que así se puede suponer constante alguna magnitud

Otras respuestas incorrectas:

3. Describen la diferencial como una cantidad infinitesimal o muy pequeña, sin más comentario explicativo
4. Identifican diferencial con incremento
5. Se limitan al uso de términos y frases hechas sin especificar el significado
6. No contestan, leen literalmente la fórmula... Ningún significado para la diferencial
7. Otra respuesta

C8e **[e • específica para estudiantes]**

Pretendemos conocer tu opinión sobre el uso del Cálculo diferencial en las clases de Física. Para ello, subraya la opción con la que MÁS te identifiques en cada una de las siguientes afirmaciones. Si en alguna no tienes ninguna opinión en absoluto, déjala en blanco.

1. *Una de las causas más importantes de que a los alumnos no les guste la Física es el uso del Cálculo diferencial*

Muy de acuerdo De acuerdo Neutral En desacuerdo Muy en desacuerdo

2. *Noto que el profesor utiliza el Cálculo diferencial porque lo necesita para el desarrollo del tema, pero él no espera que nosotros lo entendamos*

Muy de acuerdo De acuerdo Neutral En desacuerdo Muy en desacuerdo

3. *El uso del Cálculo diferencial hace que la Física sea más difícil de comprender, de forma que más que ayudar, obstaculiza la comprensión de los conceptos*

Muy de acuerdo De acuerdo Neutral En desacuerdo Muy en desacuerdo

4. *Cuando se utiliza el Cálculo diferencial en las demostraciones y en el planteamiento de problemas en Física, no presto atención pues sé de antemano que no me voy a enterar y atiendo solamente a la fórmula que se obtiene al final*

Muy de acuerdo De acuerdo Neutral En desacuerdo Muy en desacuerdo

5. *Yo utilizo con seguridad el Cálculo diferencial y me siento capaz de resolver problemas nuevos con él*

Muy de acuerdo De acuerdo Neutral En desacuerdo Muy en desacuerdo

6. *En realidad, lo único que es necesario saber en la asignatura de Física sobre el Cálculo diferencial es resolver las derivadas e integrales que aparecen en algunas fórmulas*

Muy de acuerdo De acuerdo Neutral En desacuerdo Muy en desacuerdo

La intención de esta pregunta es detectar si los estudiantes aspiran a comprender el uso del Cálculo diferencial en las clases de Física y si se sienten seguros cuando lo utilizan. Pretende también conocer su opinión sobre las consecuencias que el uso habitual del Cálculo tiene en el aprendizaje de la asignatura y en las actitudes de los alumnos.

De la misma manera que se hizo para estudiar la opinión de los profesores (p. 137, en este mismo capítulo), hemos propuesto a los estudiantes un total de seis afirmaciones para que señalen su grado de acuerdo con el contenido de cada una de ellas mediante una escala tipo Likert que incluye las siguientes respuestas: *Muy de acuerdo*, *De acuerdo*, *Neutral*, *En desacuerdo*, *Muy en desacuerdo*. Aunque en el momento del recuento sólo distinguiremos entre estudiantes que muestran su acuerdo y los que muestran su desacuerdo, hemos considerado oportuno incluir respuestas extremas tales como *Muy de acuerdo* y *Muy en desacuerdo* para evitar la inseguridad y la tendencia a huir de posturas categóricas que pueda provocar una cierta incomodidad en el encuestado dando lugar entonces a un elevado número de respuestas neutrales.

Para el análisis de las respuestas, y de acuerdo con los criterios que se acaban de expresar, calcularemos el porcentaje de estudiantes que están de acuerdo y el de aquellos que están en desacuerdo con el contenido de cada una de las seis afirmaciones.

4.3.2. Problemas

Para confirmar la ausencia de los indicadores de una adecuada comprensión de la diferencial en la Física, además de las preguntas cortas que ya han sido presentadas, analizaremos la resolución por estudiantes y profesores de algunos problemas de Física. Para ello, hemos preparado cuatro enunciados de problemas cuya resolución no pueda reducirse a la aplicación mecánica o memorística de una fórmula conocida, sino que requieren el planteamiento de alguna expresión diferencial y la aplicación de la estrategia del Cálculo.

La razón por la que hemos preparado más de un enunciado ha sido evitar que la falta de dominio de los conceptos físicos implicados en alguno de ellos pueda interferir en nuestros resultados. Para reducir esta misma interferencia en cada problema, cada enunciado se acompaña de un breve recordatorio de los conceptos físicos necesarios.

En concreto, los problemas serán pasados a profesores y/o estudiantes de COU y carreras universitarias de acuerdo con la siguiente distribución:

Problema		Muestra y condiciones
P1e:	Cálculo de la masa de una columna de aire	**Estudiantes** de COU y 1º curso de carreras científico-técnicas, en el mes de mayo.
P2e-p:	Cálculo del empuje que ejerce el agua sobre la pared de una piscina	**Profesores** de Física en activo, durante un curso de formación. **Estudiantes** de carreras científico-técnicas, en el mes de mayo.
P3p:	Cálculo del tiempo que tarda en vaciarse un depósito de agua	**Profesores** de Física en activo, durante un curso de formación.
P4e:	Cálculo de la fuerza que es necesario ejercer sobre una pared de una piscina para que no gire	**Estudiantes** de 2º curso o superior de carreras científico-técnicas, en el mes de mayo.

A continuación se presenta el encabezamiento y enunciado de cada problema, junto a las notas aclaratorias, si es el caso.

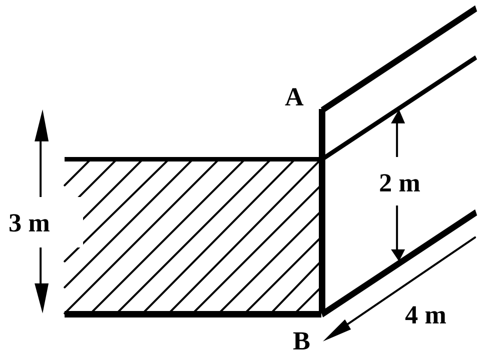
P1e **[para estudiantes de COU o 1er curso de carreras científico-técnicas]**

> **Resuelve el siguiente problema aportando las explicaciones que consideres necesarias cada vez que hagas uso de algún concepto o regla del Cálculo diferencial.**
>
> *Sabemos que la densidad del aire (ñ) disminuye con la altura (h) de acuerdo con la siguiente ecuación:* ñ = 1.29· (1 - 0.000125· *h*) *Esa ecuación está escrita para el Sistema Internacional, es decir, si h se escribe en* m *la densidad se obtiene en* kg/m^3*. El valor h=0 corresponde al nivel del mar.* ***¿Cuál será la masa de una columna cilíndrica de aire de 1 m^2 de base y que se eleva desde el nivel del mar hasta 2000*** **m** ***de altura?***

P2e-p **[para estudiantes de carreras científico-técnicas y profesores]**

Resuelve el siguiente problema aportando las explicaciones que consideres necesarias cada vez que hagas uso de algún concepto o regla del Cálculo diferencial.

Un depósito rectangular de 3 m de altura contiene agua hasta una altura de 2 m. Una de las paredes laterales (AB) del depósito tiene 4 m de anchura. ***Calcula el empuje que ejerce el agua sobre esa pared.***



Estas notas pueden servirte de ayuda para la resolución del problema. Recuerda que:

1. El empuje que ejerce el agua sobre la pared es debido a la presión hidrostática en el interior del líquido, y es perpendicular a esa pared.

2. La presión hidrostática en un punto del agua a una profundidad h puede calcularse mediante la siguiente ecuación: P=ñ.g.h (ñ es la densidad del agua: 1000 kg/m^3, g=9.8 m/s^2, h en metros y P en N/m^2).

P3p **[p • específico para profesores]**

Resuelve el siguiente problema aportando las explicaciones que consideres necesarias cada vez que hagas uso de algún concepto o regla del Cálculo diferencial.

Un depósito cilíndrico abierto por su cara superior tiene una altura ***H*** *y área de su base* ***S****. El depósito se encuentra vertical y lleno de agua.* ***Calcula el tiempo que tardará en vaciarse*** *cuando se hace un orificio de sección* ***s*** *en la cara inferior del cilindro por donde sale el agua libremente.*

Estas notas pueden servirte de ayuda para la resolución del problema. Recuerda que:

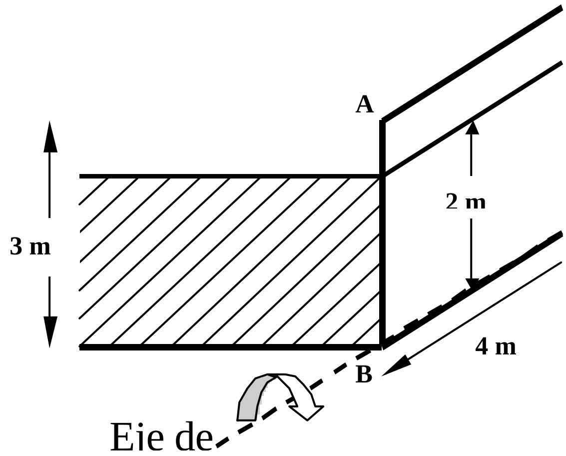
1. Si nos fijamos en dos secciones transversales (S_1, S_2) de un tubo por donde se mueve un fluido con velocidad v_1, v_2, la ecuación de continuidad afirma que: $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$

2. La velocidad de salida del agua a través del orificio viene dada por la expresión: $v = \sqrt{2gh}$ siendo h la profundidad a la que se encuentra el orificio respecto de la superficie libre.

P4e **[para estudiantes de 2º curso o superior de carreras científico-técnicas]**

Resuelve el siguiente problema aportando las explicaciones que consideres necesarias cada vez que hagas uso de algún concepto o regla del Cálculo diferencial.

Un depósito rectangular de 3 m de altura contiene agua hasta una altura de 2 m. Una de las paredes laterales (AB) del depósito tiene 4 m de anchura. Si esa pared AB puede girar en torno a un eje horizontal situado en su base B, ***¿qué fuerza habrá que ejercer sobre ella en su extremo superior A para impedir que se mueva?***



Estas notas pueden servirte de ayuda para la resolución del problema. Debes recordar que:

1. El agua ejerce una fuerza sobre la pared AB, perpendicular a la misma, debido a la presión hidrostática que existe en todos los puntos de su interior.

2. La presión hidrostática en un punto del agua a una profundidad *h* puede calcularse mediante la siguiente ecuación: P=ñ.g.h (donde ñ es la densidad del agua: 1000 Kg/m^3, g=9.8 m/s^2, h en metros, P en N/m^2).

3. Cuando se aplica una fuerza F perpendicular a la superficie de la pared AB y a una distancia D del eje de giro, esa fuerza produce un momento cuyo valor es: $M=F\cdot D$

4. Para que la pared permanezca en equilibrio, la suma de todos los momentos que pueden hacer que la pared gire en un sentido debe ser igual a la suma de todos los momentos que pueden hacer que la pared gire en sentido contrario.

De acuerdo con el objetivo de nuestro trabajo, al analizar las respuestas a los problemas no nos fijaremos en lo correcto o incorrecto de los argumentos físicos, sino que valoraremos, en caso de que hagan uso del Cálculo diferencial:

- Si intentan justificarlo y si lo hacen correctamente
- Si escriben alguna expresión diferencial, aunque sea directamente dentro de una integral, distinguiendo entre los que escriben la expresión correcta (salvo errores de tipo operativo) y los que escriben expresiones innecesarias o equivocadas por cualquier otra causa.
- Si asignan algún significado a la diferencial y, en caso afirmativo, lo identificaremos usando la clasificación ordenada ya utilizada en preguntas anteriores (ver pp. 121-122, 128, en este mismo capítulo). En caso de duda, optaremos siempre por la respuesta de menor número de orden, que corresponde a la más desfavorable para nuestra hipótesis.
- Si llegan a escribir expresiones integrales y, en su caso, cómo pasan de una expresión diferencial a una integral.
- Si al aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para hallar el valor de las integrales, argumentan o explican de algún modo que el valor se halle así.

Esperamos que los resultados de este análisis confirmen las dificultades de profesores y estudiantes para usar con sentido y comprensión la estrategia del Cálculo, incluso ante problemas sencillos para su nivel de conocimientos, como los que han sido seleccionados.

Para facilitar el análisis de la resolución de los problemas utilizaremos el estadillo que se muestra en la página siguiente.

Estadillo para analizar el uso que hacen profesores y estudiantes del Cálculo diferencial cuando resuelven un problema de física. (P1e, P2e-p, P3p, P4e)

¿Deja el problema (prácticamente) en blanco? .... SÍ - NO

¿Se limita a intentar resolver el problema como si fuese una situación lineal, sin hacer uso del Cálculo diferencial? .... SÍ - NO

¿Usa el Cálculo diferencial? .... SÍ - NO

¿Intenta justificar la necesidad de ese uso? 1 2 3

1. Justifica correctamente **2.** Justifica incorrectamente **3.** No justifica

¿Escribe expresiones diferenciales? 1 2 3 4

1. Correctas **2.** Equivocadas **3.** Innecesarias **4.** No escribe

¿Qué significado asigna a la diferencial? 1 2 3 4 5

1. Estimación lineal del incremento

2. Cantidad infinitesimal, así puede suponerse constante alguna magnitud

3. Cantidad infinitesimal o muy pequeña, sin más comentario explicativo

4. Ningún significado

5. Otro significado

¿Escribe integrales? 1 2 3 4

1. No escribe

2. Directamente, sin expresiones diferenciales previas

3. Paso automático desde la expresión diferencial

4. Como suma de muchos términos

¿Intenta argumentar el Teorema Fundamental? .... SÍ - NO

4.3.3. Problema *ejemplificador* en situación de enseñanza

El análisis de los problemas mencionados en el apartado anterior pretende confirmar las dificultades que tienen los profesores y estudiantes para usar el Cálculo diferencial comprendiendo lo que hacen. Para conocer mejor lo que ocurre en las clases, hemos preparado un problema adicional que los profesores de Física en activo que participan en un curso de formación, deberán resolver tal como lo harían con estudiantes de COU o un nivel similar.

La intención de este problema *ejemplificador* es poner de manifiesto que los profesores utilizan la diferencial de una forma automática y superficial cuando resuelven problemas de Física con estudiantes que todavía no están suficientemente familiarizados con los conceptos y técnicas propios del Cálculo; así: no justificarán el uso de la diferencial, ni explicarán su significado, ni la relacionarán con los conceptos de derivada o integral...

El problema ha sido seleccionado atendiendo a dos criterios:

a) que los conceptos implicados sean sencillos para evitar influencias debidas a una falta de familiaridad con el contenido físico, y

b) que el contenido se separe un poco de lo que habitualmente se incluye en los programas de este nivel para evitar así que los resultados puedan atribuirse a que las justificaciones, comentarios o aclaraciones pertinentes pudiesen haber sido ya realizadas en otros problemas o en el desarrollo teórico (por ejemplo, si el problema pidiese el trabajo realizado por una fuerza variable, las exigencias del Cálculo diferencial serían las mismas pero seguramente el profesor podría resolverlo simplemente aplicando la expresión correspondiente ya deducida en la teoría).

El problema **P1e** (ver p. 147, en este mismo capítulo) responde a estos requisitos; tan sólo ha sido necesario cambiar el encabezamiento para expresar el objetivo del mismo.

Problema *ejemplificador* en situación de enseñanza **[para profesores]**

El siguiente problema requiere el uso del Cálculo diferencial, pero es de un nivel adecuado para ser utilizado **con el fin de clarificar físicamente el uso del mismo.** Teniendo en cuenta esta intención, **te pedimos que lo desarrolles tal y como lo harías para alumnos de COU** -que aunque no es su primer contacto con el Cálculo tampoco lo dominan perfectamente- **incluyendo cuantos comentarios didácticos, explicaciones, aclaraciones... puedan contribuir a que los alumnos comprendan el significado físico de los conceptos y desarrollos que se utilizan**.

*Sabemos que la densidad del aire (*ñ*) disminuye con la altura (h) de acuerdo con la siguiente ecuación:* ñ = 1.29· (1 - 0.000125· *h*) *Esa ecuación está escrita para el Sistema Internacional, es decir, si h se escribe en* m *la densidad se obtiene en* kg/m^3*. El valor h=0 corresponde al nivel del mar.* ***¿Cuál será la masa de una columna cilíndrica de aire de 1 m^2 de base y que se eleva desde el nivel del mar hasta 2000 m de altura?***

Para el análisis de las respuestas de los profesores nos centraremos, igual que en las restantes ocasiones, en el uso con sentido del Cálculo diferencial, sin valorar lo correcto o incorrecto del razonamiento físico o de la manera de resolver el problema. En el siguiente estadillo hemos intentado recoger todos los aspectos a los que dirigiremos nuestra atención, facilitando así el análisis de cada problema y el de los datos obtenidos.

Estadillo para analizar el problema *ejemplificador* en situación de enseñanza resuelto por los profesores

¿Utiliza diferenciales?	SÍ - NO
¿Intenta justificar la necesidad de usar la diferencial?	SÍ - NO
¿Qué significado asigna a la diferencial?	1 2 3 4 5
1. Estimación lineal del incremento	
2. Cantidades muy pequeñas, explicando: así ñ (ó *h*) se mantiene constante	
3. Sólo descriptivo: cantidad infinitesimal o muy pequeña	
4. Ningún significado	
5. Otro significado	
¿Cómo introduce la integral?	1 2
1. Paso automático de la diferencial a la integral	
2. Como suma de muchos términos	
¿Justifica de alguna manera el Teorema Fundamental antes de usarlo?.......	SÍ - NO

4.3.4. Entrevista semiestructurada a estudiantes y profesores en formación

El análisis de las respuestas a las preguntas y problemas presentados hasta aquí permitirán obtener abundante información cuantitativa acerca de las dificultades y actitudes de los estudiantes en el uso del Cálculo diferencial, y de sus consecuencias en el estudio de la Física. Para obtener información complementaria, profundizando en las respuestas de los estudiantes, llevaremos a cabo una entrevista individual con una muestra reducida constituida por profesores de Física en formación y por alumnos destacados de COU (calificación de Notable o Sobresaliente en la asignatura de Física) seleccionados por su profesor.

La entrevista, de una duración aproximada de media hora, será realizada por el autor de la investigación, utilizando como base para el diálogo la resolución del problema **P1e** (ver p. 147, en este mismo capítulo) realizada por un supuesto alumno. En concreto, la entrevista se desarrollará siguiendo ordenadamente estas pautas:

1. El entrevistador advierte del carácter anónimo de la entrevista, y de su objetivo: obtener información sobre cómo entienden los estudiantes el

Cálculo diferencial que se usa en las clases de física, con vistas a mejorar la situación.

2. El entrevistador informa al entrevistado que, para trabajar sobre un caso práctico, van a dialogar sobre la resolución de un problema que ha realizado un compañero, pero que, antes de ello, debe intentar resolver el problema por él mismo en la hoja con el enunciado que se le entrega. Se le advierte que no llegará a mostrar tal resolución, pues la finalidad de este paso es que se familiarice con el contenido del problema.

3. El entrevistador muestra la resolución de un supuesto compañero de la que se han quitado explicaciones, conservando sólo algunas fórmulas y expresiones. Para favorecer la concentración del entrevistado, hemos dividido la resolución mediante seis líneas horizontales en un total de siete franjas que iremos destapando paulatinamente: al principio mostraremos sólo la primera franja, y al final mostraremos ya el problema completo. Al destapar cada franja formularemos las preguntas que se indican en ella mediante un pequeño número.

En el cuadro 4.IV se muestra la resolución del problema que servirá de base a la entrevista, dividida en franjas (líneas horizontales punteadas) con pequeños números que remiten a la pregunta que el entrevistador debe hacer en ese momento. Para que la resolución parezca más realista, y por tanto criticable, presentamos una resolución manuscrita y con letra de alumno.

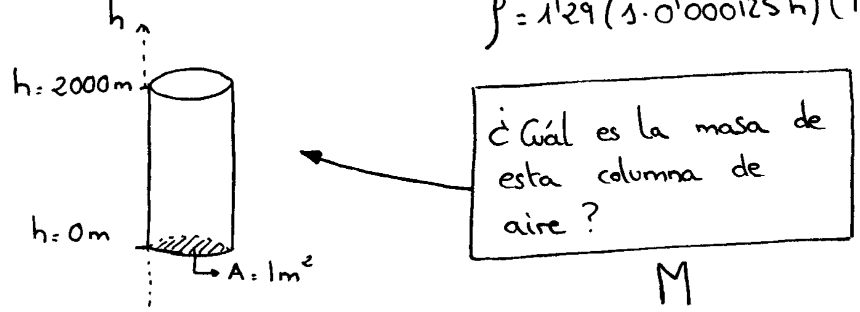
Cuadro 4.IV. Documento que sirve de base para la entrevista

ENUNCIADO:

Sabemos que la densidad del aire (ñ) disminuye con la altura (*h*) de acuerdo con la siguiente ecuación: ñ = 1.29· (1 - 0.000125· *h*) Esa ecuación está escrita para el Sistema Internacional, es decir, si *h* se escribe en metros la densidad se obtiene en kg/m^3. El valor *h*=0 corresponde al nivel del mar. ***¿Cuál será la masa de una columna cilíndrica de aire de 1 m^2 de base y que se eleva desde el nivel del mar hasta 2000 m de altura?***

RESOLUCIÓN:

$$\rho = 1'29\,(1 \cdot 0'000125\,h)\ (\mathrm{Kg}/m^3)$$



$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \Rightarrow \Delta m = \rho \cdot \Delta V \xrightarrow{1} dm = \rho \cdot dV \quad 2\ 3$$

O bien: $\downarrow 1$

$$\rho = \frac{dm}{dV} \overset{4}{\Longrightarrow} dm = \rho \cdot dV$$

Como: $dV = A \cdot dh$ 1 2 3 entonces: $dm = \rho \cdot A \cdot dh$

Integrando: $$\int_0^M dm = \int_0^{2000} \rho \cdot A \cdot dh \quad 5$$

$\downarrow 6$

$$M = \int_0^{2000} 1'29\,(1 - 0'000125\,h) \cdot 1 \cdot dh = 1'29 \int_0^{2000} (1 - 0'000125\,h)\,dh$$

$\downarrow 6$

$$M = 1'29 \left[h - 0'000125\,\frac{h^2}{2}\right]_0^{2000} = 1'29 \left[2000 - 0'000125\,\frac{(2000)^2}{2}\right] = 2.257'5\,\mathrm{kg}$$

Las seis primeras preguntas del guión de la entrevista (cuadro 4.V) se formulan en el momento que se señala el número correspondiente en la resolución (cuadro 4.IV). Las tres últimas preguntas tienen un carácter más general sobre su experiencia cuando se usa el Cálculo diferencial en las clases y textos de Física.

Cuadro 4.V. Guión semiestructurado para la realización de la entrevista

1. *¿Por qué razón hace ese paso?*
(Ya sea el paso de incremento a diferencial o de cociente incremental a cociente diferencial)

2. *¿Cuál es el significado de esa expresión?*
(Insistiremos buscando una explicación que vaya más allá del uso de palabras clave o lectura literal)

3. *¿Cuánto puede valer* d*m*, d*V...?*
(Si contestan algún valor numérico, indagaremos sobre su significado y el carácter funcional)

4. *¿Cómo puede leerse esa expresión? ¿es correcto despejar la diferencial?*
(Nos referimos a la expresión de la derivada, y queremos saber si la consideran como un verdadero cociente de diferenciales)

5. *¿Cuál es el significado de esas integrales?*
(Pueden quedarse en la idea de antiderivada, o ir más allá identificando *sumas de Riemann*)

6. *¿Por qué el resultado de esa integral es precisamente ese?*
(Indagaremos para ver si son capaces de justificar por qué la integral de una diferencial es un incremento *macroscópico*, o por qué precisamente las *sumas infinitas* se calculan mediante antiderivadas)

7. *¿Te enteras bien cuando tu profesor o el libro de texto usa el Cálculo diferencial en las clases de Física?*

8. *¿Dónde te has enterado mejor del uso y significado del Cálculo diferencial, en las clases de Física o de Matemáticas?*

9. *¿En general, tú crees que el uso del Cálculo diferencial influye en que a los alumnos les guste más o menos la Física? ¿por qué crees que ocurre eso? ¿Y en tu caso, crees que sucede lo mismo?*

Debe advertirse que cada pregunta tiene un enunciado general, pero que en cada caso el entrevistador la explicará o reformulará de acuerdo con las respuestas de cada alumno, guiado siempre por el objetivo de extraer la máxima información posible. El guión resultante debe ser interpretado entonces con criterio flexible, y no como una secuencia rígida de preguntas. Con la misma intención, y teniendo en cuenta nuestro objetivo, para evitar situaciones de bloqueo debido a una falta de familiaridad con la situación física que aborda el problema, en cada pregunta concreta haremos referencia a otras situaciones físicas si es necesario.

Las entrevistas serán grabadas en audio y, posteriormente, se transcribirán literalmente. Para la presentación de resultados reproduciremos fragmentos representativos de las distintas respuestas a las preguntas, de acuerdo con las categorías ya establecidas en los estadillos de las distintas cuestiones ya presentados en este mismo capítulo.

Capítulo 5

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LA CONTRASTACIÓN DE LA PRIMERA HIPÓTESIS

Con el fin de confirmar nuestra primera hipótesis, en el capítulo anterior la hemos concretado en tres grandes derivaciones que se referían a los libros de texto, los profesores y los estudiantes, que a su vez hemos operativizado en un total de veinte consecuencias directamente contrastables. Al mismo tiempo, hemos diseñado y presentado una variedad de instrumentos experimentales destinados a contrastar tales consecuencias.

En este capítulo presentaremos los resultados obtenidos con esos instrumentos experimentales, en primer lugar los que se han aplicado a libros de texto, y después los que se han aplicado a profesores y estudiantes. Para facilitar la lectura, se presentarán los resultados agrupados en torno a cada uno de los indicadores de una adecuada comprensión de la diferencial en la Física.

Antes de exponer los resultados conviene indicar que para el tratamiento estadístico de los mismos hemos utilizado el criterio habitual que se expone en distintos manuales de estadística sobre el tema (Welkowitz *et al.*, 1976), que es de gran sencillez cuando el número de individuos de la muestra es mayor de 30, como es el caso de este estudio. Para decidir si existen o no diferencias significativas entre los resultados obtenidos por los distintos grupos se ha utilizado el parámetro estadístico *t de Student* para el nivel de confianza habitual del 5% o menor.

5.1. RESULTADOS OBTENIDOS AL ANALIZAR CÓMO SE INTRODUCE Y UTILIZA LA DIFERENCIAL EN LOS LIBROS DE TEXTO Y MANUALES DE FÍSICA

Los dos cuestionarios diseñados se han aplicado a un total de 45 textos: siete de 1º Bachillerato LOGSE, catorce de 3º BUP, dieciséis de COU y ocho de primer curso universitario; el **Anexo 4** contiene una relación nominal de todos los textos analizados. Hemos seleccionado textos editados en su mayoría durante los últimos veinte años, a ser posible las últimas ediciones, y cuyo uso sea relativamente frecuente en las aulas de nuestro país, o al menos sean consultados por profesores y estudiantes.

Teniendo en cuenta el número de textos que componen la muestra de cada nivel, los resultados se expresan en números absolutos; sólo cuando se trate de resultados globales, donde no se distingue el nivel de los textos, se indica el porcentaje y la desviación estándar. Hemos seleccionado fragmentos literales de algunos textos para ilustrar los resultados, aunque para facilitar la lectura del presente trabajo, la mayoría han sido incluidos en el **Anexo 5**.

Hemos de advertir que los textos de Física y Química de 1º de Bachillerato LOGSE, en su mayor parte, no hacen uso del Cálculo diferencial. De los siete textos analizados, ninguno utiliza el concepto de diferencial con sentido en sí misma, y sólo uno de ellos la incluye dentro de la derivada y la considera un cociente diferencial. No se trata de que los textos de este nivel no estudien tópicos similares a los de otros niveles (por ejemplo, 3º BUP), sino que los abordan de forma cualitativa o haciendo uso de soluciones particulares en cada caso. Esta conclusión inicial ha de considerarse con cierta provisionalidad, a falta de que se editen textos de este nivel de manera generalizada, si bien en los programas oficiales de Matemáticas y Física no se menciona el concepto de diferencial. Debido a esta ausencia del concepto de diferencial, las tablas de resultados no hacen mención de los textos de 1º de Bachillerato que han sido analizados.

5.1.1. Resultados que muestran la ausencia de justificación del uso de la diferencial en los textos de Física, incluso en los que pertenecen a niveles en los que se introduce por primera vez el Cálculo diferencial.

Como se recordará, la red de análisis de textos nº 1 (cap. 4, p. 112) pretendía realizar un análisis global del texto, y en concreto su apartado A constaba de dos preguntas sobre la justificación del uso de la diferencial. Previamente, hemos comprobado que el 92% de los textos analizados (12 de 3º BUP, 15 de COU y 8 de 1º Universidad) utilizan expresiones o términos diferenciales con sentido en sí mismos, es decir, no se limitan a incluir la diferencial dentro de expresiones como la derivada o la integral, sino que escriben expresiones como: $d\phi = F \cdot dt$, o hacen comentarios sobre términos tales como d*s* o dè.

Los resultados que se presentan en la tabla 5.I sólo tienen en cuenta, evidentemente, los textos que utilizan la diferencial *con sentido en sí misma*.

TABLA 5.I. Cómo se justifica el uso de la diferencial en los libros de texto	3º BUP (N=12) n	COU (N=15) n	1º Uni. (N=8) n	**Todos** (N=35) **%** (sd)
Se hace referencia (correcta o no) a la insuficiencia del cálculo ordinario al menos en una ocasión	7	11	6	**68.6** (8.0)
Se hace referencia (correcta o no) a la insuficiencia del cálculo ordinario en la mitad o más de los contextos nuevos	2	0	0	**5.7** (4.0)

Estos resultados muestran ya claras deficiencias en la justificación de la diferencial, sin entrar en valorar la calidad de esa justificación: aunque dos de cada tres textos intentan poner de manifiesto *en alguna ocasión* la insuficiencia del cálculo ordinario, sólo el 5% insisten en mostrar, *al menos en la mitad de las ocasiones*, la necesidad de recurrir al concepto de diferencial cuando aparece en nuevos contextos. Por tanto, **es común entre los textos la ausencia de justificación en la mitad o más de los distintos tópicos que se tratan, sin incluir siquiera un breve comentario que ocupe una sola línea** (ver **Anexo 5**, apartado 5.1).

La red de análisis de textos nº 2 (cap. 4, p. 119) trataba de identificar el contenido de los comentarios destinados a justificar el uso de la diferencial, y la evolución de los mismos a lo largo de un mismo texto; para ello, se analiza en cada texto tres tópicos correspondientes a distintos *momentos clave* del uso de la diferencial en un curso de Física (cap. 4, p. 120). Como se recordará, clasificamos los tipos de comentario en tres grandes grupos: *comentario correcto*, insertando el uso de la diferencial en una estrategia más general, *comentarios con significado* que indican alguna ventaja en el uso de la diferencial (dos tipos de comentario, el segundo de ellos erróneo), y *comentarios sin significado* (cuatro tipos de comentario). Para identificar mejor cada uno de estos tipos de comentario, en el apartado 5.5 del **Anexo 5** se ilustra cada uno de ellos con un fragmento literal extraído de un libro de texto (excepto los dos primeros tipos, que no se han encontrado en ningún texto). Los resultados se presentan en la tabla 5.II.

TABLA 5.II. Tipo de comentario que se realiza en los textos de Física para justificar el uso de la diferencial al tratar distintos tópicos

	TRABAJO				*ENERGÍA CONDENSADOR*				*ABSORCIÓN LUMINOSA*			
	3º BUP N=11	COU N=15	1º Univ. N=7	Todos N=33 **%** (sd)	3º BUP N=5	COU N=8	1º Univ. N=7	Todos N=20 **%** (sd)	3º BUP N=7	COU N=14	1º Univ. N=3	Todos N=24 **%** (sd)
1. Comentario correcto, insertando el uso de la diferencial en una estrategia más general	0	0	0	**0** (-)	0	0	0	**0** (-)	0	0	0	**0** (-)
2. Comentarios con algún significado:												
2.1. La existencia de una situación no uniforme obliga a hacer una estimación lineal	0	0	0	**0** (-)	0	0	0	**0** (-)	0	0	0	**0** (-)
2.2. La existencia de una situación no uniforme obliga a tomar cantidades infinitesimales en las que puede considerarse uniforme	4	8	5	**51.5** (8.8)	0	1	1	**10.0** (6.9)	0	0	0	**0** (-)
3. Comentarios carentes de significado:												
3.1. Existen magnitudes variables (y sin más aclaración usa diferenciales)	2	1	1	**12.1** (5.8)	0	0	1	**5.0** (5.0)	0	0	0	**0** (-)
3.2. Simple referencia nominal al valor *muy pequeño* de una magnitud	1	5	1	**21.2** (7.2)	1	0	2	**15.0** (8.2)	1	1	2	**16.7** (7.8)
3.3. Términos o frases hechas sin significado	2	1	0	**9.1** (5.1)	1	3	0	**20.0** (9.2)	0	3	0	**12.5** (6.9)
3.4. Ningún comentario	2	0	0	**6.1** (4.2)	3	4	3	**50.0** (9.5)	6	10	1	**70.8** (9.5)

Los resultados se comentan por sí solos. En concreto, cabe destacar que:

- Ningún texto justifica correctamente el uso de la diferencial
- La mitad de los textos intenta justificarlo en una de las primeras ocasiones (tópico: *Trabajo*), pero lo hacen de forma errónea al considerar que cuando el incremento es muy pequeño el comportamiento se hace **realmente** uniforme (ver gráfico 5.I)
- Este intento sólo se produce en una de esas primeras ocasiones: después, más del 90% de los textos no presta atención a la justificación. En particular, cuando se avanza en el texto, un alarmante 70% no incluyen comentario alguno (*frases hechas*, *ningún comentario*) antes de usar la diferencial (ver gráfico 5.I), en mayor proporción cuanto más básico es el curso al que pertenece el texto.

Comentario para justificar el uso de la diferencial	**Trabajo**	**E condensador**	**Absorción**
	% textos	% textos	% textos
Con significado (incorrecto)	51.5	10.0	0
Ningún comentario	15.2	70.0	83.3

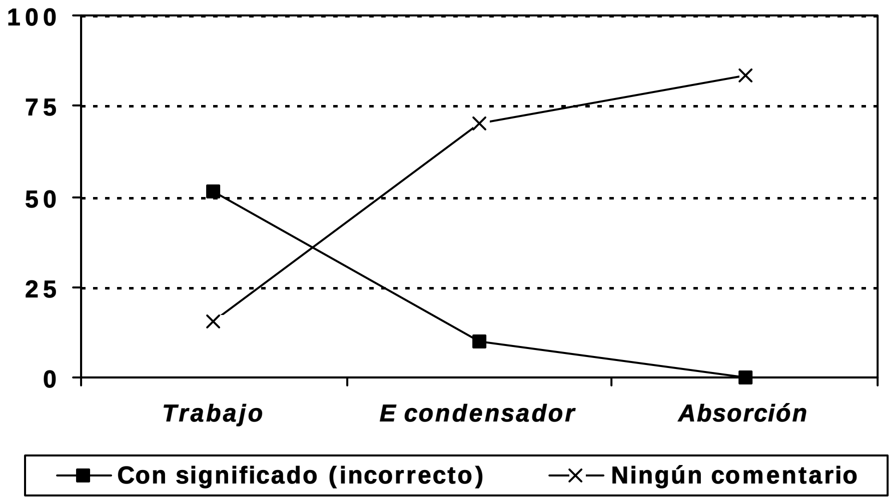


Gráfico 5.I. Resultados *extremos* al analizar el comentario que se realiza en el texto para justificar el uso de la diferencial, en distintos tópicos de Física

En el cuadro 5.I se reproduce un fragmento de un texto en el que se escriben expres[illegible]e sea, para justificar el uso de la diferencial o explicar su significado, a pesar de tratarse de una situación propicia para destacar el carácter hipotético de la diferencial y mostrar la estrategia global que utiliza el Cálculo diferencial.

CUADRO V.1. Ejemplo de uso de la diferencial *sin ningún comentario* (texto de COU)

> (...) Experimentalmente se comprueba que, para una onda plana, al atravesar un medio de espesor d*x*, se produce una variación d*I* en su intensidad. Esa variación es directamente proporcional a la intensidad de la onda y a la distancia, dependiendo de las características del medio; dichas características se engloban en una constante â, denominada coeficiente de absorción del medio.
> Matemáticamente, podemos escribir: d*I* = -*I*· â· d*x* (...)

Implícitamente, existe una identificación –errónea- entre diferencial e incremento; el cambio de notación podría hacerse para recordar que, en el caso de la diferencial, se trata de un incremento *infinitesimal*, que es la concepción que se declara en otros tópicos de ese mismo texto. No obstante, algunos textos (por ejemplo, el *Solucionario* de problemas de esta misma editorial) realizan cálculos de Ä *I* sustituyendo directamente en la expresión diferencial, a pesar de que no se trata de variaciones muy pequeñas. Esta identificación entre diferencial e incremento conduce a una clara contradicción entre la premisa de partida y el resultado que se obtiene: mientras la premisa afirma que la variación de intensidad es proporcional al espesor, la conclusión afirma que esa variación no es proporcional sino –en este caso concreto- exponencial. Esta identificación errónea entre Ä*I* y d*I* también lleva a muchos textos a considerar que la expresión diferencial se deduce directamente de medidas experimentales; sin embargo, como ya hemos aclarado, la expresión diferencial constituye una hipótesis sobre un comportamiento imaginario, y por tanto no puede contrastarse directamente más que a través del resultado al que conduce.

El conjunto de los resultados presentados confirman que **los textos de Física usan el concepto de diferencial sin prestar la mínima atención a su justificación**, fomentando así unas pautas de comportamiento operativista y mecánico desde el comienzo de la formación recibida.

5.1.2. Resultados que muestran la ausencia de explicaciones sobre el significado de la diferencial en los textos de Física

El apartado B de la red de análisis de textos nº 1 (cap. 4, p. 112) constaba de cinco ítems sobre el significado asignado a la diferencial. Los resultado se presentan en la tabla 5.III, en la que sólo se tienen en cuenta, evidentemente, los textos que utilizan la diferencial *con sentido en sí misma*.

TABLA 5.III. Qué significado se asigna a la diferencial en los libros de texto	3º BUP (N=12) n	COU (N=15) n	1º Uni. (N=8) n	**Todos** (N=35) **%**	(sd)
Se asigna algún significado a la diferencial	9	15	8	**91.4**	(4.8)
Correcto: d*f* es una estimación lineal del Ä*f*	0	0	0	**0**	(-)
Incorrecto: d*f* es un Ä*f* *muy pequeño*	9	15	8	**91.4**	(4.8)
En alguna ocasión asigna un valor numérico a d*f*	0	1	0	**2.9**	(2.9)
Alguna vez comenta que puede tomar distintos valores	0	0	0	**0**	(-)

Ningún texto considera a la diferencial como una estimación lineal del incremento. Al contrario, el único significado que se le asigna es el de ser una cantidad infinitesimal al estilo de la diferencial de Leibniz (ver cap. 1, pp. 32-39), lo que, además de ser erróneo, constituye una propiedad que puede ser cumplida por infinitas expresiones que no serían la diferencial.

A veces se intenta precisar el significado de esa *cantidad infinitesimal*, al estilo de la primera definición de Cauchy (ver cap. 1, p. 41), tal como se muestra en el cuadro 5.II; de acuerdo con esa definición, ds (y cualquier diferencial) debería ser siempre nula. Para otros ejemplos, ver **Anexo 5**, apdo. 5.3.

CUADRO 5.II. Ejemplo de identificación entre diferencial y cantidad infinitesimal (Texto de 1º Univ.)

(...) Supóngase que descomponemos el trayecto curvo (...) en segmentos sucesivamente más pequeños Ä*s*. Cuando Ä*s* se hace infinitesimalmente pequeño: $\underset{\text{Ä}s \to 0}{lím}\ \text{Ä}s = ds$

Por otra parte, ninguno de los textos analizados (excepto uno de COU) asigna valor numérico concreto a la diferencial, y ninguno reconoce su carácter funcional.

5.1.3. Resultados que muestran la ausencia de explicaciones sobre la relación entre la diferencial y la derivada en los textos de Física

El apartado C de la red de análisis de textos nº 1 (cap. 4, p. 112) constaba de dos preguntas sobre la relación que se establece entre la diferencial y la derivada. Previamente, hemos comprobado que el 97.4% de los textos analizados utilizan la diferencial dentro de la derivada, es decir, escriben la expresión: df/dx para referirse a la derivada de la función. Los resultados que se presentan en la tabla 5.IV sólo tienen en cuenta, evidentemente, los textos que escriben ese tipo de expresiones.

TABLA 5.IV. Qué relación se establece entre diferencial y derivada en los libros de texto	3º BUP (N=14) n	COU (N=15) n	1º Uni. (N=8) n	**Todos** (N=37) **%**	(sd)
Usa la derivada como cociente diferencial: *despeja*, *divide*... alguna vez	11	15	8	**91.9**	(4.5)
Explica (no sólo usa) la concepción de la derivada como cociente diferencial	2	0	5	**18.9**	(6.5)

La notación habitual que los alumnos han usado en las clases de Matemáticas para referirse a la derivada ha sido la de Lagrange: *f'*; el cambio a la notación df/dx podría interpretarse simplemente como la introducción de un nuevo simbolismo para especificar la variable respecto a la cual se deriva, es decir, como la introducción de un operador (*d/dx*) que actúa sobre la función. Sin embargo, el 92% de los textos va más allá al considerar esta nueva expresión (*df/dx*) como un cociente de dos magnitudes: despejan de la derivada ("si la aceleración es 3t: dv/dt=3t, entonces: dv=3$t\cdot$ dt"), y dividen para obtener la derivada ("dW/dt = $F\cdot$ dr/dt = $F\cdot$ v") (ver ejemplos en el **Anexo 5**, apdo. 5.4). Pero esta nueva interpretación no se explica en casi ningún texto: menos del 20% incluye algún comentario destinado a aclarar que la derivada va a ser interpretada como un cociente, aunque sea identificando erróneamente los términos df, dx con cantidades infinitesimales.

Así pues, en más del 80% de los textos se pasa de una nueva simbolización a una nueva conceptualización sin explicación alguna. Paradójicamente, esta carencia es más acusada en los cursos de iniciación: ningún libro de COU ofrece explicación, y tan sólo se ofrece en dos de 3º BUP.

5.1.4. Resultados que muestran la ausencia de explicaciones en los textos de Física sobre el cálculo de *sumas infinitas* mediante *primitivas* o *antiderivadas*

El apartado D de la red de análisis de textos nº 1 (cap. 4, p. 112) constaba de tres preguntas sobre el uso de la integral como *sumas de Riemann* y la justificación del Teorema Fundamental. Previamente, hemos comprobado que el 92.1% de los textos analizados utilizan la diferencial dentro de la integral. Sólo esos textos forman la muestra cuyos resultados se presentan en la tabla 5.V.

TABLA 5.V. Qué concepción de la integral se usa en los libros de texto, y cómo se justifica el Teorema Fundamental	3º BUP (N=12) n	COU (N=15) n	1º Uni. (N=8) n	**Todos** (N=35) **%** (sd)
Usa la integral como *sumas de Riemann*	8	15	8	**88.6** (5.5)
Usa el razonamiento incorrecto: “$\int dM$ = Ä*M* por ser una suma de *pequeños* Ä*M*”	7	15	7	**82.9** (6.5)
Llega a justificar, al menos intuitiva o geométricamente, el Teorema Fundamental	1	0	2	**8.6** (4.8)

Más del 88% de los textos de Física que escriben integrales presentan a la integral como *sumas de Riemann*, y no como sinónimo de *primitiva* o *antiderivada*. Sin embargo, menos del 10% aporta alguna justificación para mostrar que el cálculo de esas *sumas infinitas* se reduce al cálculo de la función primitiva.

Además, el 83% de los textos que usan integrales utiliza en alguna ocasión el argumento erróneo según el cual la integral de una diferencial conduce al incremento porque la suma de muchos incrementos pequeñísimos (*aproximados*) acabará dando un incremento *exacto* (ver **Anexo 5**, apdo 5.5).

5.1.5. Resultados que muestran la ausencia de comentarios sobre la naturaleza hipotética de las expresiones diferenciales en los textos de Física

El último ítem de la red de análisis de textos nº 1 (cap. 4, p. 112) se refería a la diferencial como hipótesis, y el resultado obtenido es rotundo: **ninguno de los textos de Física analizados menciona, ni siquiera mediante un breve comentario, la naturaleza hipotética de alguna de las expresiones diferenciales que escribe.**

5.2. RESULTADOS SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LA DIFERENCIAL Y LA ACTITUD QUE PROVOCA SU USO ENTRE PROFESORES Y ESTUDIANTES

Para contrastar las catorce consecuencias de nuestra hipótesis, siete referidas al uso de la diferencial por los profesores y otras siete referidas a su uso por los estudiantes (cap. 4, pp. 108-109), hemos diseñado y presentado ya en el capítulo anterior once cuestiones cerradas y semiabiertas, cuatro problemas (ver ***hojas recordatorio*** adjuntas) y una entrevista individual semiestructurada.

Las cuestiones y los problemas se han pasado a un total de 210 profesores y 732 estudiantes, en las condiciones que se han descrito en el diseño (cap. 4, pp. 123-124).

En concreto, los **210 profesores de Secundaria** en activo asistían a un curso de formación sobre “La introducción del Cálculo diferencial en la enseñanza de la Física”, que hemos impartido durante los últimos años. Las cuestiones se pasaron siempre al inicio de ese curso, de manera individual y anónima; cada profesor recibía, por término medio, un problema y tres cuestiones referidas a distintas consecuencias, y el tiempo requerido para su contestación no era superior a los cuarenta minutos.

Para la elección de la muestra de estudiantes hemos procurado que exista suficiente diversidad tanto en el origen de los alumnos como en el profesor concreto encargado de impartir la asignatura. En el caso de COU, se han escogido grupos completos de alumnos de orientación científica (matriculados en Física y Matemáticas), pertenecientes a cuatro Institutos de Almería capital y dos de la provincia, repartidos entre siete profesores distintos. En cuanto a estudiantes universitarios, hemos escogido grupos completos de cuatro universidades de otras tantas capitales (Almería, Alicante, Madrid y Valencia), de distintas carreras científico-técnicas y distintos cursos, repartidos entre nueve profesores diferentes.

Hemos considerado conveniente, para la presentación de resultados, dividir la muestra de estudiantes universitarios en dos grupos: los de 1º curso y los de cursos superiores ($\geq$ 2º curso), para discernir si los malos resultados son achacables al fracaso *en general* que suele producirse en el primer curso. Por la facilidad para obtener grandes grupos, la mayoría de los alumnos de cursos superiores son de 2º. En concreto, la muestra está formada por **732 estudiantes** distribuidos de la siguiente forma:

270 estudiantes de las asignaturas de Física y Matemáticas de COU

283 estudiantes de la asignatura de Física en 1er curso universitario:

103 de 1º de carreras técnicas (Ingeniería Técnica Agrícola o de Obras Públicas, Arquitectura Técnica e Informática)

102 de 1º de Ciencias Físicas

45 de 1º de Ciencias Biológicas

33 de 1º de Informática Superior

184 estudiantes de la asignatura de Física entre 2º y 5º curso universitario:

79 de 2º de Ciencias Químicas

65 de 2º de Ciencias Físicas

19 de 3º de Ciencias Físicas

21 de 5º de Ciencias Físicas

Las cuestiones se pasaron a los **estudiantes** en el mes de mayo, en presencia del investigador o algún colaborador, durante la clase de Física. Como en el caso de los profesores, cada estudiante recibía, por término medio, un problema y tres cuestiones referidas a distintas consecuencias, y el tiempo requerido para su contestación no era superior a los cuarenta minutos.

La entrevista individual se ha llevado a cabo con siete estudiantes de COU y cuatro profesores en formación. Los alumnos de COU, pertenecientes a dos Institutos de Almería capital, fueron seleccionados por sus profesores de Física -tres en total- por su alto rendimiento en la asignatura. Los profesores en formación asistían al CAP y eran Licenciados en Ciencias Químicas. Todos los entrevistados, así como sus profesores, habían recibido la formación habitual sobre el uso del Cálculo diferencial, por lo que pueden considerarse pertenecientes a grupos de control.

Como ya se ha advertido, la intención de esta entrevista no era obtener datos cuantitativos, sino asegurar e ilustrar nuestra interpretación de las respuestas obtenidas por escrito. Con carácter general, podemos adelantar que los resultados de la entrevista han puesto de manifiesto la debilidad y falta de consistencia de las respuestas y argumentos de los estudiantes, reflejo de la falta de comprensión y el uso mecánico del Cálculo.

Como ya se ha hecho en el apartado correspondiente a los libros de texto, los resultados no se presentarán para cada instrumento particular, sino agrupados en torno a cada uno de los indicadores de una adecuada comprensión de la diferencial en la Física. En el caso de los problemas, teniendo en cuenta nuestro interés en el dominio del Cálculo y no en el dominio de un tópico específico, se presentarán los resultados para cada grupo de la muestra sin especificar a qué problema concreto se refieren, después de haber comprobado que no existen diferencias estadísticamente significativas. En el caso de las entrevistas, en lugar de realizar transcripciones completas, se incluirán fragmentos literales para ilustrar algunos de los resultados

5.2.1. Resultados que muestran que los profesores y estudiantes no saben cuándo y por qué es necesario usar la diferencial

Las cuestiones C1e-p y C5e (cap. 4, pp. 126 y 139), así como el análisis de los problemas resueltos (cap. 4, p. 146) y del problema *ejemplificador* (cap. 4, p. 152), estaban relacionados con la justificación del uso de las expresiones diferenciales. Los resultados más importantes se presentan en la tabla 5.VI, y muestran con rotundidad **la falta de comprensión de los profesores y estudiantes sobre las razones que obligan a usar expresiones diferenciales, y la falta de atención que prestan a este aspecto cuando usan el Cálculo diferencial para resolver problemas, auque se trate de niveles de enseñanza en los que se inicia el uso del Cálculo diferencial**.

TABLA 5.VI. Justificación del uso de expresiones diferenciales entre profesores y estudiantes		**COU**		**1º Univ.**		**≥ 2º Univ.**		**Profesores**	
		%	(sd)	%	(sd)	%	(sd)	%	(sd)
C1e-p: ¿Cuál es la causa que justifica con mayor precisión el paso de Δ*v*=*a*· Δ*t* a la expresión: d*v*=*a*· d*t*?		(N=149)		(N=92)		(N=90)		(N=160)	
Respuesta correcta:	**Porque la aceleración depende del tiempo ....**	**10.7**	(2.5)	**2.2**	(1.5)	**3.3**	(1.9)	**11.3**	(2.5)
Respuestas incorrectas*:	Porque estamos considerando tiempos infinitamente pequeños	57.7	(4.1)	73.9	(4.6)	82.2	(4.1)	68.8	(3.7)
	Porque la velocidad depende del tiempo	17.4	(3.1)	10.9	(3.3)	6.7	(2.6)	11.3	(2.5)
	Porque nos interesa concluir en una derivada o una integral	20.1	(3.3)	15.2	(3.8)	12.2	(3.5)	6.9	(2.0)
	No lo sé	4.7	(1.7)	4.3	(2.1)	2.2	(1.6)	0.6	(0.6)
C5e: Consideran *imprescindible* usar el Cálculo diferencial para calcular la rapidez instantánea en...		(N=117)		(N=89)		(N=43)			
	x = 12	5.1	(2.0)	11.2	(3.4)	30.2	(7.1)		
	$x = 8 + 3t^2$	87.2	(3.1)	91.0	(3.0)	97.7	(2.3)		
	$x = 6t - 2$	72.6	(4.1)	80.9	(4.2)	93.0	(3.9)		
	Correctamente: sólo el caso no lineal	**16.2**	(3.4)	**11.2**	(3.4)	**4.7**	(3.2)		
Cuando resuelven los problemas:		P1e (N=57)		P1e, P2e-p (N=95)		P2e-p, P4e (N=105)		P2e-p, P3p (N=94)	
	Utilizan el Cálculo diferencial	19.3	(5.3)	50.5	(5.2)	44.8	(4.9)	80.9	(4.1)
	Intentan justificar la necesidad de usarlo	1.8	(1.8)	2.1	(1.5)	4.8	(2.1)	13.8	(3.6)
	Lo justifican correctamente	**1.8**	(1.8)	**1.1**	(1.1)	**4.8**	(2.1)	**9.6**	(3.1)
Cuando resuelven el problema *ejemplificador* en situación de enseñanza:								(N=63)	
	Utilizan diferenciales							93.7	(3.1)
	Intentan justificar la necesidad de usar diferenciales							**34.9**	(6.1)

(*) Teniendo en cuenta que en ocasiones señalan más de dos respuestas incorrectas, la suma de los porcentajes es superior a 100

Para complementar estos resultados, podemos añadir los siguientes comentarios:

1. Tal como esperábamos, la respuesta incorrecta más frecuente para justificar el paso de incrementos (Ä*v*=*a*· Ä*t*) a diferenciales (d*v*=*a*· d*t*) consiste en señalar *el pequeño valor del intervalo de tiempo*. Esta respuesta, además, es elegida con un alto grado de seguridad, como se muestra en el gráfico 5.II.

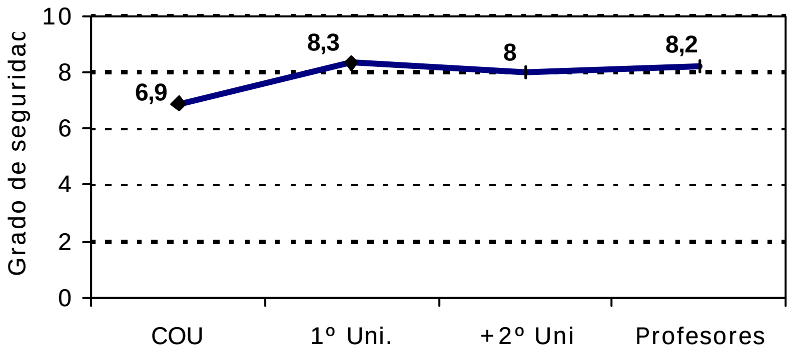


Gráfico 5.II. Grado de seguridad expresado al señalar la respuesta: *Porque estamos considerando tiempo infinitamente pequeños*, para justificar el paso de incrementos (Ä*v*=*a*· Ä*t*) a diferenciales (d*v*=*a*· d*t*)

Los alumnos no sólo contestan equivocadamente sino que, además, se confiesan más seguros al actuar así: mientras el grado de seguridad medio con que señalan la respuesta *...tiempos infinitamente pequeños* es 7.7, cuando señalan la *respuesta correcta* es 6.3, existiendo diferencias significativas entre ambos resultados (á<0.01). Una vez más, se trata de un reflejo de la actitud operativista, no reflexiva, que acompaña al uso del Cálculo diferencial, proporcionando una apariencia de mayor seguridad que el uso reflexivo.

El grupo de COU es el que manifiesta un grado de seguridad más bajo en sus respuestas (á<0.01). Como podremos comprobar en las respuestas a las restantes cuestiones, los estudiantes de COU no presentan una falta de comprensión mayor que el resto de sus compañeros, por lo que esta falta de seguridad debe atribuirse a que aún no se ha producido una identificación entre Cálculo y algoritmos mecánicos, y son más conscientes así de sus carencias de comprensión.

2. Las entrevistas, al recoger el pensamiento de cada individuo, reflejan la inseguridad y debilidad de los argumentos. No sólo aparecen los mismos tipos de respuestas incorrectas que se ofrecían en la cuestión C1e-p, de opción múltiple, sino que un mismo individuo pasa de un tipo a otro en pocos segundos, tal como se aprecia en los siguientes extractos.

EXTRACTO 1: Ejemplo de justificación superficial que se limita a comentar: *valores muy pequeños*, y reconoce sus deficiencias (Pedro, alumno de *alto rendimiento*, COU)

Pedro: *La de arriba* [ñ=Ä*m*/Ä*V*] *es la definición de densidad, y la de abajo* [ñ=d*m*/d*V*] *es lo mismo pero para trocitos de estos muy pequeñitos... Sería lo mismo pero quizás aquí puede escribir la masa en función del volumen...*

E: ¿Y eso mismo no lo puede hacer también con la expresión de arriba?

Pedro: *Pues sí, por eso, es que no sé...*

EXTRACTO 2: Ejemplo de falta de justificación, reconociendo sus deficiencias (María, profesora en formación)

María: *Ha convertido los incrementos en diferenciales, y no sé por qué hace ese paso. Lo que yo no entiendo es por qué un incremento directamente no lo sustituye. Ha pasado de incrementos a diferencial.*

E: ¿Por qué?

María: *Está cuantificando una variación*

E: ¿Y no lo podía hacer con incrementos?

María: *Yo creo que sí... No sé por qué pasa a diferenciales.*

EXTRACTO 3: Ejemplo de justificación superficial que remite a *posteriores desarrollos matemáticos* (Javier, profesor en formación)

E: ¿Por qué después de escribir: Ä*m*/Ä*V* a continuación escribe: d*m*/d*V*?

Javier: *Ha hecho lo mismo que antes: los incrementos de masa y de volumen que son finitos los ha pasado a diferenciales que son... infinitesimales*

E: ¿Por qué los pasa a diferenciales?

Javier: *Para hacer la integral*

(...)

E: ¿Por qué escribe: d*V* = *A*.d*h*?

Javier: Para poder integrar. Porque para hacer la integral después, tendrá que usar diferenciales.

3. Los comentarios de los estudiantes cuando se enfrentaban con la cuestión C5e nos han mostrado que tienen dificultades para entender algunas de ellas ($x=5cos3t$, $x=t/3$, $x=3+1/t$), en especial para saber si son o no lineales. Para evitar que esta dificultad interfiera en los resultados que buscamos, hemos seleccionado para nuestro análisis las tres primeras ecuaciones que corresponden a casos prototipo de ecuaciones lineales (coeficientes enteros: $x=12$, $x=6t-2$) y no lineales (ecuación de segundo grado: $x=8+3t^2$); de esta forma, cabe obtener resultados más desfavorables para nuestra hipótesis. Debe advertirse, no obstante, que los resultados en la ecuación de segundo grado son similares a los de las restantes ecuaciones no lineales, eliminando así la posibilidad de que hayan pensado utilizar las ecuaciones memorizadas del movimiento uniformemente variado para calcular la velocidad instantánea.

Podemos confirmar que los estudiantes han reconocido el término: *imprescindible* que aparece en el enunciado, pues mientras la ecuación correspondiente al reposo (x=12) es señalada por el 9% de la muestra, cualquier otra ecuación es señalada por un porcentaje superior al 70%.

Los resultados que se han presentado en la tabla 5.VI muestran la existencia de diferencias significativas (á<0.02) entre el porcentaje de estudiantes de COU que contestan correctamente frente los de 2º curso universitario, a favor de los primeros. Por tanto, aunque la mayoría de los estudiantes no saben identificar cuándo tienen que usar el Cálculo diferencial, ni siquiera ante casos sencillos, la actitud mecánica es más acusada aún entre alumnos universitarios de cursos superiores.

En cada ecuación, además de contestar afirmativa o negativamente, se les pedía que valorasen el grado de seguridad en su respuesta, sea cual fuere, utilizando una escala de 0 a 10. En la primera ecuación (x=12), la respuesta correcta (*NO es imprescindible...*) es señalada con un alto grado de seguridad, de media: 8.24 (±2.77). Para las otras dos ecuaciones (x=8+3t^2, x=6t-2), los resultados más importantes se presentan en la tabla 5.VII.

TABLA 5.VII. Grado de seguridad de los estudiantes cuando señalan su respuesta (C5e)

x = 8 + 3t^2 ¿imprescindible?	x = 6t - 2 ¿imprescindible?	N	x=8+3t^2 gs2 (ó)	x=6t-2 gs3 ó)	**|gs2-gs3|**
SÍ	SÍ	188	8.31 (2.47)	8.11 (2.60)	**0.31**
SÍ	NO	30	8.60 (1.89)	7.03 2.60)	**1.77**

El grupo mayoritario, que contesta equivocadamente, y el grupo que contesta correctamente manifiestan un alto grado de seguridad. Sin embargo, se aprecia una clara diferencia entre ambos grupos: mientras el primero se siente igualmente seguro en su respuesta a las dos ecuaciones, el grupo que contesta correctamente disminuye significativamente su grado de seguridad al señalar que en el caso lineal no es imprescindible usar el Cálculo diferencial. Igual que hemos hecho en el apartado anterior (ver p. 176, en este mismo capítulo), interpretamos esta diferencia como un reflejo de que el uso mecánico del Cálculo proporciona una apariencia de mayor seguridad que el uso reflexivo.

5.2.2. Resultados que muestran que los profesores y estudiantes no conocen el significado correcto de la diferencial

Hemos estudiado el significado que asignan a la diferencial en tres *contextos* distintos: cuando resuelven problemas (incluido el problema *ejemplificador*) (cap. 4, pp. 146 y 152), cuando se les pregunta directamente por el significado de expresiones diferenciales (C1e-p, C5p y C7e) (cap. 4, pp. 126, 135 y 143), o cuando explican el significado de un valor numérico concreto (C3e-p) (cap. 4, p. 131). En casi todos los casos se trataba de situaciones conocidas, aunque no excesivamente *familiares* para evitar *frases automáticas*.

Los resultados más importantes que hemos obtenido se presentan en la tabla 5.VIII. En el caso de la cuestión C3e-p hemos seleccionado los resultados correspondientes al intervalo *más pequeño* (Ä*t*=0.05 s), por ser los más desfavorables para nuestra hipótesis.

Esos resultados, obtenidos a través de distintos *contextos* y distintas situaciones físicas, son convergentes: **los profesores y estudiantes no conocen el significado correcto de la diferencial y un alto porcentaje de ellos no aporta significado alguno, aunque sea incorrecto, lo que interpretamos como una muestra de la inconsistencia del propio pensamiento. El significado incorrecto más frecuente que se asigna explícitamente consiste en identificar la diferencial con el incremento.**

TABLA 5.VIII. Significado de la diferencial para profesores y estudiantes	COU		1º Univ.		≥ 2º Univ.		Profesores			
	%	(sd)	%	(sd)	%	(sd)	%	(sd)	%	(sd)
Cuando resuelven los problemas:	P1e (N=57)		P1e, P2e-p (N=95)		P2e-p, P3p (N=105)		P2e-p, P3p (N=94)		*P ejemplific* (N=63)	
Escriben expresiones diferenciales	17.5	(5.1)	50.2	(5.2)	44.8	(4.9)	78.7	(4.2)	93.7	(3.1)
Algún significado	0	(-)	3.2	(1.8)	9.5	(2.9)	8.5	(2.9)	39.7	(6.2)
Significado correcto: Estimación lineal del incremento			0	(-)	1.0	(1.0)	1.1	(1.1)	1.6	(1.6)
C1e-p, C5p, C7e: ¿Cuál es el significado físico de la expresión diferencial?	**d*N* = - ë· *N*· d*t*** (N=52)		(N=37)		(N=33)		**d*v* = *a*· d*t*** (N=126)		**d*B*** (N=44)	
Algún significado	57.7	(6.9)	72.9	(7.4)	57.6	(8.7)	54.8	(4.5)	47.8	(7.6)
Significado correcto: Estimación lineal del incremento	0	(-)	0	(-)	0	(-)	0.8	(0.8)	2.3	(2.3)
Es un incremento, *sin más exigencia*	34.6	(6.7)	29.7	(7.6)	36.4	(8.5)	0*	(-)	11.4	(4.8)
Es un incremento *muy pequeño*	23.1	(5.9)	40.5	(8.2)	21.2	(7.2)	43.7	(4.4)	25.0	(6.0)
Es un incremento tan pequeño, *que se puede suponer constante alguna magnitud*	0	(-)	2.7	(2.7)	0	(-)	10.3	(2.7)	9.1	(4.4)
C3e-p: ¿Cuál es el significado de un valor numérico de la diferencial (Ä*t*=0.05 s)?	(N=56)		(N=54)		(N=41)		(N=61)			
Algún significado	35.7	(6.5)	48.1	(6.9)	36.6	(7.6)	45.9	(6.4)		
Significado *correcto*: *Estimación del incremento*	0	(-)	7.4	(3.6)	2.4	(2.4)	13.1	(4.4)		

* La primera parte de esta pregunta pedía justificar el paso de incrementos a diferenciales, lo cual induce a negar la identificación, *sin más*, entre ambos

Un análisis más detallado de los resultados de la tabla 5.VIII pone de manifiesto que profesores y estudiantes:

1. **Apenas conceden importancia al significado de las expresiones diferenciales que escriben.** Así, cuando resuelven problemas, menos del 10% dedica aunque sea una línea a explicar el significado, a pesar del requerimiento explícito de comentarios y aclaraciones. En particular, resulta alarmante que el 60% de los profesores no incluyan ninguna explicación cuando resuelven un problema destinado a *clarificar físicamente* entre alumnos de COU el uso del Cálculo diferencial, alumnos poco familiarizados con el Cálculo. Del mismo modo, cuando se les pide directamente que expliquen el significado físico de expresiones diferenciales, un porcentaje superior al 40% es incapaz de aportar significado alguno (excepto entre alumnos de 2º curso universitario). El extracto 4 corresponde a un fragmento de una entrevista en el que se aprecia esta despreocupación por el significado.

   EXTRACTO 4: Ejemplo de ausencia de significado para la diferencial, reconociendo el uso mecánico del Cálculo (Isa, alumna de *alto rendimiento* en Física de COU)

   Isa: d*m es cómo cambia la masa con respecto a... ¡Ya me lío!*

   E: ¿Conoces algún significado de esa expresión?

   Isa: *Yo sé que haciendo la integral se quita la "*d*", pero no sé ningún significado ahora.*

2. Salvo casos excepcionales (ningún estudiante, y el 2.3% de los profesores), **nadie explica correctamente el significado de las expresiones diferenciales en términos de estimación lineal del incremento.**

3. Todas las **respuestas erróneas** sobre el significado físico de expresiones diferenciales identifican la diferencial con el incremento, y se diferencian unas de otras en el grado de precisión y explicación. Por ello, en el gráfico 5.III hemos acumulado los resultados: todos *identifican diferencial con incremento*, una parte precisa que *ese incremento debe ser muy pequeño*, y

una pequeña parte de este grupo comenta, además, que *debe ser tan pequeño para suponer constante alguna magnitud*.

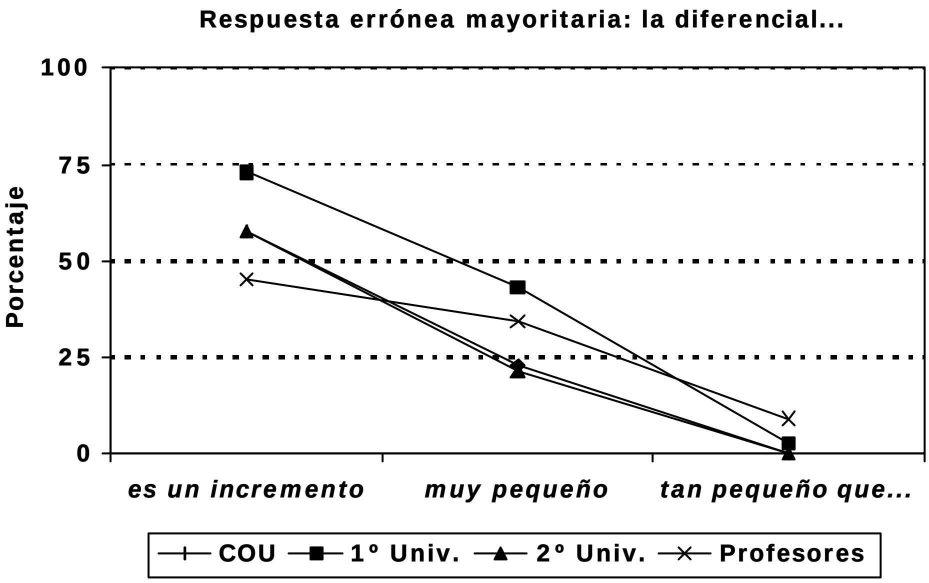


Gráfico 5.III. Disminución del porcentaje que señalan la respuesta errónea: *la diferencial es un incremento,* conforme se le exige un mayor grado de precisión

Nuestra experiencia como docentes, junto a otros resultados ya presentados como los referidos al significado de la diferencial en los textos de Física (p. 168), o al argumento más frecuente para justificar el paso de incrementos a diferenciales (pp. 176-177), nos hacen suponer que la concepción dominante entre los profesores y estudiantes consiste en **identificar la diferencial con un incremento *muy pequeño***, al estilo de la concepción de Leibniz. ¿Cómo explicar entonces el bajo porcentaje, en la tabla 5.VIII, de respuestas *explícitas* en esta dirección?

Pensamos que, aunque la idea de diferencial como una *cantidad muy pequeña* es comúnmente aceptada, la falta de convencimiento y seguridad impide que se exprese en muchas declaraciones. Interpretamos así muchas respuestas *sin significado* o las que no precisan el valor pequeño del incremento, como **una prueba de la inconsistencia y falta de seguridad de la concepción habitual sobre la diferencial**, lo que impide que se transforme en un *conocimiento declarativo*. Esta ambigüedad e imprecisión en el significado no es extraña en bs libros de texto: hemos descrito ya (p. 167, en este mismo capítulo) cómo en un mismo texto se identifica la diferencial con incrementos *muy pequeños* y, al mismo tiempo, se sustituyen diferenciales por valores *grandes* del incremento para resolver problemas, ni tampoco es extraña al Cálculo: seguramente se habrían obtenido resultados similares si se hubiese preguntado a sus creadores, tan convencidos del éxito en la aplicación de sus ideas como de su falta de claridad conceptual.

Durante las entrevistas, apareció en algún caso la identificación entre diferencial e incremento, *sin más exigencia* (extracto 5), pero la respuesta más frecuente consistía en especificar que se trataba de incrementos *muy pequeños*. Al tratar de profundizar, los argumentos utilizados son muy diferentes: en el extracto 6 se aprecia una concepción débil que reconoce el operativismo, mientras en el extracto 7 la reflexión conduce finalmente hacia una explicación racional –aunque errónea- de por qué deben ser *tan pequeños*.

EXTRACTO 5: Ejemplo de identificación entre diferencial e incremento (Julia, profesora en formación)

Julia: *Yo siempre he tomado un incremento como la diferencia entre la masa final y la inicial, y un diferencial cuando no pones los límites entre los que está variando la masa*

E: Pero, ¿está variando?

Julia: *Claro, luego límites tiene que tenerlos*

E: ¿Qué diferencia hay entonces entre incremento y diferencial?

Julia: *Pues no tiene diferencia*

(...)

E: ¿Qué es d*V*?

Julia: *Es una variación de volumen, tal y como yo lo concibo, y es igual al área de la base por la variación de altura*

EXTRACTO 6: Ejemplo de identificación entre diferencial y cantidad *muy pequeña*, sin argumentos fuertes (Juan, alumno de *alto rendimiento*, COU)

Juan: *Entiendo por diferencial cuando quieres estudiar las partes todo lo* *"chiquitillas" que tú quieras*

E: ¿Qué es entonces d*m*?

Juan: *Pues trocitos muy "chiquitillos" de la...* (no puede acabar la frase)

E: ¿De qué?

Juan: *De la masa...*

(...)

Juan: *Cada vez que usamos diferenciales, mi profesor dice: "para estudiar esta curva vamos tomando rectas tan pequeñas como queramos..."*

(...)

Juan: d*V*, d*h son incrementos de volumen, incrementos de altura... parece que lo toma así*

E: ¿Y tú crees que es así?

Juan: *No lo tengo claro... La verdad, yo sé hacer integrales, pero no me he quedado muy bien con lo que son las diferenciales que aparecen, lo veo escrito pero no sé lo que son... y para qué voy a preguntar, si me van a decir: "esto son los trocitos chiquititos..."*

EXTRACTO 7: Ejemplo de explicación del significado de la diferencial donde se intenta justificar el valor *muy pequeño* (David, alumno de *alto rendimiento*, COU)

E: ¿Cuál es el significado físico de esta expresión? (d*m* = ñ· d*V*)

David: *Pues más o menos eso quiere decir que es la variación de masa con respecto a la variación de volumen pero en un espacio muy pequeño, en un diferencial, es decir, no es en un espacio constante ni fijo sino algo pequeño en el que se supone que es constante...*

E: ¿Qué se supone que es constante?

David: *Pues ahí, la densidad*

E: ¿Pero entonces el incremento no vale cuando es muy pequeño?

David: *Sí, claro que vale. Lo que nosotros entendemos es que cuando el incremento es muy pequeño, tan pequeño en que la variable es constante, entonces lo que escribimos es diferencial.*

Las conclusiones más importantes obtenidas hasta aquí, a saber: la ausencia generalizada de una concepción correcta sobre la diferencial, y la existencia de una concepción errónea mayoritaria que identifica diferencial e incremento *muy pequeño* (aunque su inconsistencia e inseguridad podría hacer que no se haga explícita en muchas ocasiones), deben verse reflejadas también en las respuestas a las preguntas sobre el valor numérico de la diferencial (C2e-p, C3e-p) (cap. 4, pp. 129, 131).

Los resultados más importantes en relación con el valor numérico de la diferencial se presentan en la tabla 5.IX, y muestran con claridad que los profesores y estudiantes no reconocen el carácter funcional de la diferencial, es decir, que puede tomar cualquier valor numérico dependiendo del valor de la variable y del cambio de variable. En concreto, esos resultados muestran que:

- Al señalar posibles valores numéricos de la diferencial, tan sólo el 18% del total admiten más de un valor numérico (no existen diferencias significativas entre los grupos muestrales). Al justificar su respuesta se produce un aumento de ese porcentaje, producido por aquellos que admiten distintos valores pero siempre *muy pequeños*.
- Al realizar cálculos, las respuestas consistentes con el carácter funcional aumentan, aunque todavía son inferiores al 50%. Interpretamos este resultado como un reflejo de la existencia de automatismos: aplican reglas de cálculo (por ejemplo: $dT=T'\cdot dt$) en las que subyace el carácter funcional, a pesar de contradecir sus propias concepciones. Se manifiesta así una concepción *declarativa* –al menos implícitamente- similar a la de Leibniz, junto con otra concepción *operativa* similar a la de Cauchy.

TABLA 5.IX. Sobre el reconocimiento del carácter funcional de la diferencial entre profesores y estudiantes	**COU** % (sd)	**1º Univ.** % (sd)	**≥ 2º Univ.** % (sd)	**Profesores** % (sd)
C2e-p: Cuando eligen posibles valores numéricos que puede tener la diferencial de una magnitud (12,63; 300.000; 0,0001):	(N=40)	(N=37)	(N=33)	(N=35)
Respuestas consistentes con el carácter funcional, pues admiten más de un valor numérico	**15.0** (5.7)	**18.9** (6.5)	**21.2** (7.2)	**17.1** (6.5)
Respuestas inconsistentes: Sólo el valor más pequeño (0.0001)	20.0 (6.4)	32.4 (7.8)	39.4 (8.5)	11.4 (5.5)
Ninguno de los tres valores	30.0 (7.3)	35.1 (8.0)	30.3 (8.1)	51.4 (8.6)
No lo sé	35.0 (7.6)	13.5 (5.7)	9.1 (5.1)	20.0 (6.9)
Cuando justifican su elección:				
Respuestas consistentes con el carácter funcional pues reconocen, aunque sea implícitamente, que la diferencial puede tomar distintos valores numéricos	**25.0*** (6.9)	**16.2** (6.1)	**6.1** (4.2)	**34.3*** (8.1)
C3e-p: Cálculo de d*T* de una pieza que se introduce en un horno, para dos intervalos de tiempo: Ä*t*=0.05 s, Ä*t*=30 min, conociendo el valor de la derivada en el instante inicial:	(N=56)	(N=54)	(N=41)	(N=61)
Obtiene un valor numérico para d*T* en ambos intervalos, respuesta indicadora del **reconocimiento (al menos operativamente) del carácter funcional de la diferencial ....**	**44.6** (6.7)	**37.0** (6.6)	**24.4** (6.8)	**26.2** (5.7)

(*) El aumento es producido por aquellos que admiten el carácter funcional limitándolo a un rango infinitesimal

Esta falta de reconocimiento del carácter funcional es coherente con la ausencia generalizada de una concepción correcta, pero también es un reflejo de lo inusual que resulta en la enseñanza asignar valores numéricos a la diferencial, tal como hemos obtenido en el análisis de textos (p. 169) y se deriva también de nuestra experiencia docente. Así pues, aunque con frecuencia se repite la idea de que la diferencial es una cantidad muy pequeña, nunca se concreta en un valor numérico ni se reflexiona sobre esta posibilidad, lo que podría explicar la resistencia mayoritaria a señalar algún valor. Esta actitud no es sorprendente pues, como se ha comentado en el capítulo 1, tanto Leibniz como Cauchy no tenían una contestación clara a la pregunta sobre el valor numérico de las cantidades infinitesimales, sino que su respuesta variaba desde un valor fijo muy pequeño hasta la idea de cantidad variable.

El contenido de las entrevistas nos ha permitido apreciar cómo la misma concepción de la diferencial como *cantidad muy pequeña* puede conducir a respuestas distintas sobre el valor numérico: desde admitir su carácter funcional, hasta admitir sólo valores *aproximados*, o negar explícitamente la posibilidad de que tome valor numérico. En los extractos 8, 9 y 10 se reproduce un ejemplo de cada una de esas respuestas:

EXTRACTO 8: Ejemplo donde parte de un *valor muy pequeño*, pero llega a reconocerse el carácter funcional (*en Matemáticas*) (Juan, alumno de *alto rendimiento*, COU)

E: ¿Cuánto de pequeños son esos trozos?

Juan: *Todo lo que podamos*

E: ¿1 es pequeño?

Juan: *Depende de con qué lo compares*

E: Compáralo con lo que quieras... ¿Cuánto de pequeños?

Juan: *No sé, cero coma algo...*

(...)

Juan: (Discutiendo sobre la integral...) d*m es una función en matemáticas, y puede tomar todos los valores que tú quieras*

E: ¿Todos: 200, 30000...?

Juan: *Sí, todos los que quieras*

E: ¿Pero esos son infinitamente pequeños?

Juan: (Se ríe) *No, eso son los que yo quiera*

E: ¿Ya d*m* no es un infinitamente pequeño?

Juan: (Se ríe a carcajadas) *¡No! ¡Ya no!*

EXTRACTO 9: Ejemplo en que d*m* es una *cantidad muy pequeña*, y si toma valor numérico se trata de una aproximación (David, alumno de *alto rendimiento*, COU)

David: *Eso depende, no sé el valor ahora mismo. Es un valor muy pequeño donde se supone que es constante la densidad*

E: ¿Qué valor?, ¿puede tomar algún valor?

David: *Pues "cero coma cero cero algo"*

E: ¿Una milésima?

David: *O más pequeño todavía, no sé, algo...*

(...)

E: ¿Qué *dV* tomamos, de una diezmillonésima, o eso es ya demasiado pequeño?

David: *No sé qué decir... Sí*

E: ¿Por qué lo tomas tan pequeño?

David: *No sé... yo no lo tomo tan pequeño tampoco. Vamos a ver* (repasa en voz alta sus argumentos)*: es algo tan pequeño donde se supone que no varía, que es constante...*

E: ¿Pero eso realmente ocurre en algún trozo?

David: *No, según la ecuación, por muy pequeño que sea siempre varía algo, no sé, a lo mejor es un cálculo aproximado...*

E: ¿Pero el resultado va a ser aproximado o exacto?

David: *Exacto, exacto... no. ¿No?*

EXTRACTO 10: Ejemplo de identificación entre *dm* y *cantidad muy pequeña* que les lleva a negar cualquier valor numérico (Lali, alumna de *alto rendimiento*, COU)

Lali: d*m es coger partes pequeñas de la masa*

E: ¿Cuánto de pequeño?

Lali: *Lo más pequeño que se pueda*

E: Pero, ¿cuánto? ¿tiene un valor?

Lali: *No*

E: ¿No tiene valor, no puede valer, por ejemplo, 1?

Lali: *No*

E: ¿Y por ejemplo: 0.1? ¿y: 0.001?

Lali: *Que no, no tiene valor*

E: ¿Ningún valor? ¿es una parte muy pequeña pero que no tiene ningún valor?

Lali: *No, que no tiene valor*

5.2.3. Resultados que muestran que los profesores y estudiantes usan de forma operativista y sin comprensión la relación entre derivada y diferencial

La cuestión C6e (cap. 4, p. 141) pretendía estudiar en qué medida los estudiantes **reconocen a la derivada como un cociente de diferenciales.** Para ello, la pregunta tenía dos partes: en la primera se preguntaba directamente sobre lo correcto de distintas lecturas de la derivada, entre las cuales se incluía una como cociente diferencial; en la segunda parte se preguntaba si era correcto y cómo se leía un razonamiento de uso frecuente en las clases de Física en el que subyace la concepción de la derivada como cociente diferencial. Las dos partes tenían el formato de respuestas de opción múltiple, de las que podían señalar más de una. Los resultados se presentan en la tabla 5.X de la página siguiente.

TABLA 5.X. Sobre las relaciones entre derivada y diferencial	**COU** (N=40) %	(sd)	**1º Univ.** (N=50) %	(sd)
1. “*dR/dz=L.z*” Lectura que eligen como correcta:				
1.1. La derivada de *R* respecto de *z* es igual a...	60.0	(7.7)	90.0	(4.2)
1.2. La derivada de *R* entre la derivada de *z* es igual a...	10.0	(4.7)	4.0	(2.8)
1.3. La diferencial de *R* entre la diferencial de *z* es igual a...	**37.5**	(7.7)	**12.0**	(4.6)
1.4. Otra respuesta	7.5	(4.7)	2.0	(2.0)
Respuesta correcta: 1.1 y 1.3	**12.5**	(5.3)	**6.0**	(3.4)
2. "*dR/dz=L.z Despejando dR se obtiene: dR=L.z.dz*" Lectura que eligen como correcta:				
2.1. Es incorrecto pues no podemos despejar	55.0	(7.9)	10.0	(4.2)
2.2. Es correcto y se lee en términos de diferenciales	**37.5**	(7.7)	**76.0**	(6.0)
2.3. Es correcto y se lee en términos de derivadas	5.0	(3.4)	14.0	(4.9)
2.4. Otra respuesta	2.5	(2.5)	0	(-)

La expresión *dR/dz* puede leerse como *operador* (1.1) y como *cociente* (1.3), pero en nuestro estudio nos interesa fijarnos en la lectura como *cociente de diferenciales*: sólo el 37.5% de los alumnos de COU y el 12% de los de 1er curso universitario **admiten esa lectura.**

En la segunda parte de la pregunta, tan sólo el 42.5% de los estudiantes de COU creen que es correcto despejar diferenciales de la expresión de una derivada, y el 37.5% además lee correctamente el resultado. Existe así, entre los estudiantes de COU, un alto grado de coherencia entre la primera parte de la pregunta, que no hace referencia a ninguna regla mecánica, y la segunda, que recuerda una regla de uso frecuente en las clases de Física.

Sin embargo, en el caso de los alumnos de primer curso universitario, los resultados en las dos partes de esta pregunta son muy distintos. Así, mientras sólo el 12% de los estudiantes de este nivel aceptaban directamente la lectura de la derivada como cociente diferencial, en la segunda parte la aceptan indirectamente el 76%. Esta falta de coherencia puede interpretarse con la ayuda de otros resultados ya presentados: hemos visto en distintas ocasiones que alumnos y profesores tienden a contestar correctamente en mayor proporción cuando se trata de realizar cálculos en lugar de verbalizar una respuesta o una reflexión. Esto es indicativo de la preponderancia del operativismo frente a la comprensión. Puede explicarse así que los estudiantes en realidad no reconozcan la derivada como cociente -de acuerdo con los resultados de la primera parte-, pero cuando se enfrentan con una expresión *que se repite con frecuencia* en las clases y textos de nivel universitario, contestan de forma mecánica reconociendo implícitamente que la derivada es un cociente. Debe recordarse que una de las conclusiones obtenidas en el análisis de textos (ver p. 169, en este mismo capítulo) apunta en esta misma dirección: el 90% de los textos *opera* con la derivada como cociente, pero menos del 20% explica o realiza algún comentario –aunque sea erróneo- para aclarar esta nueva concepción para los estudiantes.

El siguiente extracto de una entrevista con un alumno de COU ilustra esta contradicción.

EXTRACTO 11: Ejemplo de respuesta donde se manifiesta la contradicción entre considerar que *dm/dV* no es un cociente, y sin embargo admitir que se puede despejar *dm* (David, alumno de *alto rendimiento*, COU)

David: *Diferencial de masa con respecto al volumen, a la variación del volumen...*

(Sin intervención del entrevistador, añade de inmediato a modo de advertencia tajante:)

David: *No dividido entre el diferencial de volumen, no, no, eso no es así*

E: ¿Está bien despejar d*m*?

David: *Pues sí, está bien*

E: Pero, ¿no acabas de decir que eso [señala: d*m*/d*V*] no es una división?

David: *¡Ah!, bueno, pero eso no quiere decir nada. Eso de ahí (despejar* d*m...) lo verifica la división, y el producto es igual*

E: Pero entonces: ¿esta expresión es d*m* entre d*V* o no?

David: *¡Ah! ¡Ya! Ahora sí, es verdad, me has pillado*

E: ¡Pero si yo no quiero pillarte, sino saber qué piensas! ¿Qué piensas, es una división y despeja, o no?

David: *No debería, pero no sé...*

(...)

E: ¿Te resulta raro que se haga (se refiere a despejar d*m*...)?

David: *En parte sí*

E: ¿Lo has visto alguna vez en algún libro, eso de despejar?

David: *La derivada nosotros...* (breve silencio)

E: ¿Pero esto es una derivada?

David: *No, no, no...*

En fragmentos de otras entrevistas, sin embargo, ni siquiera puede aparecer esta contradicción, ya que se niega no sólo que la derivada pueda leerse como cociente, sino también que puedan despejarse diferenciales. Es una respuesta errónea, pero coherente con sus concepciones y no viciada por el operativismo.

EXTRACTO 12: Ejemplo de respuesta que niega que la expresión *dm/dV* sea un cociente (Lali, alumna de *alto rendimiento*, COU)

E: ¿Es una división?

Lali: *Es la derivada de la masa respecto al volumen*

E: ¿Puede hacer ese paso?

Lali: (Duda un cierto tiempo) *No, porque **no** es un cociente, es la diferencial* (¡)*de la masa respecto al volumen...*

La cuestión C3e-p (cap. 4, p. 131) permite también obtener datos sobre la concepción de la derivada como cociente diferencial, aunque en un *contexto* distinto: en lugar de señalar *lecturas correctas*, tenían que calcular el valor de d*T* para dos intervalos de tiempo (Ä*t*=0.05 s; Ä*t*=30 min), a partir del valor inicial de la derivada (1.2 ºC/s). Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 5.XI.

Hemos llamado **fórmula de Cauchy** a la expresión: **d*T*=*T'*· d*x*** Conviene advertir que hemos considerado de una forma bastante amplia que se estaba usando esa fórmula: bastaba con plantear una regla de tres e identificar el resultado con la diferencial.

TABLA 5.XI. SOBRE LA RELACIÓN ENTRE DERIVADA Y DIFERENCIAL: Respuestas indicadoras del reconocimiento de la derivada (al menos operativamente) como

cociente diferencial cuando calculan d*T* para dos intervalos de tiempo, conociendo el valor de la derivada en el instante inicial (C3e-p)

	COU (N=56)	**1º Univ.** (N=54)	≥ **2º Univ.** (N=41)	**Profesores** (N=61)
Usan la fórmula de Cauchy:				
para Ä*t* = 0.05 s	37.5 (6.5)	27.8 (6.2)	34.1 (7.5)	34.4 (6.1)
para Ä*t*=0.05 s **y** Ä*t* = 30 min	35.7 (6.5)	25.9 (6.0)	22.0 (6.5)	14.8 (4.6)

En el caso de los estudiantes de COU, existe una alta correlación entre los datos de esta tabla y los de la anterior: el mismo porcentaje de alumnos que reconoce la derivada como cociente diferencial y considera correcto despejar diferenciales de la derivada, utiliza ahora la fórmula de Cauchy para calcular valores numéricos de la diferencial.

Pero esa correlación no existe entre los datos de estudiantes universitarios: cabría esperar que los alumnos que consideran correcto despejar la diferencial de la derivada (d*R*/d*z*=*L*· *z* ⇒ d*R*=*L*· *z*· d*z*) apliquen esa misma regla para calcular valores numéricos (d*T*/d*t*=1.2 ⇒ d*T*=1.2· d*t*); sin embargo, no ocurre así pues el porcentaje baja del 76% en el caso de operaciones algebraicas al 28% para operaciones numéricas. Esta falta de coherencia puede interpretarse como una falta de comprensión: sólo se reconoce lo que se ha repetido una vez tras otra hasta crear automatismos (operaciones algebraicas), y no se aplica ante situaciones que se separan mínimamente de las que se han utilizado en clase o en los textos (operaciones numéricas).

Debe destacarse, además, la disminución del porcentaje entre profesores y estudiantes universitarios de cursos superiores cuando tienen que aplicar la fórmula de Cauchy para Ä*t*=30 minutos, lo que indica que la fijación de la diferencial como un incremento infinitesimal se va haciendo cada vez mayor con el uso habitual del Cálculo.

Los resultados que se han presentado en las dos últimas tablas confirman el resultado que se había obtenido en el análisis de los textos de Física: **la concepción de la derivada como cociente diferencial se usa y se reconoce en situaciones**

y razonamientos familiares, pero no se ha producido una comprensión que permita hacer uso de ella en cualquier contexto.

5.2.4. Resultados que muestran que los profesores y estudiantes no saben por qué se calcula la integral mediante la *antiderivada* o *función primitiva* (Teorema Fundamental)

Existe un debate, desde la perspectiva de las Matemáticas, sobre cuál es la concepción de la integral más adecuada para ser utilizada en la enseñanza (Bartle, 1996; Calvo, 1998; Turégano, 1994, 1998), aunque la más utilizada hoy en esas clases es la concepción de *Riemann*. En lo que respecta a la enseñanza de la Física no existe duda: se identifica la integral de forma casi unánime con una *suma de muchos (o infinitos) términos*, una versión poco rigurosa de la *integral de Riemann* (en la que no se destaca suficientemente que, en realidad, *es el límite* de una serie de sumas, y *no es* ninguno de los términos de esa serie). Prueba de ello es que el 89% de los textos de Física analizados utilizan la integral como *suma de muchos términos* (ver p. 171); nuestra propia experiencia docente nos hace intuir que no existe ninguna duda entre los profesores de Física respecto a la interpretación de la integral, aunque pueda estar rodeada de la inseguridad que caracteriza a todo lo que tiene que ver con la comprensión del Cálculo diferencial.

El análisis de los problemas resueltos y del problema *ejemplificador* (cap. 4, pp. 146 y 152) nos ha permitido estudiar el uso *explícito* de la integral como *sumas de Riemann*. Ese mismo análisis, y las respuestas a la cuestión C4e-p (cap. 4, p. 133), nos han permitido, además, estudiar los argumentos utilizados para justificar por qué el cálculo de esa *suma* se realiza mediante el cálculo de la *antiderivada* o *función primitiva*, un resultado rodeado de *misterio* y *sorpresa*, según nuestra experiencia docente. Los resultados más importantes se presentan en la Tabla 5.XII.

TABLA 5.XII. Uso de la integral entre profesores y estudiantes, y justificación de su cálculo mediante el Teorema Fundamental	**COU**		**1º Univ.**		**≥ 2º Univ.**		**Profesores**			
	%	(sd)	%	(sd)	%	(sd)	%	(sd)	%	(sd)
Cuando resuelven los problemas:	P1e (N=57)		P1e, P2e-p (N=95)		P2e-p, P4e (N=105)		P2e-p, P3p (N=94)		*P ejemplifi* (N=63)	
Escribe integrales	17.5	(5.1)	46.3	(5.1)	40.0	(4.8)	69.1	(4.8)	93.7	(3.1)
Especifica: como *suma de muchos términos*	0	(-)	1.1	(1.1)	7.6	(2.6)	5.3	(2.3)	49.2	(6.3)
Justifica de alguna manera el Teorema Fundamental	**0**	(-)	**0**	(-)	**0**	(-)	**0**	(-)	**0**	(-)
C4e-p: Argumentos expresados para justificar el Teorema Fundamental, es decir, que: $\int_A^B f(x)\,dx = P(B) - P(A)$, siendo $P(x)$ la función primitiva de $f(x)$.	(N=56)		(N=36)		(N=31)		(N=34)			
Argumentos que pueden justificar el Teorema Fundamental	**0**	(-)	**2.8**	(2.8)	**0**	(-)	**8.8**	(4.9)		
Muestran claramente por qué *P'(x)=f(x)*	0	(-)	0	(-)	0	(-)	0	(-)		
Llegan a identificar *f(x)*.d*x* con d*P*	0	(-)	0	(-)	0	(-)	8.8	(4.9)		
Otros	0	(-)	2.8	(2.8)	0	(-)	0	(-)		
Comentarios que no justifican el Teorema Fundamental	100	(-)	97.2	(2.8)	100	(-)	91.2	(4.9)		
Se limitan a recordar el concepto de integral como área bajo una curva	30.4	(6.2)	16.7	(6.3)	48.4	(9.1)	67.6	(8.1)		
Escriben que, por definición, derivar e integrar son operaciones inversas	19.6	(5.4)	2.8	(2.8)	6.5	(4.5)	8.8	(4.9)		
En blanco, parafrasean, frases sin sentido	**51.8**	(6.7)	**77.8**	(7.0)	**48.4**	(9.1)	**20.6**	(7.0)		

A pesar de que la integral como *sumas de Riemann* sea ampliamente compartida en la enseñanza de la Física, sólo se explicita esta concepción en casos aislados cuando resuelven problemas, y tan sólo el 50% de los profesores la expresan cuando resuelven el problema *ejemplificador*, es decir, tal como lo harían con sus alumnos de COU. Interpretamos este resultado como **una muestra más del uso operativo: lo que se retiene y se enseña *de verdad* es la mecánica de cálculo pero no el concepto.**

Por otra parte, el análisis de los problemas resueltos, muestra que ningún profesor ni estudiante aporta argumento alguno que justifique el Teorema Fundamental, ni siquiera en el problema *ejemplificador*. Esta deficiencia podría ser debida al operativismo con que se usa el Cálculo, pero la contundencia de los resultados obtenidos en la cuestión C4e-p pone de manifiesto que se trata de un desconocimiento absoluto.

En esa cuestión, después de recordar brevemente el contenido del Teorema, se les pedía que escribiesen argumentos gráficos y/o analíticos, o razonamientos intuitivos, que mostrasen que ese resultado -en especial el hecho de que aparezca la *función primitiva*- es lógico y comprensible. De nuevo obtenemos el mismo resultado: **ningún profesor ni ningún estudiante justifica el Teorema Fundamental**; en el mejor de los casos, un porcentaje inferior al 10% de profesores llega a identificar el producto $f(x)\cdot dx$ con dP, cuando aún restaría por demostrar que la integral de dP es precisamente ÄP.

En ocasiones, cuando se identifica la integral con la función primitiva (o integral indefinida), se considera que la relación inversa entre integral y derivada es evidente, que más que un teorema se trata de una definición; sin embargo, nada más lejos de la realidad: en el capítulo 1 (p. 31) hemos mostrado ya que este resultado marca el nacimiento del Cálculo diferencial, estableciendo un antes y un después, y es la consecuencia de siglos de esfuerzo entre científicos. Si observamos las respuestas de los alumnos y profesores, son muy pocos los que incurren en este error, al contestar que *derivar e integrar son operaciones inversas*.

Este análisis nos permite concluir que **los profesores y estudiantes utilizan la integral en las clases de Física como *suma de muchos términos*, aunque la**

actitud fuertemente operativista oculta esta idea bajo un conjunto de algoritmos. Además, no saben por qué el cálculo de esas *sumas* se realiza mediante reglas inversas a las de derivación.

En las entrevistas realizadas aparece en numerosas ocasiones la idea de integral como *suma de muchos trozos muy pequeños*, y en otras ocasiones aparecen definiciones aparentemente más formales, como es el área bajo una curva. Pero en ningún caso, al indagar sobre la razón por la que el cálculo de la integral se hace a la inversa que la derivada, se obtiene argumento alguno, ni siquiera intuitivo; antes bien, se reconoce la actitud mecánica y llega a manifestarse algún desconcierto. Los extractos 13 al 18 muestran todos ellos distintos ejemplos de este tipo de respuestas.

EXTRACTO 13: Ejemplo de respuesta en la que se relaciona la integral con el cálculo de áreas, pero sin argumentos que justifiquen el Teorema Ftal. (María, profesora en formación)

María: *Es el área de una determinada función*

E: ¿Qué área?

María: *Pues aquí el área ya lo tenemos:* $A = 1\ \text{m}^2$ (se refiere al área de la base de la columna cilíndrica)

E: ¿Cuál es el significado de esa integral ($\int dm$)?

María: *Es lo que varía la masa entre dos situaciones*

(El entrevistador le muestra la resolución de la integral)

E: ¿Por qué sale ese resultado?, ¿de dónde lo ha sacado?

María: *Relacionado con el concepto de la derivada: si tú derivas el resultado te vuelve a salir la integral*

E: ¿Por qué se calculan así las integrales?

María: *Pues no tengo ni idea*

EXTRACTO 14: Ejemplo de respuesta en la que se reconoce la falta de comprensión del significado y cálculo de integrales (Julia, profesora en formación)

Julia: *No lo sé, estoy harta de calcularlas pero no sé lo que es. No sé lo que significa la operación de la integral.*

Julia: *No sé el significado, pero sí sé operar con las integrales: la integral es lo contrario de la derivada (y tampoco sé muy bien lo que es la derivada)*

EXTRACTO 15: Ejemplo de respuesta en la que se identifica a la integral con una *suma de pequeños términos*, aunque si el integrando no es del tipo df tienen dificultades. Reconoce su actitud mecánica ante la falta de argumentos para justificar el Teorema Fundamental. (Javier, profesor en formación)

Javier: *Una integral es una suma de diferenciales, suma de todas las pequeñas masas, suma de discos de altura* dh

E: ¿Y la otra integral ($\int ñ \cdot A \cdot dh$) qué es?

Javier: $A\cdot$ dh *sería el volumen, y* ñ *será la densidad de ese volumen*

(Después de que el entrevistador le enseñe la resolución de la integral)

E: ¿Por qué sale este resultado?

Javier: *Por la fórmula*

E: ¿Por qué el cálculo de una suma se realiza con esa fórmula?

Javier: *Había algo de una inversa de la derivada...*

E: ¿Por qué la suma de muchas cosas se reduce al cálculo de la inversa de la derivada?

Javier: *Nunca he sabido por qué*

EXTRACTO 16: Ejemplo de respuesta en la que se identifica a la integral con una *suma de pequeños términos*, y reconoce su actitud mecánica ante la falta de argumentos para justificar el Teorema Fundamental (David, alumno de *alto rendimiento*, COU)

E: ¿Qué significa esa integral? (le señala: $\int dm$)

David: *Estamos sumando cosas pequeñas... esa cosa pequeña que es la diferencial*

(Después de mostrarle el resultado de la integral)

E: ¿Por qué para calcular la integral busco algo que al derivar me da el integrando?, ¿eso de dónde sale? En concreto, ¿por qué la suma de muchos $h\cdot$ dh es algo que al derivarlo me da h?

David: *La pregunta la entiendo, yo la respuesta la tengo clara pero no tengo ningún argumento teórico, no sé explicarlo sino que es un mecanicismo.*

E: ¿Es un misterio que la integral se calcule justo al revés que la derivada?, ¿qué relación hay entre el concepto de suma y esa regla mecánica que tú dices?

David: *No sé decirlo, no sé...*

E: ¿Te parece sorprendente?

David: *La verdad es que sí...*

EXTRACTO 17: Ejemplo de respuesta en la que se identifica a la integral con una *suma de pequeños términos*, y reconoce su actitud mecánica ante la falta de argumentos para justificar el Teorema Fundamental (Carlos, alumno de *alto rendimiento*, COU)

E: ¿Qué significa esa integral? (le señala: $\int dm$)

Carlos: *Cómo va cambiando m a lo largo de un trayecto entre* 0 *y M, y luego suma*

E: ¿Lo suma?

Carlos: *Algo así*

E: ¿Qué significa entonces esta otra integral ($\int ñ \cdot A \cdot dh$)?

Carlos: *Cómo va cambiando* ñ· *A*· d*h desde* 0 *hasta* 2000

(Después de mostrarle el resultado de la integral)

E: ¿Tú no decías que la integral era lo que va cambiando...?, ¿por qué ahora haces lo de la derivada?

Carlos: *Porque la integral es la inversa de la derivada*

E: ¿No era lo que va cambiando...?, ¿por qué ahora es así?

Carlos: *No sé*

E: ¿Te parece raro?

Carlos: *Pues sí*

E: ¿No sabes por qué lo haces así?

Carlos: *Pues no. Yo sé resolverlo.*

EXTRACTO 18: Ejemplo de respuesta en la que se manifiesta la falta de comprensión y la actitud mecánica cuando se le pregunta por el Teorema Fundamental (Juan, alumno de *alto rendimiento*, COU)

Juan: *La regla de Barrow te dice cómo hacer las integrales definidas. Para las indefinidas hay una tabla...*

E: ¿Y de dónde sale esa tabla?

Juan: *Porque como integrar es lo contrario de derivar...*

E: ¿Cómo?

Juan: *Sí, es lo contrario: busco una función que al derivarla sale lo que está dentro*

(Este alumno había explicado un momento antes que: *la integral definida desde 0 hasta M de* d*m... significa que los trocitos chiquititos están definidos entre 0 y M,* y el entrevistador intenta que lo relacione con su nueva respuesta)

E: ¿Qué tiene que ver lo de trozos pequeños con hacerlo al revés que la derivada?

Juan: *No lo sé, sé que cuando necesitas saber algo que está variando continuamente necesitas hacer integrales*

E: Pero, ¿por qué?

Juan: *No lo sé, porque son así las matemáticas. No sé lo que es una integral, pero sé resolverla.*

5.2.5. Resultados que muestran que los profesores y estudiantes limitan el uso del Cálculo a la aplicación mecánica de reglas, y tienen bajas expectativas sobre la posibilidad de usarlo *con sentido*

Los resultados presentados hasta aquí han mostrado de forma reiterada el uso sin comprensión del Cálculo diferencial por profesores y estudiantes desde COU hasta el segundo ciclo de carreras científico-técnicas, mostrando unas concepciones tan débiles que con frecuencia no aparecen como conocimiento declarativo. Estos resultados son una muestra por sí solos del uso mecánico del Cálculo en las clases de Física, y no sería necesario añadir nada nuevo. No obstante, para mostrar las dificultades que ese uso mecánico provoca cuando se tiene que utilizar el Cálculo en situaciones mínimamente novedosas, poco alejadas de lo que se trabaja diariamente en las clases, en la tabla 5.XIII y el gráfico 5.IV presentamos los resultados más llamativos del análisis de los problemas resueltos (cap. 4, pp. 146 y 152).

TABLA 5.XIII. Uso del Cálculo diferencial por profesores y estudiantes para resolver problemas de Física	**COU**		**1º Univ.**		**≥ 2º Univ.**		**Profesores**			
	%	(sd)	%	(sd)	%	(sd)	%	(sd)	%	(sd)
Cuando resuelven los problemas:	P1e (N=57)		P1e, P2e-p (N=95)		P2e-p, P4e (N=105)		P2e-p, P3e (N=94)		*P ejemplific* (N=63)	
1. Usa el Cálculo diferencial	19.3	(5.3)	50.5	(5.2)	44.8	(4.9)	80.9	(4.1)	93.7	(3.1)
2. Intenta justificarlo (aunque sea erróneamente)	1.8	(1.8)	2.1	(1.5)	4.8	(2.1)	13.8	(3.6)	34.9	(6.1)
3. Asigna algún significado a la diferencial (aunque sea incorrecto)	0	(-)	3.2	(1.8)	9.5	(2.9)	8.5	(2.9)	39.7	(6.2)
4. Escribe integrales	17.5	(5.1)	46.3	(5.1)	40.0	(4.8)	69.1	(4.8)	90.5	(3.7)
5. Considera explícitamente a la integral como *suma de muchos términos*	0	(-)	1.1	(1.1)	7.6	(2.6)	5.3	(2.3)	49.2	(6.3)
6. Justifica de alguna manera el Teorema Fundamental	0	(-)	0	(-)	0	(-)	0	(-)	0	(-)

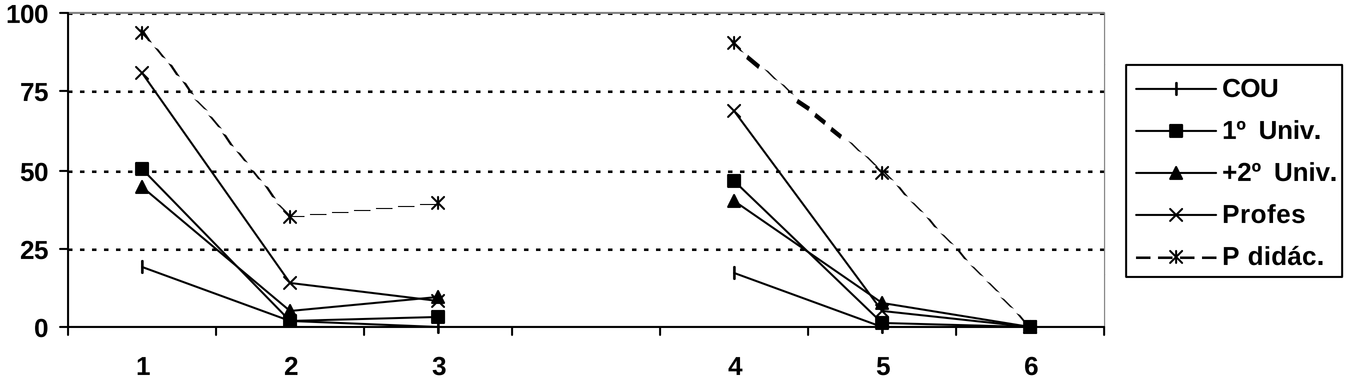


Gráfico 5.IV. Uso del Cálculo diferencial por profesores y estudiantes para resolver problemas de Física (ver tabla 5.XIII)

La mitad o menos de los estudiantes universitarios de asignaturas de Física abordan los problemas concretando sus ideas mediante expresiones diferenciales, y ello a pesar de que se les pedía expresamente. En el caso de los alumnos de COU, al terminar las asignaturas de Física y Matemáticas, menos del 20% es capaz de **iniciar** la resolución de un problema con expresiones diferenciales. Además, la práctica totalidad de los alumnos de todos los niveles que escriben expresiones diferenciales no incluyen comentario alguno (correcto o no) relativo a su justificación o su significado. En el mejor de los casos, menos del 40% de los profesores incluyen dicho tipo de comentarios (la inmensa mayoría erróneos) cuando resuelven un problema destinado expresamente a clarificar a sus alumnos de COU el significado de los conceptos diferenciales.

Esta falta de comprensión, apenas oculta por la tendencia al operativismo, se refleja, tal como esperábamos, en sus propias contradicciones, expectativas y actitudes. Así, las tablas 5.XIV y 5.XV muestran opiniones de profesores y alumnos obtenidas mediante una escala Likert (véanse las cuestiones: C6p, C7p y C8e, cap. 4, pp. 137, 138 y 145) que pueden ser indicadoras de la aceptación (y resignación) de la algoritmización frente a la comprensión.

TABLA 5.XIV. Opiniones de los profesores sobre el reduccionismo del Cálculo a la aplicación de reglas	**Profesores**	
	Acuerdo	**Desacuerdo**
	% (sd)	**%** (sd)
El uso del Cálculo diferencial **es necesario para desarrollar la Física que se imparte en COU** (N=103)	**81.6** (3.8)	**4.9** (2.1)
En realidad, **lo importante para seguir las clases de Física en COU es que los alumnos sepan obtener derivadas e integrales** de algunas funciones sencillas y que sepan aplicar métodos de integración simples (cambio de variable, integración por partes...) (N=93)	**41.9** 5.1)	**39.8** (5.1)

TABLA 5.XV. Opiniones de los estudiantes sobre el reduccionismo del Cálculo a la aplicación de reglas	**COU** (N=108)		**1º Univ.** (N=116)		≥ **2º Univ.** (N=63)	
	Acuerdo	**Desacuerdo**	**Acuerdo**	**Desacuerdo**	**Acuerdo**	**Desacuerdo**
	% (sd)	**%** (sd)	**%** (sd)	**%** (sd)	**%** (sd)	**%** (sd)
Cuando se utiliza el Cálculo diferencial en las demostraciones y en el planteamiento de problemas en Física, **no presto atención pues sé de antemano que no me voy a enterar y atiendo solamente a la fórmula que se obtiene al final**	**43.5** (4.8)	**37.0** (4.7)	**65.5** (4.4)	**19.8** (3.7)	**54.0** (6.3)	**31.7** (5.9)
En realidad, **lo único** que es necesario saber en la asignatura de Física sobre el Cálculo diferencial **es resolver las derivadas e integrales que aparecen en algunas fórmulas**	**34.3** (4.6)	**49.1** (4.8)	**55.2** (4.6)	**25.0** (4.0)	**47.6** (6.3)	**23.8** (5.4)

Aunque el 81.6% de los profesores de Enseñanza Secundaria considera necesario el uso del Cálculo diferencial para enseñar la Física de COU, el 41.9% se muestra claramente de acuerdo, y el 18% lo admite, con que *en realidad, lo importante es que los alumnos sepan obtener derivadas e integrales de algunas funciones sencillas*.

La preponderancia del *mecanismo* sobre la comprensión es intuida claramente por los estudiantes: más del 60% de los alumnos de Física de COU, un 80% de los de Física de 1er curso y un 70% de los estudiantes de 2º curso o superiores de las carreras de Ciencias Físicas o Químicas, admite o está claramente de acuerdo con que *cuando se utiliza el Cálculo diferencial en las demostraciones y el planteamiento de problemas en Física,* ***no presto atención****, pues sé de antemano que no me voy a enterar y atiendo solamente a la fórmula que se obtiene al final.*

El 75% de los estudiantes universitarios de asignaturas de Física admiten o están claramente de acuerdo con que *lo único que es necesario saber en la asignatura de Física sobre el Cálculo diferencial es resolver las derivadas e integrales que aparecen en algunas fórmulas.*

Los resultados aparentemente mejores de los alumnos de COU no deben ser interpretados de un modo aislado, sino contemplando globalmente los resultados ya mostrados hasta aquí y los que presentaremos a continuación. La escasa experiencia de estos alumnos en el Cálculo diferencial podría hacer que aún no hubieran *aprendido* el estatus que llega a adquirir el Cálculo diferencial en las clases de Física (en opinión de sus compañeros de superior nivel y experiencia).

Este reduccionismo a la mecánica del Cálculo afecta, lógicamente, a las expectativas sobre la posibilidad de entender y usar con seguridad el Cálculo en situaciones novedosas, tal como muestran los resultados de las tablas 5.XVI y 5.XVII.

TABLA 5.XVI. Expectativas de los profesores sobre el uso del Cálculo diferencial	Profesores Acuerdo % (sd)	Profesores Desacuerdo % (sd)
Por lo general, cuando se les propone a los alumnos de COU una situación donde tengan que hacer uso del Cálculo diferencial (con tal que dicha situación se separe, aunque sea poco, de aquellas muy sencillas o de las vistas expresamente en clase), **suelen aparecer graves deficiencias en su comprensión y uso** (N=92)	**90.2** (3.1)	**1.1** (1.1)
Pienso que **los propios profesores no dominan con seguridad suficiente el Cálculo diferencial** como para usarlo ante situaciones y problemas nuevos (N=103)	**56.3** (4.9)	**11.7** (3.2)
Yo me siento seguro para saber cuándo y por qué usar el Cálculo diferencial en Física, y capaz de usarlo para resolver nuevos problemas (N=101)	**21.8** (4.1)	**47.5** (5.0)

TABLA 5.XVII. Expectativas de los estudiantes sobre el uso del Cálculo diferencial	COU (N=108)		1º Univ. (N=116)		≥ 2º Univ. (N=63)	
	Acuerdo % (sd)	Desacuerdo % (sd)	Acuerdo % (sd)	Desacuerdo % (sd)	Acuerdo % (sd)	Desacuerdo % (sd)
Noto que el profesor utiliza el Cálculo diferencial porque lo necesita para el desarrollo del tema, **pero él no espera que nosotros lo entendamos**	**47.2** (4.8)	**35.2** (4.6)	**59.5** (4.6)	**23.3** (3.9)	**41.3** (6.3)	**36.5** (6.1)
Yo **utilizo con seguridad el Cálculo diferencial** y me siento capaz de resolver nuevos problemas con él	**45.4** (4.8)	**21.3** (4.0)	**55.2** (4.6)	**17.2** (3.5)	**63.5** (6.1)	**12.7** (4.2)

Son esclarecedoras y rotundas las respuestas de los profesores de Física de Enseñanza Secundaria: la práctica totalidad acepta que los alumnos de COU tienen graves deficiencias en la comprensión y uso del Cálculo diferencial ante situaciones ligeramente distintas de las vistas en clase. Casi el 90% reconoce claramente o admite que los propios profesores no dominan con seguridad suficiente el Calculo diferencial ante situaciones nuevas, y sólo el 22% se muestra seguro de sus conocimientos sobre cuándo y por qué usar el Cálculo diferencial en Física. Es llamativo que casi la mitad reconoce claramente que no se siente seguro. No es sorprendente, pues, que exista ese *malestar difuso* en torno a esta cuestión en la enseñanza de la Física: los propios profesores son conscientes de sus deficiencias pero no pueden salir de ellas y, por los resultados anteriores, posiblemente las esconden tras la idea de *incrementos infinitesimales*, donde *todo es posible*, y el énfasis en las reglas de cálculo.

La seguridad, pues, que proclaman los alumnos debe contemplarse desde los resultados de los profesores y los de la tabla 5.XV. Al comparar estos resultados, la única interpretación lógica que cabe es la de que los alumnos se sienten seguros al utilizar el Cálculo diferencial porque, cada vez más, lo identifican con el manejo de reglas de derivación e integración. Sólo así se comprende que, en la misma muestra de alumnos de Física de primer curso, por ejemplo, en la que el 80.2% acepta claramente o admite que *cuando se utiliza el Cálculo diferencial en las demostraciones y en el planteamiento de problemas de Física no presta atención pues sabe que no se va a enterar*, y donde el 75% admite que *lo único necesario que hay que saber sobre el Cálculo diferencial en Física es resolver las derivadas e integrales que aparecen en algunas fórmulas*, posteriormente exista un 55.2% que piense que utiliza con seguridad el Cálculo diferencial. Es, de nuevo, una evidencia del malestar existente en torno al Cálculo diferencial, que sólo un tercio, aproximadamente, de los alumnos de todos los niveles analizados (un cuarto de los estudiantes de Física en primer curso universitario) se muestre en desacuerdo con la afirmación de que *su profesor utiliza el Cálculo diferencial pero no espera que ellos lo entiendan*.

Esta situación se haría insostenible si no fuese por la existencia de un **acuerdo tácito** entre profesores y estudiantes, percibido claramente por éstos últimos, según el cual, **aunque el Cálculo diferencial se usa, el profesor no espera que sus alumnos lo entiendan, ni ellos mismos aspiran a comprenderlo.**

Los extractos de entrevistas 19, 20 y 21 muestran con claridad la existencia de esa actitud mecánica que les permite sobrellevar las deficiencias en la comprensión, e incluso reconocen la existencia de ese acuerdo tácito.

EXTRACTO 19: Ejemplo de respuesta en la que reconoce sus deficiencias de comprensión y la actitud mecánica adoptada (Julia, profesora en formación)

E: ¿Te enterabas cuando tus profesores o libros de Física usaban el Cálculo diferencial?

Julia: *Me enteraba de cómo se realizaba el cálculo, pero de lo que era no, nunca me he enterado*

EXTRACTO 20: Ejemplo de respuesta reconociendo un rechazo y la actitud mecánica adoptada (Sergio, alumno de *alto rendimiento*, COU)

Sergio: *Ver todo eso en la pizarra causa impresión, a primera vista es horroroso, claro que produce rechazo.*

E: ¿Por qué crees que ocurre eso?

Sergio: *Nosotros es que vamos a lo práctico, y ver tanta operación pues parece que asusta un poco... pero luego no es nada porque al final lo que interesa es el resultado, yendo a lo práctico. A mí me pasa igual, pero luego llego a casa y lo saco.*

EXTRACTO 21: Ejemplo de respuesta reconociendo deficiencias, superables cuando se adopta una actitud mecánica (Juan, alumno de *alto rendimiento*, COU)

Juan: *La verdad, cuando hay algunas integrales –por ejemplo, unas que tienen un "cerito" en medio que no sé de qué van- y las veo, pues no me las estudio porque puedo perder mucho tiempo tratando de comprenderlas.*

E: ¿Y las otras?

Juan: *Las que pillo rápido sí*

E: ¿Pero no decías que no sabías su significado?

Juan: *Sí, pero sé hacerlas*

El siguiente fragmento pertenece a una entrevista en la que el entrevistado tenía altas expectativas sobre su comprensión del Cálculo. Sin embargo, una breve reflexión le ha hecho tomar conciencia de que eran unas expectativas aparentes, y reconoce su actitud mecánica cuando usa el Cálculo.

EXTRACTO 22: Ejemplo de respuesta en la que reconoce haber tomado conciencia de sus propias deficiencias a lo largo de la entrevista (Pedro, alumno de *alto rendimiento*, COU)

Pedro: *Al principio* (el profesor) *explicó en qué se basa lo del Cálculo diferencial, en esos momentos sí* (me enteré), *pero como después no se toca el tema, se da por hecho que te enteras, pero... ahora que lo estoy pensando no sé de qué va el tema de las diferenciales...*

E: ¿Te enteras cuando lo usa?

Pedro: *Cuando lo usa sí, pero cuando me preguntas...*

E: ¿Te enteras, lo entiendes, o simplemente sigues la clase?

Pedro: *Lo que yo me entero es del concepto físico, pero de la diferencial no. Yo le voy siguiendo la clase...*

5.2.6. Resultados que muestran que los profesores y estudiantes no valoran positivamente el uso del Cálculo diferencial en el aprendizaje de la Física

Los resultados presentados hasta aquí han mostrado que los profesores y estudiantes no comprenden lo que hacen cuando utilizan el Cálculo diferencial, y se limitan a aplicar de forma mecánica un conjunto de reglas y algoritmos. Cabe esperar que, en estas condiciones, no se aprecie el importante papel de ayuda e impulso que el Cálculo diferencial juega en la Física, y sea valorado negativamente. Las cuestiones C6p, C7p y C8e (cap. 4, pp. 137, 138 y 145) estudiaban esa valoración mediante un conjunto de proposiciones con las que los profesores y estudiantes debían mostrar su grado de acuerdo o desacuerdo utilizando una escala tipo Likert. Los resultados se presentan en las tablas 5.XVIII y 5.XIX.

TABLA 5.XVIII. Valoración de los profesores del uso del Cálculo diferencial en las clases de Física	Profesores (N=90)	
	Acuerdo	**Desacuerdo**
	% (sd)	**%** (sd)
El uso del Cálculo diferencial en las clases de Física en COU es **una importante fuente de rechazo y de actitudes negativas** de los alumnos hacia la Física	**65.6** (5.0)	**15.6** (3.8)
El uso del Cálculo diferencial en los textos y clases de Física de COU **enmascaran el significado y contenido físico de los conceptos e ideas que se trabajan**	**43.3** (5.3)	**36.7** (5.1)

TABLA 5.XIX. Valoración de los estudiantes del uso del Cálculo diferencial en las clases de Física	**COU** (N=108)		**1º Univ.** (N=116)		≥ **2º Univ.** (N=63)	
	Acuerdo	**Desacuerdo**	**Acuerdo**	**Desacuerdo**	**Acuerdo**	**Desacuerdo**
	% (sd)	% (sd)	% (sd)	% (sd)	% (sd)	% (sd)
Una de las causas más importantes de que a los alumnos no les guste la Física, es el uso del Cálculo diferencial	**38.0** (4.7)	**22.2** (4.0)	**32.8** (4.4)	**34.5** (4.4)	**14.3** (4.4)	**55.6** (6.3)
El uso del Cálculo diferencial hace que la Física sea más difícil de comprender, de forma que, **más que ayudar, obstaculiza la comprensión de los conceptos**	**41.7** (4.8)	**34.3** (4.6)	**51.7** (4.7)	**35.3** (4.5)	**23.8** (5.4)	**58.7** (6.3)

Los resultados de estas dos últimas tablas confirman que **la mayoría de los profesores y estudiantes de COU o 1º curso universitario (más del 65%) reconocen claramente o admiten que el uso del Cálculo diferencial es un obstáculo para la comprensión y una importante fuente de rechazo hacia la Física.** Resulta así que lo que debería acudir en ayuda de la comprensión física, acaba convirtiéndose -debido al uso incorrecto que habitualmente se hace- en un obstáculo que genera rechazo y actitudes negativas.

Esta valoración no se manifiesta con la misma rotundidad entre los estudiantes de 2º curso universitario, un resultado que consideramos lógico pues, habituados como están a identificar cualquier clase de Física con el uso del Cálculo diferencial, resulta impensable para ellos considerar la una sin el otro. No obstante, es preocupante que, a pesar de este condicionante, el 41.3% de estos alumnos siga admitiendo que el Cálculo es un obstáculo y una fuente de rechazo hacia la Física.

Los dos siguientes fragmentos son ejemplos de manifestaciones de los entrevistados reconociendo la influencia negativa del uso habitual del Cálculo en el aprendizaje de la Física.

EXTRACTO 23: Ejemplo de respuesta reconociendo que el Cálculo influye negativamente en la actitud hacia la Física, en ella y sus compañeros (María, profesora en formación)

María: *Yo creo que sí, (que influye) en contra, pues había integrales difíciles de resolver que no sabías la derivada... y además, no sabía lo que era una integral.*

E: ¿Crees que tus compañeros entendían ese lenguaje?

María: *Yo creo que no. Sabían lo que se estaba escribiendo, pero no sabían en realidad lo que era eso.*

E: ¿A ti te pasaba lo mismo?

María: *Pues sí*

EXTRACTO 24: Ejemplo de respuesta reconociendo una influencia negativa del Cálculo diferencial hacia la Física (Isa, alumna de *alto rendimiento*, COU)

Isa: *Sí influye bastante, porque lo ven bastante difícil*

E: ¿Y les gusta menos?

Isa: *Sí, les gusta menos. Yo creo que no entienden*

E: ¿Y tú?

Isa: *A mí me pasa igual...*

Los resultados pormenorizados que se han presentado en este capítulo, referidos a la concepción y uso de la diferencial en los textos, profesores y estudiantes en las clases de Física, constituyen, como hemos mostrado, una evidencia clara para la contrastación positiva de todas las consecuencias contrastables en que hemos concretado nuestra primera hipótesis, y nos permiten enunciar las conclusiones que serán presentadas en el capítulo siguiente.

Capítulo 6

CONCLUSIONES DE LOS RESULTADOS CORRESPONDIENTES A LA PRIMERA HIPÓTESIS

En el capítulo anterior hemos presentado los resultados obtenidos al contrastar nuestra primera hipótesis con un diseño experimental en el que han participado 210 profesores, 732 estudiantes y 45 libros (7 de ellos de 1º Bachillerato Logse). Esos resultados confirman la ausencia generalizada de los indicadores de una adecuada comprensión del uso de la diferencial (ver cap. 2, p. 81) en la enseñanza y aprendizaje habitual de la Física. En concreto, esos indicadores están ausentes en la forma de actuar y en lo que saben y dicen los profesores y estudiantes, así como en lo que hacen y dicen los libros de texto.

Presentaremos ahora las conclusiones más importantes que hemos obtenido respecto a cada uno de los indicadores mencionados.

1. No se conoce con precisión, y no se le presta atención, al *cuándo* y *por qué* se hace necesario el uso de la diferencial.

A pesar de que el 92% de los textos analizados utilizan el concepto de diferencial con sentido en sí misma, y el 82% de los profesores encuestados se muestra de acuerdo con que “el uso del Cálculo diferencial es necesario para desarrollar la Física que se imparte en COU”, **cuando se usa la diferencial en una situación de enseñanza no se presta atención a su justificación**. En efecto, el 94% de los textos no justifica de forma habitual –aunque sea *en dos palabras*- el uso de la diferencial, y el 65% de los profesores ni siquiera intenta justificarlo cuando resuelve un problema *en situación de clase* para estudiantes de COU.

Como consecuencia de esta deficiencia en la enseñanza, **estudiantes y profesores** (que previamente han sido también estudiantes) **no conocen con precisión cuándo y por qué es necesario recurrir al uso de la diferencial**. Más del **88%** de profesores y estudiantes no saben reconocer, entre cinco opciones, la verdadera razón que obliga a pasar de incrementos a diferenciales, más del **84%** de estudiantes de COU y universitarios de la asignatura de Física no saben reconocer en ecuaciones sencillas del movimiento cuándo será imprescindible usar el Cálculo diferencial para calcular la velocidad instantánea. Cuando resuelven problemas de Física en los que se le piden comentarios cuando usan el Cálculo diferencial, el 86% de los profesores y más del 95% de los estudiantes no incluyen comentario alguno para justificar por qué lo utilizan.

2. Profesores, estudiantes y libros de texto ignoran el significado físico correcto de las expresiones diferenciales, y no es habitual dar sentido físico a dichas expresiones.

El significado correcto de la diferencial (d*f* es una estimación del incremento: Ä*f*, realizada suponiendo un comportamiento lineal de la función respecto al cambio de variable: Ä*x*), **es absolutamente desconocido**: no aparece en ninguno de los textos analizados, ni en las respuestas de ninguno de los estudiantes, y tan sólo es expresada por el 2% de los profesores.

La concepción utilizada de forma mayoritaria -aunque generalmente de forma implícita-, que permite una interpretación coherente de todas las deficiencias encontradas, consiste en identificar la diferencial con un incremento *infinitesimal* o *muy pequeño*. Todos los textos de Física analizados expresan esta concepción errónea en alguna ocasión, aunque después en la mayoría de los tópicos no se menciona ningún significado. Los profesores y estudiantes tampoco se preocupan de asignar significado físico a las diferenciales que escriben para resolver problemas, a pesar de la petición expresa para que lo hicieran; el 60% de los profesores tampoco lo hace cuando resuelven un problema *en situación de clase* destinado a *clarificar físicamente* entre sus alumnos de COU el uso del Cálculo diferencial. Esta falta de preocupación por el significado es una consecuencia del uso mecánico y operativista del Cálculo desde los cursos de iniciación.

La ausencia de una reflexión clara sobre el significado, hace que la concepción de diferencial como *incremento infinitesimal* sea asumida de forma insegura, lo que impide que llegue a expresarse como *conocimiento declarativo*: si es posible recurrir al uso de reglas, más vale no expresar algo débilmente asumido. Esto explica no sólo la falta de referencia explícita al significado de la diferencial cuando se resuelven problemas, sino también cuando se les pregunta directamente a profesores y estudiantes por el significado físico de las expresiones diferenciales: más del 40% ni siquiera declara esta concepción errónea. De esta forma, los mismos profesores y estudiantes que comparten la concepción de Leibniz sobre la diferencial, pueden llegar a mantener al mismo tiempo una concepción más cercana a la de Cauchy, vaciando a la diferencial de significado y considerándola como un instrumento formal.

Resulta llamativo, además, que estando basada la concepción dominante en el supuesto valor (*muy pequeño*) de la diferencial, no exista tampoco una reflexión sobre su posible valor numérico: ningún texto incluye un solo comentario del que pueda deducirse que la diferencial puede tomar más de un valor numérico, y sólo el 3% le asigna un valor concreto; por su parte, más del 50% de los profesores y estudiantes se resisten a señalar un valor numérico concreto para la diferencial.

3. La relación entre diferencial y derivada es usada de forma operativa, pero ni se explica ni se comprende

Aunque en Matemáticas se enseña la derivada como el *límite de un cociente incremental* y se simboliza por y', en las clases de Física se interpreta la derivada como un *cociente diferencial* y se simboliza por: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Este paso se produce sin ninguna reflexión o explicación previa, de forma que el aprendizaje se produce a través de la repetición mecánica de reglas que responden al esquema: $y'=L \Rightarrow \mathrm{d}y=L\cdot\,\mathrm{d}x$, o: $\mathrm{d}y=L\cdot\,\mathrm{d}x \Rightarrow y'=L$

Como consecuencia, se utilizan esas reglas en un contexto operativo, pero no se comprende lo que se está haciendo: mientras el 92% de los textos analizados las usan, y el 76% de los estudiantes universitarios (más habituado a este tipo de reglas) realizan operaciones basadas en ese tipo de reglas, tan sólo el 18% de los textos comenta en alguna ocasión que la derivada es un cociente de diferenciales, y los estudiantes universitarios manifiestan sus dudas cuando se les pregunta directamente por las ideas que subyacen en ese tipo de reglas: sólo el 12% de reconoce explícitamente que la lectura de dy/dx como cociente de diferenciales es correcta.

4. Se usa la integral como *sumas de Riemann*, pero no se sabe por qué el cálculo de esas sumas se realiza mediante la *antiderivada* o *función primitiva* (Teorema Fundamental)

En la enseñanza de la Física se utiliza una concepción de integral como *sumas de Riemann*, o, al menos, como una *suma de muchos términos*. Así lo demuestra el hecho de que el 89% de los textos presenten esa concepción. Sin embargo, esta idea no aparece explícitamente cuando los profesores y estudiantes utilizan la integral para resolver problemas; en el caso del problema *ejemplificador* en situación de enseñanza, aparece en el 50% de los casos. Hemos interpretado esta ausencia como un reflejo del uso mecánico del Cálculo, poco preocupado de explicitar el significado de lo que se está haciendo.

Desde esta concepción de integral, no reducida a la de *integral indefinida* o *función primitiva*, no resulta evidente que su cálculo se realice mediante un proceso inverso al cálculo de derivadas. **De nuevo, esta importante idea (*la piedra angular del Cálculo*) ha sido aprendida por una repetición mecánica, pero sin comprender por qué se realiza así el cálculo de integrales**: menos del 10% de los textos aporta algún tipo de justificación, y ningún profesor o estudiante escribe argumento alguno cuando resuelven problemas, ni siquiera en el caso del problema *ejemplificador* en situación de enseñanza, destinado a explicar por qué la integral se calcula mediante la *antiderivada*. Cuando se les recuerda el contenido del Teorema Fundamental y se les pide que expresen argumentos (gráficos y/o analíticos, o razonamientos intuitivos) para justificar el hecho de que aparezca la función *primitiva* o *antiderivada*, ningún profesor o estudiante es capaz de recordar argumentos que lo justifiquen; en el mejor de los casos, un porcentaje inferior al 10% de profesores llega a identificar el producto f(x)· dx con dP, cuando aún restaría por demostrar que la integral de dP es precisamente ÄP.

La única reflexión que aparece en los textos en torno al concepto de integral es la justificación errónea de que: $\int dP$ = ÄP porque *la suma* (o el límite de esa suma) *de* *muchos incrementos pequeñísimos (aproximados) acabará dando un incremento exacto*. Es conveniente detenernos en esta idea sobre la integral porque encaja con la de diferencial como incremento infinitesimal, y constituye un razonamiento prototípico erróneo pero que intuitivamente parece correcto, y es análogo al utilizado por Leibniz. Se trata de suponer que si la diferencial es un incremento infinitesimal, la suma de infinitos trozos infinitesimales dará lugar al incremento macroscópico de la función, sin importar la forma de dichos trozos infinitesimales. Como se carece de una visión global de la estrategia del Cálculo, se ignora que para que eso ocurra es necesario **que la diferencial sea la estimación lineal tangente del Ä*f***; sólo en ese caso el límite de la suma de infinitos diferenciales infinitesimales es exactamente el incremento.

Esa creencia, tan fácil de materializar para nuestra mente, de que si los trozos son suficientemente pequeños no importa su forma para obtener, por agregación de dichos trozos, un objeto de cualquier forma deseada, es la que, posiblemente, produzca la *sensación de comprensión* de alumnos y profesores, aunque, como le ocurrió a Leibniz, simultáneamente vaya acompañada de otra *sensación de inseguridad*, pues, como ya hemos visto en los capítulos 1 y 2, dentro de esa concepción no existen criterios fiables y consistentes para el desarrollo del Cálculo diferencial.

5. Se ignora la naturaleza hipotética, tentativa, en casi todas las situaciones físicas, de la expresión diferencial de partida

Como ya hemos visto, la diferencial de una función no es cualquier estimación lineal respecto al cambio de variable, tan sólo aquélla cuya pendiente coincida con la función derivada, posibilitando así que la integral conduzca al resultado exacto. En la mayoría de las situaciones físicas, no hay manera de garantizar *a priori* cuál es la expresión diferencial correcta, sino que se adopta una de ellas a modo de hipótesis, y se contrasta su validez analizando el resultado al que conduce.

Sin embargo, **este carácter hipotético está completamente ausente**, ya sea de manera implícita o explícita, en todas las situaciones de enseñanza analizadas: libros de texto -tanto en sus problemas resueltos como en sus desarrollos teóricos- y problemas resueltos por profesores en *situación de enseñanza*. Tampoco aparece esta idea cuando profesores y estudiantes resuelven problemas de Física con explicaciones y comentarios sobre el Cálculo diferencial, ni en sus explicaciones sobre el significado de algunas expresiones diferenciales.

Se transmite así una idea de seguridad *a priori* que es falsa y que no puede generar más que inseguridad e incomprensión ante situaciones novedosas.

6. El uso del Cálculo diferencial se limita a la aplicación mecánica de reglas, anulando las expectativas de poder usarlo con sentido

Todas las conclusiones presentadas hasta aquí: ausencia de justificación del uso de la diferencial, despreocupación por aclarar el significado –aunque sea erróneo- de las expresiones diferenciales o de la integral, ausencia de explicaciones para relacionar la derivada con la diferencial o para justificar la relación inversa entre diferencial e integral, son todas ellas una muestra del **énfasis en los aspectos operativos y la reducción del Cálculo a la aplicación mecánica de reglas**. Además, los propios profesores y estudiantes reconocen esta forma de entender y usar el Cálculo: más del 60% aceptan implícitamente que el uso del Cálculo en la Física se reduce a la aplicación mecánica de reglas, afirmación que llegan a aceptar el 75% de los estudiantes universitarios.

Como consecuencia de este uso mecánico, **los profesores y estudiantes tienen graves dificultades para utilizar el Cálculo diferencial –aunque sea de forma equivocada- con seguridad y sentido ante nuevas situaciones:** el 80% de los alumnos de COU, el 50% de los universitarios y el 20% de los profesores ni siquiera lo utilizan cuando se les invita expresamente a hacerlo y comentarlo para resolver problemas sencillos, y los propios profesores (más del 80%) manifiestan sus bajas expectativas para usar con seguridad el Cálculo diferencial y para que lo usen sus alumnos.

Esta situación da lugar a la existencia de un acuerdo tácito aceptado por el 65% de los estudiantes: **aunque el Cálculo diferencial se usa, el profesor no espera que sus alumnos lo entiendan, ni ellos mismos aspiran a comprenderlo.**

7. No se valora positivamente el papel de la diferencial en el aprendizaje de la Física

En las condiciones que han sido descritas, resulta lógico no sólo la falta de expectativas de llegar a entender y usar con sentido el Cálculo diferencial en la Física, sino que además sea **considerado como un obstáculo y una fuente de rechazo, sin valorar su enorme importancia como ayuda para avanzar en la comprensión física**: más del 65% de los profesores y estudiantes de COU o 1º curso universitario (el 45% de los estudiantes de 2º curso universitario) aceptan, implícita o explícitamente, que el uso del Cálculo diferencial es un obstáculo para la comprensión y una importante fuente de rechazo hacia la Física.

Los resultados globales que hemos presentado hasta aquí nos permiten validar -de forma rotunda en la mayoría de los casos- todas y cada una de las consecuencias que previamente habíamos obtenido de nuestra hipótesis.

Podemos afirmar que existe un uso mecánico y algorítmico del Cálculo en la enseñanza de la Física, despreocupado por la comprensión y el sentido de lo que se hace, que provoca una falta de confianza en su uso y un claro rechazo al mismo. Esta situación, a pesar de la existencia de un acuerdo tácito entre profesores y estudiantes, sería difícilmente sostenible sin la existencia de dos ideas fundamentales:

- la idea *intuitiva* –y errónea- de que la suma de infinitos trozos infinitesimales acabará dando siempre un resultado correcto, sin importar la forma concreta como se eligen esos trozos tan pequeños, amparados en que, al final, el error será despreciable
- la apariencia de rigor y de que *funciona*, siempre que se escriban correctamente las expresiones diferenciales de partida y se apliquen correctamente todas las reglas de Cálculo. Precisamente en este último aspecto se concentra toda la atención en el uso habitual del Cálculo, lo que sirve para ocultar la escasa comprensión de lo que se hace e impide que se cuestione cómo se eligen las expresiones de partida.

Ante esta situación, los programas oficiales y libros de texto correspondientes al nuevo Bachillerato han optado por la desaparición expresa del concepto de diferencial, realizando rodeos y buscando soluciones particulares para llegar a los mismos resultados. En nuestra opinión, esto no hace sino retrasar el problema. **La cuestión principal no es que se introduzcan antes o después, sino que se haga bien cuando se empiece a usar el Cálculo diferencial, y también cuando se continúe usando.**

Con la intención de *hacerlo bien* –ya sea en el Bachillerato o en la Universidad-, hemos dedicado nuestro esfuerzo a formular una propuesta alternativa que permita superar la situación crítica que se ha descrito, de forma que el Cálculo diferencial se convierta en una valiosa ayuda para seguir profundizando en el aprendizaje de la Física. En nuestro caso, y teniendo en cuenta el nivel en que desarrollamos nuestra tarea docente, hemos elaborado y aplicado tal propuesta en 3º BUP y COU.

Capítulo 7

ENUNCIADO Y FUNDAMENTACIÓN DE LA SEGUNDA HIPÓTESIS.

7. 1. FORMULACIÓN DE LA SEGUNDA HIPÓTESIS

Teniendo en cuenta el carácter novedoso del problema tratado (en la frontera de los estudios de Bachillerato y universitarios, de la Física y las Matemáticas), el arrojar luz sobre el mismo, identificando claramente las deficiencias de tipo escolar y las causas que están en su origen, supone un logro de indudable interés didáctico. Pero, en nuestra opinión, la investigación didáctica está obligada a ir más allá de la identificación de deficiencias: debe utilizar ese conocimiento para mostrar la posibilidad de superarlas. La segunda parte de este trabajo está destinada a mostrar –de un modo necesariamente limitado- que es posible introducir y desarrollar adecuadamente el Cálculo diferencial (centrándonos en el papel crucial de la diferencial) en la enseñanza de la Física, y que, cuando se hace así, se producen mejoras sensibles respecto a la situación habitual que hemos descrito en la segunda parte.

No es necesario dedicar mucho esfuerzo a mostrar la relevancia de este tema. La Unesco, en 1975, fijaba ya como prioridad la elaboración de nuevo material de instrucción "interesante y que favorezca el desarrollo de técnicas matemáticas", "que requiera cierta base de física y matemática y que sirva para relacionar ambas materias", "que sirva para proporcionar a los estudiantes práctica en la expresión matemática de situaciones" (Unesco, 1975*b*, pp. 219-220). Con posterioridad, distintos trabajos concluyen en la necesidad de formular propuestas alternativas de enseñanza del Cálculo y de elaborar materiales basados en ellas (Alibert *et al*., 1987; Ferrini-Mundy y Geuther, 1991), esperando mejorar así los resultados en la propia asignatura de Física y promover un cambio positivo de actitud entre los estudiantes (Martin y Coleman, 1994; Rutter, 1994)[26].

Las universidades americanas también se han planteado en los últimos años reformar el curriculum de Cálculo, lo que ha generado un vivo e interesante debate en el que se contraponen la orientación conceptual y aplicada que inspira dicha reforma con la defensa del rigor y el formalismo que reclaman sus adversarios (Jhonson, 1995; Kleinfeld, 1996; Ostebee y Zorn, 1997). Con carácter más concreto, han aparecido trabajos con propuestas alternativas sobre la enseñanza del Cálculo diferencial que se centran en distintos aspectos como: el uso del cálculo numérico y la simulación computacional (Buzzo, 1992; Filotto, 1991); el concepto de derivada o posibles definiciones alternativas (Azcárate, 1990; Khun, 1991; Kopel y Schramm, 1990); el concepto de integral de Riemann (Bartle, 1996; Calvo, 1998) o de Lebesgue (Turégano, 1994); la proposición de actividades para la enseñanza del Teorema Fundamental (Thompson, 1994); e, incluso, en algunos trabajos se plantea un cambio más drástico consistente en la enseñanza del Cálculo no estándar (NSA) (Cuenca, 1986). Pero, con la excepción de los trabajos del grupo de Viennot (Alibert *et al.*, 1987; Alibert y Legrand, 1989; Artigue, 1986 y 1989; Artigue y Viennot, 1987), en ninguna de esas propuestas alternativas se presta atención especial al concepto de diferencial. Si bien el grupo citado ha realizado talleres de problemas que imparten a profesores y estudiantes universitarios, no conocemos investigaciones destinadas a incorporar (mediante materiales para el aula) las nuevas ideas de un modo integrado en el desarrollo habitual de las clases de Física, ni en la Universidad ni en el Bachillerato. Y este es el problema hacia el que hemos dirigido esta segunda parte de nuestra investigación

La hipótesis que ha vertebrado nuestro plan de trabajo para avanzar en la solución de dicho problema puede formularse de la siguiente forma:

> ***es posible desarrollar la enseñanza de la Física -desde los primeros momentos en que se requiere el Cálculo diferencial y de un modo coherente con los hallazgos de la investigación didáctica- con la***

[26] Conley *et al.* (1992) van más allá al sugerir que mejorar el curriculum de Cálculo no sólo es mejorar la enseñanza de las Matemáticas sino de todas las Ciencias e Ingenierías, alcanzando así al nivel de capacidad científica de EE.UU.

concepción de diferencial de Fréchet (con la “transposición” o “versión” didáctica de esta concepción que hemos realizado en el capítulo 2). Este modo de introducir y desarrollar el Cálculo diferencial en el contexto de la enseñanza de la Física, contribuye a superar las deficiencias de la enseñanza habitual, mejorando el aprendizaje y las actitudes de alumnos y profesores.

Hemos de advertir que no se trata de comprobar que es posible el desarrollo de la Física utilizando las ideas de Fréchet. Esto no podría ser de otra manera: parece evidente que los avances en Análisis Matemático pueden ser incorporados para el desarrollo de situaciones físicas ya conocidas y resueltas mediante conceptos matemáticos precedentes. Lo que deseamos probar es que se puede incorporar a la enseñanza de la Física a partir del momento en que se hace necesario utilizar el Cálculo diferencial (normalmente, a partir de 3º de BUP o COU), que puede hacerse de un modo coherente con las propuestas actuales de la investigación didáctica, y que con ello se mejora la comprensión y las actitudes de alumnos y profesores.

No obstante, dada la amplitud de la hipótesis, la ausencia de trabajos de investigación didáctica sobre la enseñanza del Cálculo diferencial en torno a la diferencial de Fréchet y la necesaria limitación de este trabajo, el avance realizado en la contrastación de esta hipótesis debe ser considerado como un primer paso que, si resulta prometedor, debe ser consolidado y ampliado en futuras investigaciones.

7. 2. FUNDAMENTACIÓN DE LA SEGUNDA HIPÓTESIS

Nuestra hipótesis se fundamenta: a) en la significatividad potencial (en términos ausubelianos) que introduce la concepción de Fréchet en la estructura conceptual básica del Cálculo diferencial, y b) en la clara posibilidad de que pueda incorporarse dentro de una estrategia de enseñanza basada en la investigación didáctica actual -que ha conseguido claros avances en otros aspectos de la enseñanza/ aprendizaje de las ciencias- y recoja, simultáneamente, las recomendaciones recientes de instituciones e investigadores sobre la enseñanza del Cálculo.

7.2.1 La concepción de Fréchet puede aportar *transparencia conceptual*

Nuestra hipótesis se fundamenta, en primer lugar, en la *transparencia conceptual* que aporta la concepción de diferencial como la *mejor* estimación lineal del incremento (*la única que permite hallar el valor exacto del incremento vía integral*).

Ya hemos mostrado en el capítulo 1 las deficiencias de las concepciones de Leibniz y Cauchy, que generaron, incluso en físicos y matemáticos profesionales, inseguridad o pérdida de sentido físico de lo que se hacía. Por otro lado, los resultados de la segunda parte de nuestra investigación muestran con claridad que en los profesores y alumnos se reproducen ideas similares a las de dichas concepciones, principalmente a la de Leibniz, que se manifiestan en la desconfianza, incomprensión e inconsistencia de lo que hacen y por qué lo hacen (caps. 5 y 6). En nuestra opinión, esta es la base que genera ese *malestar difuso* al que aludíamos al principio de este trabajo (cap. 1, p. 10).

En el capítulo 2, en cambio, hemos mostrado cómo la diferencial de Fréchet (la *versión* que hemos desarrollado para funciones de una sola variable) responde a una estructura lógica sin inconsistencias y reúne el significado físico, el geométrico y el analítico, haciendo que el por qué de las relaciones entre la derivada, diferencial, integral definida y función primitiva parezcan, prácticamente, evidentes. Cabe esperar, pues, que se produzcan mejoras claras si es posible desarrollar la enseñanza (y esta es una cuestión de hecho a la que nos vamos a enfrentar) utilizando la *nueva* concepción.

7.2.2. La *versión didáctica* de la concepción de Fréchet es coherente con los resultados de la investigación en didáctica de las ciencias

El trabajo realizado en el capítulo 2 hace prever que será posible incorporar la *nueva* concepción de la diferencial en la enseñanza de un modo coherente con las propuestas metodológicas actuales, basadas en la investigación sobre la enseñanza de las ciencias.

En los últimos años, el aumento espectacular de los trabajos de investigación didáctica ha dado como resultado un mayor conocimiento de las dificultades que tienen los alumnos para aprender ciencia y han puesto en cuestión, de un modo fundado, el modelo convencional de enseñanza basado fundamentalmente en la creencia de que la transmisión de los conocimientos por el profesor en su estado final (*decir lo que es o mostrar cómo se hace, de una manera directa y acabada, junto con la realización de ejercicios*) es la única o la mejor forma de lograr que los alumnos aprendan.

Esta investigación no se ha limitado a identificar las deficiencias del modelo transmisivo sino que ha generado modelos de enseñanza que pueden competir con él. Salvando diferencias que podemos considerar *menos importantes*, dichos modelos coinciden en considerar que *aprender es poder justificar lo que se piensa y que los procesos de producción y aceptación (de justificación) de conocimientos que se desarrollan en la vida cotidiana son muy diferentes de los que caracterizan el trabajo científico*. Desde esta orientación, pues, el aprendizaje sólido de los conceptos científicos debe ir acompañado del aprendizaje metodológico, es decir, de formas de producir y aceptar conocimientos que caracterizan la metodología científica. Este desarrollo simultáneo, conceptual y metodológico, se verá favorecido en la medida en que el proceso de enseñanza/ aprendizaje se desarrolle en un contexto de (re)construcción de conocimientos (evitando, pues, su transmisión en estado final), en el que existan oportunidades reiteradas y sistemáticas para poner en práctica (en la medida de lo posible en el nivel escolar) procesos de justificación típicos de la investigación, de la resolución de problemas científicos, y en el que se favorezca la implicación afectiva (actitudinal) necesaria para que esa tarea tan exigente pueda llevarse a cabo.

En efecto, la idea de que el aprendizaje y la enseñanza de las ciencias se desarrolle como un proceso de (re)construcción de conocimientos en un contexto que se inspire (dentro de lo posible en cada nivel) en el de la investigación, es compartida por un amplio abanico de investigadores en didáctica de las ciencias (Osborne y Wittrok, 1985; Driver y Oldham, 1986; Gil y Martínez Torregrosa, 1987; Duschl, 1990 y 1995; Burbules y Linn, 1991; Gil, Carrascosa *et al.*, 1991; Wheatley, 1991; Hodson, 1992*a*; Gil, 1993; Furió, 1994; Furió y Guisasola, 1998; Bencze y Hodson, 1999; Gil, Carrascosa *et al.*, 1999; Zoller, 1999). También las recientes propuestas curriculares han hecho suya esta orientación. Así, los *Principles and Standards for School Mathematics* afirman "que los estudiantes aprenden matemáticas construyendo activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y el conocimiento previo", y, para facilitar esa construcción, recomiendan la realización de actividades destinadas a que los alumnos tomen conciencia de sus conocimientos y estrategias informales, concediendo especial importancia a la resolución de problemas, el desarrollo del razonamiento y la argumentación entre iguales (NCTM, 2000). Por su parte, los *National Standards for Science Education* (NRC, 1995) proclaman que "en todos los niveles, la educación científica debe basarse en la metodología de la investigación", como forma de favorecer, tanto una actividad significativa, en torno a problemas susceptibles de interesar a los estudiantes, como su progresiva autonomía de juicio y capacidad de participación en tareas colectivas.

Ello se fundamenta, entre otras razones, en el hecho de que el contexto hipotético-deductivo característico de una investigación suministra oportunidades idóneas para un aprendizaje profundo, al obligar a plantear problemas y discutir su relevancia, tomar decisiones que permitan avanzar, formular ideas de manera tentativa, ponerlas a prueba dentro de una estructura lógica general, obtener evidencias para apoyar las conclusiones, utilizar los criterios de coherencia y universalidad… y todo ello en un ambiente de trabajo colectivo y de implicación personal en la tarea. "Investigar" –o, utilizando otras terminologías próximas "indagar" (Díaz y Jiménez, 1999), o "construir modelos" (Pozo, 1989)- es una forma de aprendizaje profundo: el enfrentarse a situaciones problemáticas y elaborar posibles soluciones a modo de tentativas, exige el desarrollo de procesos de justificación individuales y colectivos, que forman parte de las estrategias científicas.

Nuestro trabajo se inserta en esta línea y se apoya en esfuerzos de innovación e investigación en el campo de la educación científica, tanto en el nivel secundario como en el universitario (Gil, Furió *et al.*, 1999). Por supuesto, esto tiene implicaciones sobre la estructura de los temas y los cursos, la elaboración de las secuencias de actividades para los alumnos, y, necesariamente, de la evaluación. No tendría sentido que la nueva orientación que deseamos para el aprendizaje de los conceptos del Cálculo diferencial en la Física no pudieran integrarse en el desarrollo de una enseñanza *problematizada* de la Física. No obstante, como veremos a continuación, nuestras expectativas son claramente favorables a esta posibilidad.

La estructura de los temas y cursos en un contexto de investigación y la nueva concepción de diferencial

Si, como hemos intentado fundamentar muy someramente, el aprendizaje sólido de los conocimientos científicos implica el desarrollo simultáneo de procesos de producción y aceptación típicos del trabajo científico, y de la implicación axiológica necesaria para que esa tarea tan exigente pueda llevarse a cabo, la planificación de un curso y de los temas en él desarrollados no puede responder simplemente a la lógica que expresa la secuencia: *¿qué objetivos deben lograr los estudiantes?, ¿qué contenidos impartir?, ¿cómo ha de ser el examen para constatar el aprendizaje logrado?*, sino que obliga a formularse las preguntas: *¿cómo problematizar el curso y cada uno de los temas incluidos para favorecer el aprendizaje con sentido?, ¿cómo evaluar para impulsar y orientar dicho aprendizaje?*

Desde nuestra propuesta, por tanto, para organizar la estructura de los temas y los cursos, es necesario identificar algunos de los problemas que están en el origen de las teorías que queremos que pasen a formar parte de los conocimientos de nuestros alumnos, discutir la relevancia de los mismos y planificar una estrategia que permita avanzar en la solución a los problemas planteados, en un ambiente hipotético deductivo que suministre oportunidades para la apropiación de la epistemología científica. Esto requiere un análisis histórico, epistemológico y didáctico sobre la materia seleccionada para que su estudio sea útil y factible para los estudiantes implicados. Este análisis está guiado por preguntas tales como :

- ¿Qué problemas están en el origen de las teorías que deseamos que pasen a formar parte del bagaje de nuestros alumnos (objetivos/ clave)?
- ¿Cuáles son/fueron los obstáculos más importantes que hubo que superar para avanzar en la solución a los problemas planteados? ¿Qué ideas, qué razonamientos pueden tener los alumnos sobre los aspectos anteriores que puedan suponer obstáculos para el aprendizaje y que, por tanto, deben ser tomados en consideración? (Identificación de objetivos/ obstáculo).
- ¿Qué plan concreto de investigación –secuenciación- conviene proponer a los estudiantes para avanzar en la solución a los problemas iniciales?

Este estudio está dirigido, en definitiva, al diseño de una estructura del curso que permita a los estudiantes, con el apoyo de profesor, enfrentarse a situaciones problemáticas de interés, poniendo en juego buena parte de los procesos de producción y validación de los conocimientos científicos. Más concretamente ello supone:

1. Plantear, en el inicio del curso (y, en su caso, de los grandes bloques o temas que lo compongan) situaciones problemáticas que –inspirándose en las que desde el punto de vista histórico y/o epistemológico, están en el origen de los conocimientos implicados- sirvan de punto de partida para el trabajo de los estudiantes. Por supuesto, debe prestarse atención explícita a que los alumnos se apropien del o de los problemas, a que tomen conciencia de su interés, como condición necesaria para su implicación en la tarea.

2. Diseñar la secuenciación de los temas del curso con una lógica problematizada, es decir, como una posible estrategia para avanzar en la solución a las grandes preguntas iniciales. Esto da lugar a un hilo conductor en el que cada tema se convierte en un problema más concreto cuya solución permite avanzar en el problema inicial, al mismo tiempo que puede generar nuevos problemas, incrementándose así las relaciones entre los distintos temas.

3. Organizar el índice de cada uno de los temas/problema de forma que responda igualmente a una posible estrategia para avanzar en su solución, es decir, a un *plan de investigación* diseñado por el profesor (o, mejor, por equipos de profesores). En este sentido, la estructura o secuencia de apartados del tema debe estar ligada intencional y lógicamente con la problematización inicial. La estructura de los temas no está guiada, por tanto, como es habitual, por los conceptos fundamentales, sino por un intento de plantear y avanzar en problemas fundamentales. De este modo, los conceptos son introducidos funcionalmente como parte del proceso de tratamiento de los problemas planteados y de unificación de campos inicialmente inconexos. Si el conocimiento científico es fruto de un intento

de responder preguntas, ¿por qué pretender que los alumnos aprendan respuestas sin conocer las preguntas a las que responden? (Otero, 1985).

4. En este contexto de resolución de problemas, los conceptos y modelos se introducen, por alumnos y profesor, como tentativas, como hipótesis fundadas, que deben ser puestas a prueba, tanto a través de su capacidad predictiva en situaciones de laboratorio y en el aborde de situaciones problemáticas abiertas concretas -que requieren una modelización basada en los mismos (contexto de resolución de problemas, incluyendo la toma de decisiones en situaciones de interés social)-, como a través del establecimiento de su coherencia con la globalidad de los conocimientos ya establecidos por investigaciones precedentes. La realización de ejercicios, los trabajos prácticos, y la resolución de problemas se integran con sentido, junto a la introducción de conceptos y sus relaciones, dentro de la estructura de investigación (Gil, Furió *et al.*, 1999).
5. Consideramos esencial la realización de recapitulaciones periódicas (recapitulaciones problematizadas) sobre lo que se ha avanzado en la solución al problema planteado, los obstáculos superados y lo que queda por hacer, prestando así especial atención a la regulación y orientación de los alumnos en el desarrollo de la investigación.

Todo ello constituye una forma de trabajo en el aula que favorece la explicitación de las propias ideas y su confrontación con las de otros, en un ambiente hipotético-deductivo rico en episodios de argumentación y justificación, tan importantes para el aprendizaje de conocimientos científicos (Driver, Newton y Osborne, 2000), incluyendo el conocimiento matemático (NCTM, 2000). Se pretende así, en definitiva, crear un ambiente que favorezca simultáneamente la implicación afectiva y la racionalidad científica de todos los implicados (profesor y alumnos) en la resolución de los problemas. Por supuesto, ello exige una cuidadosa planificación de la tarea por el profesor, mediante programas de investigación (programas-guía o secuencias de actividades debidamente engarzadas) y dejar tiempo en el aula para que los alumnos piensen, argumenten y refuten.

En la figura 7.I se presenta la estructura básica de un tema y las cuestiones que centran el interés de los profesores para la elaboración del plan de investigación. Estas estructuras resultan muy útiles para la elaboración de recapitulaciones en distintas fases del tema por los alumnos y se concretan, como hemos indicado, en un *plan de investigación* o secuencia problematizada de actividades que son planteadas a los estudiantes quienes, en pequeños grupos, las resuelven y expresan los resultados obtenidos al resto de los grupos y al profesor, generando de manera sistemática situaciones de puesta en común que permiten aprender/ enseñar y evaluar en un ambiente hipotético-deductivo.

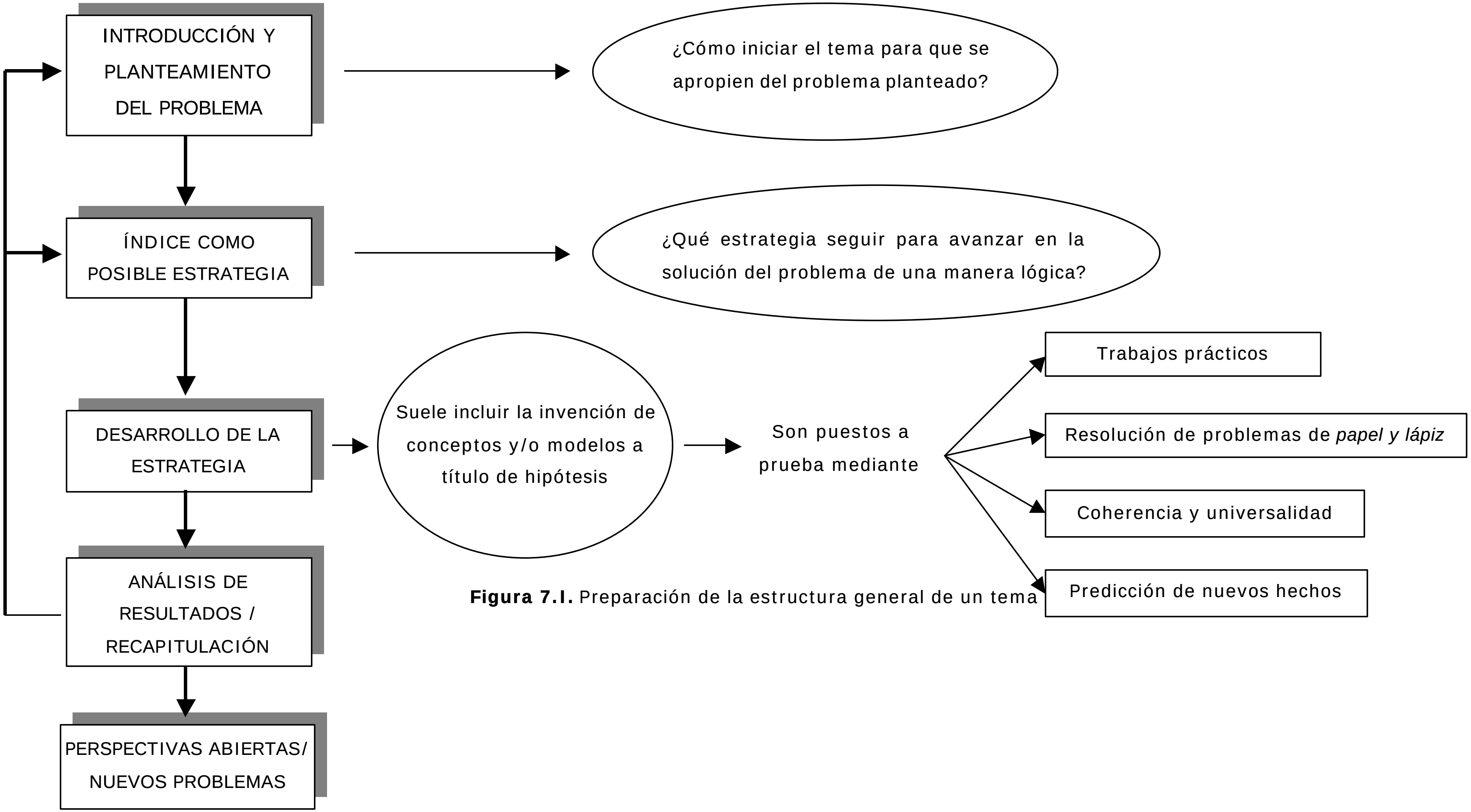


Figura 7.I. Preparación de la estructura general de un tema

Si prestamos atención a las preguntas que guían el análisis histórico y epistemológico que realizamos para organizar la estructura de los temas y los cursos (ver p. 234, en este mismo capítulo), son las mismas que nos hemos hecho en los capítulos 1 y 2, para clarificar el concepto de diferencial y su papel en el avance de la Física. Son las mismas que nos han permitido (re)construir, con una lógica hipotético-deductiva, un proceso (entre varios posibles) en el que se inventa la diferencial, la integral definida y sus relaciones con la derivada como fruto de una estrategia para solucionar un problema de claro interés físico y matemático (cap. 2, pp. 57-75).

Es necesario resaltar que dicha elaboración no ha sido, en absoluto, fácil: los textos de Análisis Matemático o, incluso, los trabajos de innovación didáctica relacionados con el tema a los que hemos tenido acceso, seguían la estructura típica, aproblemática y lineal, de la mayoría de los manuales universitarios de matemáticas; por su parte, los textos de Física analizados utilizan el Cálculo diferencial de forma operativista, sin reconocer el problema al que se pretende dar respuesta ni la estrategia utilizada para resolverlo (como muestran los resultados del análisis de textos, recogidos en cap. 5, pp. 162-171). Consideramos, pues, la *problematización* del Cálculo en el contexto de la Física como uno de los logros relevantes de este trabajo, que hemos presentado y debatido en congresos (Martínez Torregrosa y López-Gay, 1992 *a* y *b*, 1997; López-Gay y Martínez Torregrosa, 1997 *a* y *b*; López-Gay, Martínez Torregrosa y Gras, 2001) y artículos actualmente en vías de publicación (Martínez Torregrosa, López-Gay, *et al.*, en prensa), y que nos permite, de una manera justificada, tener expectativas positivas sobre la integración de la diferencial de Fréchet en una forma de enseñanza, basada en la investigación didáctica actual, que ha logrado mejoras cualitativas y cuantitativas.

En efecto, en el campo de la Física y la Química, el modelo de enseñanza por investigación o por resolución de problemas, ha tenido la virtud fundamental de desarrollarse de un modo explícito, es decir, ha generado propuestas específicas para responder a los problemas principales de la enseñanza: ¿cómo estructurar los temas?, ¿cómo introducir los conceptos?, ¿cómo enseñar a resolver problemas de *papel y lápiz*?, ¿cómo plantear los trabajos prácticos de laboratorio? ¿qué características debería tener la evaluación?... Al intentar responder estas preguntas, el modelo de enseñanza de la Física como investigación ha mostrado su fecundidad en casi todos los grandes aspectos didácticos, de forma que podemos encontrar propuestas concretas, contextualizadas en este modelo o muy cercanas a él y contrastadas en el aula, relativas a la concepción del curriculum y la forma de estructurar y plantear las actividades (Furió y Gil, 1978; Driver y Oldham, 1986; Gil y Martínez Torregrosa, 1987; Burbules y Linn, 1991; Gil, Carrascosa *et al*., 1991; Wheatley, 1991; Martínez Torregrosa, Doménech, y Verdú, 1993); la forma de introducir los conceptos y modelos (Hashweh, 1986; Carrascosa, 1987; Calatayud *et al*., 1988; Hodson, 1988; Gil y Carrascosa, 1990; Colombo *et al*., 1995; Guisasola y De la Iglesia, 1997; Martínez Torregrosa *et al*., 1998 y 1999; Carrascosa, Martínez y Martínez-Torregrosa, 2000); la manera de realizar los trabajos prácticos (Calatayud *et al*., 1980 *a* y *b*; Gil y Payá, 1988; Payá, 1991; Hodson, 1992*b* y 1994; Gil y Valdés, 1996); la forma de plantear la resolución de problemas de papel y lápiz (Gil y Martínez Torregrosa, 1983; Martínez Torregrosa, 1987; Reyes, 1991; Ramírez *et al*., 1994); las características que ha de satisfacer la evaluación (Gil, Carrascosa *et al*., 1991; Alonso, 1994; Alonso *et al*., 1992 *a* y *b*, y 1996; Martínez-Torregrosa, Gil y Verdú, 1999). Cada una de estas propuestas no sólo ha puesto en evidencia la potencia de esta forma de enseñanza, sino que también ha mostrado su carácter dinámico. Los esfuerzos de concreción realizados para avanzar en cada apartado han contribuido al enriquecimiento global del modelo y han aportado nuevos elementos que han obligado a sucesivas (re)formulaciones y mejoras del mismo. La introducción de conceptos matemáticos, objeto de este trabajo, es uno de los aspectos no tratados específicamente y que, esperamos, debe contribuir a consolidar más aún dicho modelo.

La posibilidad de recoger las recomendaciones sobre la enseñanza del Cálculo

La clarificación que hemos llevado a cabo en la primera parte de este trabajo permite prever que no existirán mayores dificultades para recoger las recomendaciones recientes que sobre la enseñanza del Cálculo han realizado diferentes instituciones y trabajos de investigación. Podemos agrupar las conclusiones ampliamente compartidas en las cuatro siguientes recomendaciones:

* ***La introducción y uso de los nuevos conceptos y técnicas matemáticas deben ir precedidos de la discusión y el análisis físico.***

Con frecuencia se usan directamente las matemáticas para introducir conceptos, confundiendo el significado físico con su forma de cálculo (por ejemplo: "la densidad es el cociente entre la masa y el volumen de un cuerpo", "el momento angular de una partícula respecto de un punto se define como el producto vectorial...", "la velocidad instantánea es la derivada de la posición..."), o para matematizar situaciones que no han sido analizadas físicamente (por ejemplo, se empieza la resolución de un problema afirmando: "la fuerza sobre un elemento de área d*A*..."). Con este hábito se olvida que el lenguaje simbólico es útil para la comunicación entre expertos, pero no así para la construcción de significados entre novatos (Thompson, 1994).

Para evitar esta situación, se propone que la formulación simbólica sea siempre posterior a la comprensión física y la verbalización (Stinner, 1990), haciendo que la justificación y el significado de las expresiones matemáticas tengan una relación directa con el análisis cualitativo realizado. Conforme se adquiera un mayor dominio del significado y uso de los conceptos matemáticos, se irá disminuyendo el grado de verbalización, aunque sin llegar nunca a desaparecer. Se espera favorecer así no sólo el avance en la Física sino también en las Matemáticas, pues se podrán plantear contextos de necesidad que promuevan la creatividad y la invención (Glez. Urbaneja, 1991; Monk, 1994; Schneider, 1992; Woolnough, 1994; NCTM, 2000), se mostrará la aplicabilidad (Jhonson, 1995) y se reforzará la abstracción entendida como proceso de generalización (White y Mitchelmore, 1996).

* ***El uso del Cálculo diferencial debe destacar los aspectos conceptuales y no quedarse reducido al uso de algoritmos,*** comentando el significado de las expresiones que se utilizan, justificando los pasos que se dan y las relaciones que se establecen.

Se trata de una de las recomendaciones de los *Principles and Standards for School Mathematics*: reequilibrar la proporción entre el dominio de algoritmos y la comprensión de conceptos, en favor del segundo aspecto (NCTM, 2000). Cabe esperar que una adecuada comprensión facilitará el uso y dominio creciente de los algoritmos, y producirá una mayor confianza en su uso (Artigue y Viennot, 1987; Cajaraville, 1991; Ferrini-Mundy y Gaudard, 1992; Kopel y Schramm, 1990; López de los Mozos, 1991; Martin y Coleman, 1994; Speiser y Walter, 1994; Thompson y Thompson, 1996; White y Mitchelmore, 1996).

* ***La introducción de conceptos matemáticos debe apoyarse en una representación múltiple: verbal, gráfica, geométrica, analítica, numérica...*** proporcionando así una imagen más completa del concepto y favoreciendo las distintas maneras de procesar que caracterizan a cada individuo (Aspinwall *et al.*, 1997; Trzcieniecka-Schneider, 1993).

  Muchos trabajos recomiendan enfoques no analíticos al introducir el concepto: ya sea un enfoque gráfico, un enfoque numérico o ambos a la vez (Buzzo, 1992; Ferrini-Mundy y Lauten, 1994; Kaiser, 1991; López de los Mozos, 1991; Orton, 1983 *a* y *b*; Sánchez y Contreras, 1998), sin olvidar que un mal uso de estos enfoques puede generar también obstáculos para el aprendizaje (Aspinwall *et al.*, 1997), como comentamos en la siguiente recomendación.

* ***El acercamiento inicial al Cálculo debe ser más intuitivo que riguroso,*** destacando su aplicabilidad y comprensión, sin renunciar a introducir después de forma paulatina una mayor exigencia de rigor en las explicaciones y desarrollos (Charalampos, 1993; López de los Mozos, 1991; Tucker, 1997).

  No obstante, es necesario añadir a esta recomendación que, precisamente, una intuición basada posiblemente en una analogía entre el mundo de los objetos y percepciones inmediatas y el mundo idealizado de los conceptos y funciones físico-matemáticos (el creer que se puede obtener la expresión funcional exacta de un incremento real sumando infinitos *trozos* con la única condición de que sean infinitesimales) es una de las posibles causas, en nuestra opinión, que puede permitir ese estado de *semicomprensión eterna* que rodea al Cálculo diferencial en el contexto de la Física y, por tanto, uno de los obstáculos que hay que superar para que la comprensión sea posible. De nuevo, ha sido el análisis histórico y epistemológico desarrollado con una intención *problematizadora* en los dos primeros capítulos de esta Tesis el que nos ha hecho tomar conciencia de esta situación.

* ***La enseñanza debe promover que los alumnos adquieran expectativas positivas sobre su capacidad de comprender y aplicar los conocimientos matemáticos.***

  Una característica de las *escuelas eficaces* son las altas expectativas que los profesores poseen y transmiten a sus alumnos (Rivas, 1986; Marchesi y Martín, 1998, pp. 103-106; Gil y Vilches, 1999), y es ésta una de las recomendaciones básicas de los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000). Resulta necesario, por tanto, provocar un giro de 180 grados en las expectativas que tienen los profesores, y que transmiten a sus alumnos, sobre las posibilidades de comprender y aplicar correctamente el Cálculo diferencial en situaciones físicas.

En todo lo anterior fundamentamos nuestra hipótesis que afirma que será posible desarrollar una enseñanza de la Física, con las características anteriores, introduciendo y utilizando la concepción de la diferencial de Fréchet (adecuadamente (re)elaborada para funciones de una sola variable) desde el primer momento en que se requiere el Cálculo diferencial y que, de esta forma, se mejorarán la comprensión y las actitudes de alumnos y profesores.

Capítulo 8

DISEÑO EXPERIMENTAL PARA LA CONTRASTACIÓN DE LA SEGUNDA HIPÓTESIS

En el capítulo 7 hemos expuesto las razones en las que se apoya nuestra segunda hipótesis, la cual afirma que es posible desarrollar la enseñanza de la Física utilizando la *versión didáctica* de la diferencial de Fréchet que hemos presentado en el capítulo 2, mejorando con ello el aprendizaje y las actitudes de los alumnos y profesores. En este capítulo presentaremos la operativización de esa hipótesis en un conjunto de consecuencias directamente contrastables, y los instrumentos que utilizaremos para su contrastación.

8.1. OPERATIVIZACIÓN DE LA HIPÓTESIS

De las numerosas consecuencias contrastables a las que puede dar lugar una hipótesis tan amplia como la que hemos formulado, en este trabajo nos hemos centrado en las siguientes:

A. La incorporación de la *nueva* propuesta sobre la diferencial, desde las primeras ocasiones en que se usa el Cálculo diferencial en la Física, dentro de una enseñanza coherente con los hallazgos actuales de la investigación didáctica, mejora la enseñanza y el aprendizaje de estos conceptos. En concreto:

- **A.1** Suministra oportunidades adecuadas en el aula para que los alumnos aprendan con comprensión
- **A.2** Produce una mejora entre los alumnos de todos los indicadores de una adecuada comprensión del Cálculo diferencial en la Física

B. Los profesores que participan en seminarios o cursos destinados a favorecer la reflexión sobre la comprensión y utilización del Cálculo diferencial en la enseñanza de la Física en el Bachillerato y a desarrollar una propuesta alternativa basada en la concepción de Fréchet, perciben positivamente la misma y la posibilidad de incorporarla en sus clases. En concreto:

B.1 Mejoran su propia comprensión sobre los conceptos del Cálculo diferencial cuando resuelven problemas de Física

B.2 Valoran muy positivamente el papel que puede jugar la *nueva* concepción de diferencial en la enseñanza y el aprendizaje de la Física.

Es conveniente puntualizar, en relación con la primera serie de consecuencias contrastables (A), que el uso del Cálculo diferencial en los niveles no universitarios debe ser considerado siempre como una introducción, fase que será superada cuando se use de forma continuada y ante diversidad de situaciones físicas –lo que ocurre ya en la Universidad-, lo que permitirá mostrar toda su potencia y llegar a apreciar todo su sentido físico y claridad conceptual. En contra de la habitual falta de atención que se presta a la comprensión del Cálculo en esta fase de introducción, pensamos que, si es posible colocar bien el primer peldaño, el segundo, esperamos, también lo será.

Es opinable, en el nivel no universitario, si el uso del Cálculo diferencial debe iniciarse en 3º de BUP o COU (actualmente: en 1º o en 2º de Bachillerato). Seguramente se trata de una cuestión de tiempo disponible y desarrollo de un curriculum equilibrado más que de posibilidad o imposibilidad. No obstante, deseamos mostrar que es posible, incluso en el caso más desfavorable para nuestra hipótesis, con los alumnos más jóvenes y en la primera ocasión en que se puede plantear, iniciar el tratamiento de las situaciones físicas que lo requieran con la concepción propuesta de diferencial. Lógicamente, como contrapartida, con estos alumnos el tratamiento deberá ser más limitado, aplazando para el curso siguiente la incorporación plena de todos los conceptos básicos y sus relaciones (derivada, diferencial e integral). Precisamente, una de las recomendaciones de los *Principles and Standards for School Mathematics* es articular de forma coherente las ideas que se presentan en cada curso, evitando duplicación de esfuerzos o duplicaciones innecesarias (NCTM, 2000).

Presentamos a continuación los diseños experimentales que hemos elaborado para la contrastación de dichas consecuencias.

8.2. DISEÑO PARA COMPROBAR QUE LA INCORPORACIÓN DE LA *NUEVA* PROPUESTA SOBRE LA DIFERENCIAL EN LA ENSEÑANZA PRODUCE MEJORAS

La primera ocasión en que puede plantearse la necesidad de introducir los conceptos básicos del Cálculo diferencial (derivada, diferencial, integral) suele ser en 3º BUP o 1º Bachillerato, en el estudio del movimiento. Ha sido, y continúa siendo, habitual en los textos de Física de nivel preuniversitario y de Física General realizar esta introducción en la Cinemática. Como hemos señalado en el capítulo 1 (pp. 28-31), el estudio del movimiento se encuentra en la base de los problemas que dieron lugar al nacimiento del Cálculo diferencial, lo que constituye un indicador de su idoneidad para su introducción (Speiser y Walter, 1994). Hemos decidido, pues, introducir por primera vez los conceptos básicos del Cálculo diferencial en el tema de Cinemática de 3º BUP o de 1º Bachillerato, de una manera integrada en el hilo conductor del mismo (no como un anexo o requisito previo), puesto que deseamos resaltar su necesidad y significado físico-matemático simultáneamente.

Nuestra decisión de iniciar el uso del Cálculo con los alumnos más jóvenes (3º BUP o 1º Bachillerato) nos ha llevado a establecer una graduación entre los conceptos que serán enseñados en ese primer año y los que serán incorporados en el curso siguiente. En concreto, en el tema de Cinemática hemos centrado nuestro esfuerzo en introducir el concepto de diferencial y su relación con la derivada, aunque hemos añadido, con carácter optativo, dos anexos dedicados al concepto de integral y al Teorema Fundamental.

Para poder apreciar en toda su dimensión la estrategia general del Cálculo -lo que implica a los conceptos de diferencial, derivada e integral, y las relaciones entre ellos-, será necesario esperar al curso de COU. Mientras el uso del Cálculo en 3º BUP lo hemos restringido a un tema (Cinemática), en COU se hace uso en apartados específicos de la mayoría de los temas (cap. 2, pp. 79-80). Desde el punto de vista matemático, la situaciones físicas que requieren el uso del Cálculo diferencial pueden dividirse en dos tipos:

a) cuando se trata de encontrar la relación funcional entre las variaciones de dos magnitudes, en un caso en que no están relacionadas linealmente (por eso se requiere el Cálculo diferencial) pero existe, y se ha estudiado previamente, el caso en que sí están relacionadas linealmente (comportamiento uniforme);

b) cuando se busca dicha relación funcional en una situación no uniforme, pero no existe o se desconoce la relación particular para comportamiento uniforme.

Aunque nuestro trabajo en el curso de COU se encuentra todavía en fase de desarrollo, hemos decidido seleccionar dos tópicos de COU como ejemplo de cada uno de esos dos tipos de situaciones, con la intención de mostrar que es posible extender el uso de la *nueva* propuesta sobre la diferencial, resaltando el significado físico y la claridad conceptual y matemática de lo que se hace.

Como se ha justificado en el capítulo 7, el tema de Cinemática está elaborado dentro de una orientación constructivista de la enseñanza y el aprendizaje y del modelo de enseñanza por investigación, lo que se concreta en que su desarrollo se organiza a partir de una situación problemática de interés, se sigue una lógica *problematizada*, y las actividades que se proponen a los pequeños grupos de alumnos en que se organiza el aula, están secuenciadas y planificadas de forma que –presumiblemente- al resolverlas deben expresar, argumentar y debatir sus ideas (entre ellos y con el profesor). Será en esta secuencia *problematizada* de actividades donde incorporaremos nuestra propuesta sobre el Cálculo diferencial, previendo qué ocurrirá cuando se plantee a los alumnos. Si nuestras expectativas se cumplen, esperamos producir oportunidades de aprendizaje dentro de su “zona de desarrollo potencial” en términos vigotskyanos[27] (Howe, 1996), lo que se pondrá de manifiesto si las intervenciones, propuestas y dificultades que planteen los alumnos son las lógicas entre personas que están implicadas, y participan con interés, en avanzar con comprensión en un campo nuevo y si generan interrogantes y oportunidades para que

[27] Según Vigotsky (1984, original de 1934) es aquélla zona que existe entre el nivel de las tareas que pueden realizarse individualmente y las que pueden realizarse con ayuda de un adulto y defiende que “la buena enseñanza es la que se adelanta al desarrollo ya consolidado”, actuando en la zona de desarrollo potencial.

las necesarias intervenciones del profesor (o la actividad siguiente a la que se está realizando) se realicen con una continuidad lógica, en respuesta a una necesidad sentida previamente. En esta misma línea, los *Principles and Standards for School Mathematics* recomiendan “que las actividades de clase sean interesantes, en un nivel de desafío que invite a la especulación y el trabajo duro” (NCTM, 2000, p. 18).

Naturalmente, esperamos que esta mejora en la enseñanza tenga su reflejo en que los alumnos de los grupos experimentales muestren una mejor comprensión sobre la justificación y uso del Cálculo diferencial en la Física que los alumnos que no han seguido nuestra propuesta, y en que desarrollen actitudes más positivas hacia el papel de los conceptos diferenciales en la enseñanza/ aprendizaje de la Física. En suma, que se produzca entre ellos una mejora de los indicadores de una adecuada comprensión que hemos formulado en el capítulo 2 (p. 81).

Para asegurarnos de que se produce esta mejora debido a nuestra propuesta, hemos decidido tomar como *grupo experimental* a los grupos/clase asignados en sus respectivos centros al autor de esta investigación (*profesor investigador*) y a otros *profesores formados*, que han participado con nosotros en sesiones de discusión sobre los conceptos básicos del Cálculo diferencial y en la elaboración del programa-guía de Cinemática. La comparación entre estos dos tipos de grupos experimentales con el grupo de control, favorecerá un análisis comparativo gradual, haciendo más fiables y generalizables las conclusiones que podamos obtener.

Los resultados de los grupos experimentales se refieren en su mayoría a alumnos de 3º BUP. Ocasionalmente, para la comprobación de la mejora de los indicadores de la comprensión del Cálculo relacionados con la integral y el Teorema Fundamental, los resultados se refieren a alumnos en su *segundo curso* experimental: se trata de alumnos de grupos experimentales de COU que ya fueron de grupos experimentales en 3º BUP. Todos estos alumnos en *segundo curso* experimental pertenecen a grupos del *profesor investigador*, pues los *profesores formados* no tienen la posibilidad de continuar con los mismos alumnos; teniendo en cuenta, además, que los grupos del *profesor investigador* son poco numerosos en COU y que la fase experimental en este nivel ha comenzado recientemente, debe entenderse el tamaño reducido de esta muestra específica.

La naturaleza de los instrumentos que hemos elaborado para probar las dos primeras consecuencias contrastables de nuestra segunda hipótesis se muestran en la tabla 8.I. de la página siguiente.

TABLA 8.I. Información sobre los instrumentos elaborados para probar las dos primeras consecuencias contrastables de la segunda hipótesis

H2.A. La incorporación de la nueva propuesta sobre la diferencial, desde las primeras ocasiones en que se usa el Cálculo diferencial en la Física, dentro de una enseñanza coherente con los hallazgos actuales de la investigación didáctica, mejora la enseñanza y el aprendizaje de estos conceptos.	**INSTRUMENTOS**	**¿CUÁNDO SE UTILIZA?**	**¿A QUÉ GRUPOS SE APLICA?**
A.1 Suministra oportunidades adecuadas en el aula para que los alumnos aprendan con comprensión	Secuencia de actividades del tema de Cinemática y de los dos *tópicos ejemplificadores* del curso de COU. Red de análisis de lo que ocurre en clase en el desarrollo de las actividades	Se planifica previamente, y se desarrolla en el aula. El profesor la completa durante la clase o inmediatamente después	Grupo experimental del *profesor investigador* (3º BUP y COU) y grupos experimentales de *profesores formados* (3º BUP)
A.2 Produce una mejora entre los alumnos de todos los indicadores de una adecuada comprensión del Cálculo diferencial en la Física	Cuestionario con preguntas cerradas y semiabiertas Resolución de un problema que requiere el uso del Cálculo diferencial Entrevista semiestructurada sobre un problema resuelto utilizando el Cálculo diferencial	En 3º BUP, poco tiempo después de haber terminado el tema de Cinemática (grupos experimentales) En el mes de mayo, en COU, después de haber usado en distintas ocasiones el Cálculo diferencial en las clases de Física (grupos experimentales y grupos de control)	Grupos experimentales anteriores, y grupos de control de un curso superior (COU) Entrevista semiestrucurada: sólo unos pocos alumnos, para asegurar y enriquecer la interpretación de resultados obtenidos con otros instrumentos

A continuación se presentan con más detalle los instrumentos elaborados y aquello que se espera obtener de ellos.

8.2.1 Secuencia de actividades para incorporar el concepto de diferencial en el desarrollo de la Cinemática en 3º B.U.P. Contextualización, planificación y expectativas.

Contextualización

Antes de empezar el tema de Cinemática se ha planteado a los alumnos: qué interés puede tener estudiar el movimiento de los cuerpos, a qué puede ser debido que los primeros datos *científicos* de la Humanidad sean sobre el movimiento del Sol, la Luna y las estrellas, y por qué una característica común a las culturas antiguas fue el levantamiento de edificaciones para seguir el movimiento de los astros (incluso en la Edad de Piedra, como en Stonehedge). En este contexto, aparece la importancia de determinar si existen regularidades, ciclos, por ejemplo en el movimiento del Sol, que de repetirse estrictamente, permitirían *contar* el tiempo, predecir cuánto falta para que vuelva a ocurrir la misma posición, etc. Puesto que el movimiento del Sol está asociado a ciclos naturales en animales y plantas, disponer de este conocimiento (de un calendario) permitiría a las antiguas civilizaciones planificar sus actividades: las cosechas (adaptando la siembra o la recogida a períodos secos o lluviosos), la caza (previendo el momento de la trashumancia de las grandes manadas)... En definitiva, se ve claramente el interés social que tuvo y tiene el estudio del movimiento de los astros, la invención del calendario.

El profesor destaca el contraste con el escaso interés que despertó el movimiento de cuerpos *terrestres*, pues no parecían tener regularidades que hicieran interesante su estudio: cada objeto parecía moverse de una manera distinta según su composición y claramente *imperfecta* comparado con el movimiento de los astros, en apariencia eternamente igual, cíclico y predecible. Las causas, fueran las que fueran, de los movimientos de los cuerpos *celestes* y los *terrestres* no parecían tener nada en común; esta fue una de las primeras y grandes barreras (con indudables repercusiones intelectuales y sociales) que se establecieron: la de la naturaleza y comportamiento de los objetos celestes y terrestres.

Para favorecer más la implicación en el problema de los alumnos, se les propone que respondan a la siguiente cuestión y que recojan, grabadas o por escrito, las respuestas de tres personas de su entorno familiar: *Si se suelta o se lanza un objeto como una piedra, cae al suelo, ¿por qué no le ocurre lo mismo a la Luna?*

La clasificación de las respuestas recogidas por los grupos de alumnos, quedará como una referencia a la que se volverá a lo largo del curso y que permitirá tomar conciencia del avance producido. Además permite que entiendan muy bien la siguiente intervención del profesor en la que expresa que el avance del conocimiento científico se basa, entre otros aspectos, en la búsqueda de explicaciones cada vez más universales, en elaborar visiones unitarias de la Naturaleza, en las que campos antes separados pueden interpretarse con las mismas ideas básicas. El profesor resalta también, que ello supone poner en cuestión lo obvio, *lo que se da por hecho porque es evidente*: ¿de verdad los movimientos de las cosas y sus causas son distintos según sea su naturaleza?; ¿no podemos conseguir que una piedra se mueva como la Luna?, ¿o un papel como una bola de plomo?

En definitiva, se plantea el problema de elaborar una explicación unitaria, común, al movimiento de todas las cosas (celestes y terrestres, un globo y una piedra...): ¿es posible explicar que un objeto se mueva como lo hace, sin tener en cuenta la naturaleza del objeto? Este es el problema que va a organizar la actividad en torno al estudio de los movimientos (la Mecánica); para avanzar en la elaboración de una explicación común, universal, como la que buscamos, será necesario concretar un plan. Una posible estrategia puede ser:

1. **Tratar de caracterizar los movimientos de los objetos ignorando la naturaleza de los mismos**. Es decir, procuraremos inventar magnitudes que sirvan para identificar y diferenciar unos movimientos de otros, pero sin tener en cuenta de qué está hecho o cómo es el objeto que se mueve -imaginándolo, por ejemplo, como un punto-. (Cinemática)

2. Si logramos describir los distintos movimientos con las mismas magnitudes, será el momento de abordar **¿qué es lo que hace que el movimiento de un objeto sea de un tipo u otro?**, es decir, **¿cómo conseguir que un objeto se mueva como deseamos?** (Dinámica). Dentro del tratamiento

de este problema, será de especial interés tratar de superar las barreras a las que nos hemos referido, planteando expresamente cuestiones como:

- ¿Qué hace falta para que el movimiento de un objeto no sea rectilíneo, sino circular y uniforme como el de la Luna?
- Si conseguimos explicar qué ha de ocurrir para que el movimiento de un objeto en la superficie terrestre sea circular y uniforme, ¿qué haría falta para que el movimiento de la Luna se pudiera explicar del mismo modo? (esto justificará la hipótesis de la existencia de la fuerza gravitatoria)
- ¿Podemos explicar las diferencias entre el movimiento de un globo y de una piedra cuando ambos se sueltan de la mano?
- ¿Qué haría falta para que un objeto terrestre (un vehículo, una persona) se moviera como la Luna?; ¿podríamos conseguir que un globo cayera como una piedra?

3. Por último, realizaremos una **recapitulación para ver en qué medida hemos avanzado en la elaboración de una explicación común, universal, al movimiento de todas las cosas**.

Es dentro de esta estructura *problematizada* para la Mecánica, y en concreto dentro del tema de Cinemática donde vamos a introducir nuestra propuesta. El verdadero título del tema es: **¿Cómo caracterizar el movimiento de cualquier cuerpo sin tener en cuenta su naturaleza? ¿Cómo distinguirlo de otros?**

Es necesario tener en cuenta que los alumnos ya han realizado una aproximación más elemental a la Mecánica en 2º de BUP o 4º ESO, de naturaleza más cualitativa, y basada, prácticamente, en valores medios de las magnitudes. Por tanto, aunque en 3º de BUP o 1º Bachillerato es necesario revisar dichos conceptos, nuestro interés puede centrarse en situaciones y movimientos más complejos, como los que requieren el Cálculo diferencial y los que no pueden estudiarse sobre la trayectoria (tiro horizontal y oblicuo) y necesitan hacer uso del principio de superposición o cálculo vectorial.

Los programas-guía concretos de actividades van experimentando modificaciones a lo largo de los cursos, de manera que siempre tratamos de incluir posibles mejoras surgidas de la reflexión sobre las clases. Distintas versiones del tema de Cinemática pueden encontrarse en Seminario de Física y Química (1990), Martínez Torregrosa *et al*. (1999), López-Gay *et al*. (1996), o han sido presentadas como póster en distintos congresos (Aguilar, 1993). La versión que aquí presentamos fue utilizada en el curso 1999/2000, y recoge las modificaciones tras un primer ensayo realizado en el curso 1998/99 para probar la validez de las actividades propuestas. Sólo presentaremos **la planificación de la secuencia en que se incorporan los conceptos en los que se centra nuestra investigación**.

TEMA 1. ¿CÓMO CARACTERIZAR CON PRECISIÓN EL MOVIMIENTO DE UN OBJETO INDEPENDIENTEMENTE DE SU NATURALEZA?

(Cinemática, 3º BUP)

Contextualización de las actividades dentro del tema:

En la primera parte hemos limitado nuestro estudio a movimientos cuya trayectoria se conoce de antemano, y planteamos la cuestión de qué necesitaríamos saber para caracterizar con precisión el movimiento de un cuerpo (considerado como un punto) y con qué magnitudes podemos expresar cuantitativamente dicha información. Esto permite revisar (clarificando y precisándolos con actividades sencillas) conceptos tales como: sistema de referencia, posición sobre la trayectoria (e), cambio de posición o desplazamiento sobre la trayectoria[28] (Δe), rapidez media (Äe/Ät) y aceleración (tangencial) media (Äv/Ät)). Se plantea la necesidad -si queremos conocer cómo es un movimiento con total precisión- de hallar la posición, la rapidez y la aceleración en cada instante, y se organiza el tema en tres apartados destinados, respectivamente, a cada uno de los aspectos citados.

Decidimos concretar el estudio en el movimiento de una bola que cae por un largo plano inclinado (2 m) y se comienza por tratar de encontrar la ecuación de la posición de la bola en cualquier instante, a partir de un estudio experimental y gráfico. Tras la planificación y desarrollo de dicho estudio, los grupos llegan a que la función (ecuación del movimiento) que mejor se ajusta a los valores experimentales es $e=88t^2$ (t en segundos, e en cm). A partir de aquí se plantea cómo hallar la rapidez de la bola en cada instante (...)

[28] En adelante, para evitar ser repetitivos, utilizaremos el término *desplazamiento* para referirnos al *desplazamiento sobre la trayectoria*, pues ya hemos advertido que en este primera parte nos vamos a dedicar al estudio de movimientos de trayectoria conocida. Si no se produce cambio de sentido, ese desplazamiento coincide con la *distancia* entre las dos posiciones.

1.2. DETERMINACIÓN DE LA RAPIDEZ EN CADA INSTANTE

Comentarios al apartado 1.2:

En este apartado, los alumnos se van a enfrentar a la necesidad de definir qué es la rapidez instantánea y cómo calcularla, disponiendo inicialmente sólo del concepto de rapidez media. Para realizar esto, hemos previsto las siguientes fases:

- En primer lugar deben tomar conciencia del significado de la rapidez media a partir de un instante *t* durante un intervalo Ä*t* (matemáticamente: Ä*e*/Ä*t*) y de su limitación para responder a lo que buscamos cuando la rapidez no es constante (cuando Ä*e* no varía linealmente con Ä*t*, es decir, cuando $\Delta e \neq \text{cte} \cdot$ Ä*t*)
- A continuación, **se inventará una definición conceptual para la rapidez instantánea** con sentido físico propio: *lo que cambiaría la posición del móvil cada unidad de tiempo, a partir del instante considerado: t, si lo hiciera con la misma rapidez* (matemáticamente: d*e*/d*t*)[29] (no como el límite de la rapidez media), y se definirá el concepto de diferencial: d*e* a partir de un *t* para un intervalo Ä*t* (d*t*): *lo que cambiaría la posición del móvil a partir del instante considerado, t, en un intervalo de tiempo* Ä*t, si lo hiciera con la misma rapidez*. Se justificará cuándo es necesario recurrir al cálculo de la diferencial, su significado y su carácter funcional.
- Una vez que conceptualmente sepan el significado de la rapidez instantánea, será cuando plantearemos **cómo calcular la rapidez instantánea**, concluyendo en el concepto de derivada.
- Por último, en la cuarta parte **se aplicarán estas ideas** a otros movimientos.

Como se ha hecho desde el principio, se utilizará el lenguaje verbal, analítico, gráfico y la visión natural (haciendo marcas sobre la trayectoria).

A4. *La posición de un móvil en el instante t=4 s es e=10 m, y 6 s más tarde está en e=58 m ¿Cuál será la rapidez del móvil en t=4 s? Explica el significado del resultado obtenido.*

Comentario A4:

Una vez que se ha planteado la necesidad de saber lo rápido que va el móvil en cada instante, propondremos esta actividad para que los alumnos tomen conciencia de la limitación de la rapidez media. Esperamos que, sin dudar, los alumnos hallen la rapidez media en el intervalo desde *t*=4 hasta *t*=6 s. Cuando pongan en común el significado de valor obtenido (24 m/s) será cuando el profesor cuestionará que esa sea la rapidez en *t*=4, hasta que tomen conciencia de que ese

[29] Para referirnos a la diferencial de la posición utilizaremos la notación: “de”, conforme a las normas de la IUPAP (1987). Para evitar la confusión con al palabra “de”, hemos utilizado otro tipo de letra para referirnos a la diferencial de la posición: d*e*. No obstante, confiamos en que el lector pueda distinguir un término de otro en función del contexto.

resultado coincide con la rapidez en ese instante sólo si se trata de un movimiento uniforme durante ese intervalo. Se interpretará gráficamente esa suposición y el cálculo realizado.

La rapidez media se define siempre a partir de un instante (*t*) y para un intervalo de tiempo (Ä*t*); su significado se ajusta bien a la percepción de los alumnos, pues proviene de la coordinación de dos sensaciones: “imágenes dinámicas” y "sentimiento de duración" (Schneider, 1992). Por el mismo motivo, los estudiantes no tendrán dificultad para admitir la rapidez instantánea en movimientos uniformes pues en realidad la asimilan a una rapidez media. Al finalizar esta actividad, los estudiantes reconocerán que el significado y cálculo de la rapidez instantánea es sencillo cuando *e* cambia uniformemente; en los casos restantes, es un problema que aún queda por resolver.

A5. a) *Calcula la rapidez media de la bola que cae por el plano inclinado a partir de t=0.4 s para un Ät de 1.3 s. Explica sobre la gráfica e-t las operaciones realizadas, así como el significado físico del resultado obtenido* **b)** *¿Sabes ya la rapidez de la bola en t=0.4 s?, ¿nos hemos aproximado al menos a su valor?*

Comentario A5:

Se reflejarán en la gráfica *e-t* las operaciones realizadas: cálculo de la pendiente de la recta secante (y no sólo del segmento cuerda) que corta dos puntos de la gráfica. Se reconocerá que la rapidez media calculada, que depende de *t* y Ä*t*, es sólo una aproximación de la rapidez instantánea, advirtiendo que se dispone de un método para mejorar esa aproximación, aunque cualquier rapidez medida de esta forma nunca llegará a ser la rapidez en el instante *t*=0.4 s.

En ese momento esperamos que surja la duda sobre la existencia de una rapidez instantánea, pues el concepto *rapidez* siempre se asocia al transcurso del tiempo; algunos alumnos incluso preguntarán por la “duración de un instante”. Es necesario salir de esta situación reflexionando de otra manera sobre la rapidez instantánea: la siguiente actividad pretende centrar la atención sobre el significado y no en el cálculo de su valor.

A6. *Por un procedimiento todavía desconocido, hemos averiguado la rapidez de un coche en el instante t=6 s, y el resultado es: 25 m/s. Discute el significado físico de ese valor.*

Comentario A6:

Esperamos que los alumnos expliquen ese dato como si fuese una rapidez constante, y será necesario advertirles que deben reconocer explícitamente esa suposición.

El profesor pondrá de manifiesto la razón por la que se ha hecho esa suposición: nuestra percepción de la rapidez necesita del transcurso del tiempo, lo que entra en contradicción con el concepto de rapidez instantánea. Este concepto es por tanto un *objeto mental*, que no puede percibirse directamente por los sentidos; para explicar su significado es necesario recurrir entonces a un movimiento hipotético que permita interpretarla como una rapidez media, ahora sí perceptible por los sentidos (Schneider, 1992).

La rapidez instantánea se definirá de la siguiente forma: *lo que se desplazaría ese coche durante cada segundo a partir de ese instante si la rapidez se mantuviese constante, si la posición cambiase uniformemente*.

Se introducirá el concepto de **diferencial de la posición (d*e*) a partir de un instante *t* para un intervalo Ä*t***: lo que se desplazaría el móvil, a partir de ese instante y durante un intervalo de tiempo, si lo hiciese con rapidez constante. La expresión matemática de este concepto es: d*e*=*v*· Ä*t*; por razones de simetría, se escribirá: d*e*=*v*· d*t*, advirtiendo que: d*t*=Ä*t*.

Después de introducir ese nuevo concepto, es sencillo advertir que la definición de rapidez instantánea se expresa operativamente como: v=de/dt. **Se introduce así el concepto de diferencial antes que el de derivada.**

Se calcularán valores de la diferencial de para distintos dt a partir de t=6 s, interpretando física y gráficamente los resultados. Se pondrá de manifiesto la dependencia de de respecto de t y dt.

A7. *En un instante determinado, un coche se mueve a 60 km/h. ¿Cuánto se habrá desplazado durante los siguientes quince minutos?*

Comentario A7:

Se aplicará el concepto de diferencial presentado en **A6**, insistiendo en determinar bajo qué condiciones será necesario introducir el concepto de diferencial (si v no se mantiene constante). Se aprovechará para discutir el distinto significado de la diferencial (de) y el incremento (Äe), así como la relación de orden entre de y Äe, según la rapidez aumente o disminuya.

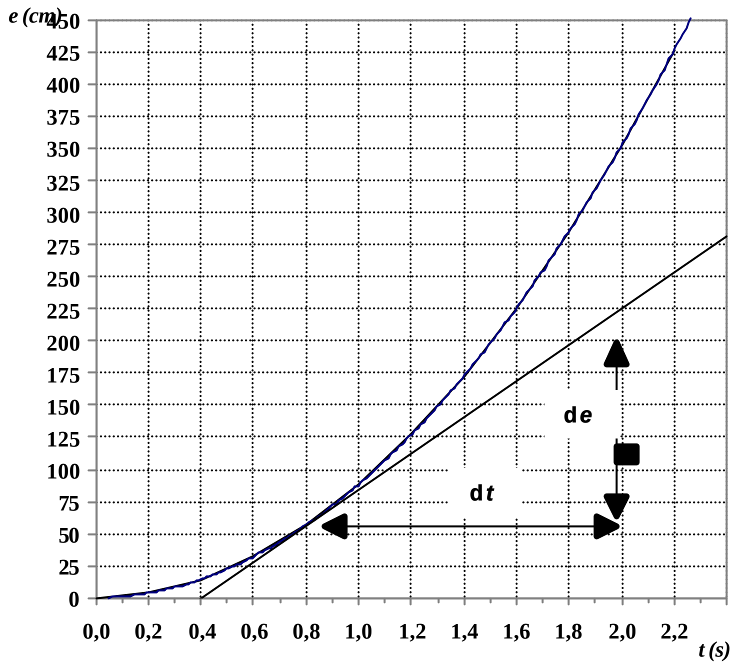
Ya sabemos el **significado** de la rapidez en un instante cualquiera, pero sabemos calcularla sólo en el caso de movimientos uniformes. Debemos abordar entonces la siguiente cuestión: **¿cómo calcular la rapidez instantánea de un cuerpo en un movimiento no uniforme?** Nos ocuparemos, en primer lugar, del cálculo de la rapidez de la bola en un instante concreto, por ejemplo, t=0.8 s.

A8. *Mediante la ecuación del movimiento que hemos deducido experimentalmente ($e=88t^2$), calcula la posición de la bola en el instante t=0.8 s, y señala en la gráfica e-t el punto correspondiente. Calcula un valor aproximado de la rapidez en t=0.8 s, y representa sobre la gráfica los cálculos realizados. ¿Puedes mejorar esa aproximación?*

Comentario A8:

Se recogerán e interpretarán gráficamente los distintos resultados, trazando siempre rectas secantes a partir de t=0.8 s en lugar de segmentos cuerda. Se puede construir así una sucesión de rapideces medias, cada vez más próximas al valor de la rapidez instantánea, que converge hacia un número conforme Ät tiende a cero; el límite de esa sucesión cuando Ät tiende a cero, que no es ninguna rapidez media ni la pendiente de ninguna recta secante, será identificado como el valor de la rapidez instantánea o pendiente de la recta tangente.

A modo de conclusión, se presentará el gráfico, recordando el significado de los términos de y dt, cuyo cociente indica la pendiente de la recta tangente cuando t=0.8 s



Una vez introducido el concepto de diferencial (d*e*), y una vez definida la rapidez instantánea como cociente diferencial, un problema distinto es su cálculo de forma analítica, en lugar de hacerlo de forma aproximada trazando la tangente en la gráfica. El nivel de conocimientos matemáticos de los alumnos determinará el tiempo y esfuerzo que se invierta ahora en identificar el cociente diferencial con la derivada, lo que permitirá utilizar las reglas de cálculo que conozcan.

Hemos inventado una estrategia para calcular la rapidez en *t*=0.8 s: se calcula la rapidez media para un Ä*t* a partir de 0.8 s, se calcula otra rapidez media para un Ä*t* más pequeño, después otra... y se obtiene así una sucesión de números. El límite de esa sucesión cuando Ä*t* tiende a cero es la rapidez en *t*=0.8 s pero, ¿cómo calcular el valor exacto de ese límite? En la gráfica *e*-*t* podemos hacerlo trazando la recta tangente a la curva en *t*=0.8 s y calculando su pendiente, pero: ¿cómo podemos estar seguros de haber trazado exactamente la tangente?

En lugar de trazar la tangente o de calcular el límite de una sucesión numérica, podemos calcular de forma exacta el **límite de una función: v_m(Ä*t*).** Para ello, obtendremos la expresión general de la rapidez media a partir de *t*=0.8 s y para un Ä*t* genérico, y después calcularemos el límite de esa expresión cuando Ät tiende a cero. La actividad siguiente muestra la planificación que ha realizado un compañero tuyo para calcular el valor exacto de la rapidez de la bola cuando *t*=0.8 s paso a paso. Revísala y completa los cálculos.

A9. *Sabiendo que:* $\boldsymbol{e(t)=88t^2}$, *para hallar la rapidez en el instante t=0.8 s, haré lo siguiente:*

Posición de la bola cuando t=0.8 s .... *e(0.8) = ?*

Posición de la bola un Ät después .... *e(0.8+Ät) = ?*

Desplazamiento de la bola durante ese Ät .... *Äe = e(0.8+Ät) - e(0.8) = ?*

Rapidez media a partir de t=0.8 s, durante ese Ät .... v_m*(0.8, Ät) = Äe/Ät = ?*

Rapidez en el instante t=0.8 s .... *v(0.8) = ?*

Comentario A9:

Cada cálculo se interpretará gráficamente y mediante marcas en la trayectoria.

Ya sabemos resolver el problema de calcular la rapidez instantánea en t=0.8 s. Podemos utilizar el mismo procedimiento **para calcular la ecuación de la rapidez en cualquier instante: *t*.** Para ello, obtendremos la función: $\boldsymbol{v_m(t,Ät)}$ y después calcularemos el límite cuando Ä*t* tiende a cero.

Posición de la bola en el instante *t*	$e(t) = 88t^2$
Posición de la bola un Ä*t* después	$e(t+\text{Ä}t) = 88(t+\text{Ä}t)^2 = 88t^2 + 88\text{Ä}t^2 + 176t\cdot\ \text{Ä}t$
Desplazamiento a partir de *t* durante ese Ä*t*	$\text{Ä}e = e(t+\text{Ä}t) - e(t) = 88\text{Ä}t^2 + 176t\cdot\ \text{Ä}t$
Rapidez media a partir de *t*, durante ese Ä*t*	$v_m(t,\text{Ä}t) = \text{Ä}e/\text{Ä}t = 88\text{Ä}t + 176t$
Rapidez en el instante *t*	$v(t) = \lim_{\text{Ä}t \to 0} (88\text{Ä}t + 176t) = 176t$

Habrás reconocido ya que el proceso que hemos seguido para calcular la rapidez instantánea es precisamente el cálculo de la derivada de la posición respecto del tiempo: *e'*. Para no tener que hacer el proceso al límite en todas las ocasiones, puedes utilizar las reglas que ya conoces del cálculo de derivadas. En concreto, la que usaremos con más frecuencia es: si $f(z)=A\cdot\ z^m$, entonces $f'=A\cdot\ m\cdot\ z^{m-1}$.

El camino seguido para dar significado y calcular la rapidez en un instante ha sido un poco más largo de lo esperado; en ese camino **hemos inventado el concepto de diferencial y lo hemos relacionado con el concepto de derivada**. Para resumir lo que hemos hecho, y además generalizarlo a cualquier otro movimiento (y no sólo una bola que cae), te proponemos la siguiente actividad.

A10. *Imagina que conocemos ya la posición de un móvil en cualquier instante mediante una gráfica e-t y una ecuación e(t). Expresa con tus propias palabras qué se entiende por rapidez instantánea y cómo se puede obtener la ecuación de la rapidez en cualquier instante.*

Comentario A10:

Es una actividad de síntesis y generalización. Si se aprecian dificultades para la abstracción, se volverá a utilizar una ecuación concreta *e*(*t*). Se reconocerá la justificación y significado de la diferencial, y la identificación del cociente diferencial con la derivada. Es importante interpretar gráficamente los conceptos e ideas que se expresen verbalmente o mediante ecuaciones.

A11. *Hemos estudiado el movimiento de tres bolas distintas utilizando un mismo sistema de referencia, y después de analizar los datos experimentales hemos obtenido la siguiente ecuación para el movimiento de cada bola (S.I.):*

$e = 0.2t - 1$ $\qquad$ $e = 0.3t^2 + 2$ $\qquad$ $e = -9.6t + 0.4t^3$

a) *Explica las diferencias entre el movimiento de esas tres bolas*

b) *Calcula la ecuación de la rapidez de cada bola*

c) *Calcula la rapidez de cada bola cuando t=3 s, y explica el significado físico del resultado obtenido.*

d) *Calcula en cada caso el valor de Äe y de para t=3 s y Ät=5 s, y explica el significado físico del resultado obtenido.*

Comentario A11:

Es una actividad de refuerzo y aplicación de lo que se ha recopilado en la actividad anterior. De nuevo, se insistirá en la justificación y el significado de las expresiones y términos diferenciales; para ello, se usarán múltiples lenguajes: gráfico, analítico, verbal, dibujo sobre la trayectoria...

En el último ejemplo cabe esperar que los alumnos tengan mayores dificultades *mecánicas* -aunque no de concepto- si no dominan el cálculo de derivadas: al calcular el límite *paso a paso* tropezarán en el cálculo del cubo de un binomio. No obstante, hemos considerado conveniente introducir en algún momento ecuaciones que no sean cuadráticas, para que aprecien la validez del aprendizaje construido sea cual sea la forma de la función $e(t)$, y además servirá más adelante para reconocer movimientos de aceleración no constante (ver **A15**). En este último ejemplo, además, se puede llamar la atención de los alumnos sobre el cambio de signo de la rapidez.

A12. *La ecuación de la posición de un cuerpo en cualquier instante es la siguiente:* ***$e=-30+4t^2$*** *Calcula la posición y rapidez del cuerpo en el instante t=1.5 s, y la rapidez cuando se encuentre a 6 m (hacia el lado positivo) del origen. Explica el significado físico de los resultados que obtengas.*

Comentario A12:

No se pretende deducir una ecuación general para la rapidez en función de la posición, sino utilizar las ecuaciones $e(t)$ y $v(t)$ para obtener la rapidez en posiciones concretas.

Al final, se recordará el problema general de la bola que cae por el plano inclinado, se valorará lo que se ha avanzado y se reconocerá lo que falta por hacer: averiguar la aceleración en cualquier instante.

1.3. DETERMINACIÓN DE LA ACELERACIÓN[30] EN CADA INSTANTE

Comentario:

El punto de partida en este apartado es el concepto de aceleración media. A partir de ahí, se aplicarán las ideas estudiadas en el apartado 1.2: valor medio, valor instantáneo, incremento, diferencial, derivada, etc. No obstante, el uso de esas ideas se hará con cuidado teniendo en cuenta la falta de dominio por los alumnos.

[30] Como se recordará, la parte del tema de *Cinemática* que aquí se presenta se refiere al estudio de movimientos de trayectoria conocida. La aceleración que aquí se define puede denominarse: *aceleración sobre la trayectoria* o, directamente, *aceleración tangencial*; de hecho así lo hacemos en nuestras clases, pero lo hemos suprimido aquí para evitar arrastrar este adjetivo en todos los comentarios.

La actividad final (**A18**) introduce una nueva complicación que consiste en proceder a la inversa: calcular la rapidez y posición en cada instante cuando conocemos la aceleración en todo instante (*antiderivar*). La realización de esta actividad puede dar lugar a introducir el concepto de integral (definida) y explicar el Teorema Fundamental, lo que se hace de forma opcional en los dos Anexos que la acompañan.

En este apartado queremos averiguar cuál es la aceleración de la bola en cada instante, y en qué instante tiene la bola una aceleración determinada. Expresaremos el resultado mediante una gráfica *a-t* o mediante una ecuación *a*(*t*), que obtendremos a partir de la ecuación: ***v*=176*t***. Pero antes de aprender a **calcular**, estudiaremos el **significado** de la aceleración en cada instante, partiendo del concepto de aceleración media. Por el camino, tendremos que recurrir de nuevo al concepto de diferencial, en este caso la diferencial de la rapidez: **d*v***

A13. *Calcula la aceleración media de la bola desde t=0 hasta t=2 s e interpreta el resultado obtenido. ¿Cuál crees que es la aceleración de la bola en el instante t=0.8 s? ¿Ha sido necesario, en este caso, hacer uso del Cálculo diferencial?*

Comentario A13:

Se resaltará que cuando el comportamiento de la rapidez es lineal, cuando cambia de manera uniforme, no es preciso hacer uso del Cálculo diferencial, y se puede escribir: *a*=Ä*v*/Ä*t*. Se reconocerá la existencia de esta situación con ecuaciones y gráficas de otros movimientos de aceleración constante, interpretando el signo de la aceleración: cuando es el mismo que la rapidez el móvil se mueve cada vez más rápido, cuando es opuesto el móvil frena.

A14. *Por un procedimiento todavía desconocido, hemos averiguado la aceleración de un cuerpo en el instante t=2 s, y el resultado es de 6 m/s/s. Discute el significado físico de ese valor. ¿Cuánto habrá cambiado la rapidez de ese cuerpo en un intervalo de 5 s a partir de ese instante?*

Comentario A14:

Igual que en la **A6**, se introducirá el concepto de diferencial (d*v*) para poder definir la aceleración instantánea como si fuese una aceleración media. Se interpretarán entonces las expresiones: d*v*=*a*· d*t*, *a*=d*v*/d*t* (cociente diferencial).

De nuevo, se realizará cálculo numérico y se interpretará el resultado verbal y gráficamente. En concreto, a partir de *t*=2 y para un Ä*t* de 5 s, el Äv_{est}, es decir: d*v*, será: 6·Ä *t*=30 m/s, y representa lo que cambiaría la rapidez si la aceleración se mantuviese constante durante ese intervalo; lógicamente, si la aceleración no es constante, Ä*v* d*v*.

Haciendo cálculos en distintos ejemplos, se destacará el carácter funcional de la diferencial: d*v*(*t*,d*t*), y se discutirá la relación entre Ä*v* y d*v* en distintas situaciones: Ä*v*>d*v*, Ä*v*<d*v*, Ä*v*=d*v*

Una vez definida la aceleración instantánea, el problema consiste ahora en buscar una forma de cálculo. Si no se resuelve en esta actividad, se hará en la siguiente.

A15. *En la* **A11** *se estudió el movimiento de tres bolas distintas. Calcula la aceleración de cada una en el instante t=0.9 s.*

Comentario A15:

En los dos primeros ejemplos no es necesario usar el Cálculo diferencial. En el tercero, puede reconocerse directamente que un cociente de diferenciales se calcula mediante la derivada; si no es así, se volverá a repetir el proceso: obtener la función a_m(0.9,Ät) y calcular el límite cuando Ät tiende a cero.

A16. *La ecuación e(t) del movimiento de un cuerpo viene dada por la siguiente expresión:* ***e=t³+t+3*** *(S.I.). Deduce la ecuación v(t) para ese movimiento. Calcula el valor de la aceleración instantánea en t=0,6 s y explica el significado físico de ese valor.*

Comentario A16:

Es una actividad de aplicación y refuerzo. En la puesta en común se construirán de forma aproximada las gráficas de las tres magnitudes en función del tiempo, y se mostrará su utilidad para describir con precisión el movimiento del cuerpo (que era el objetivo final del tema).

A17 (actividad de revisión/recapitulación). *Expresa con tus propias palabras qué se entiende por aceleración instantánea (para un movimiento cualquiera), y cómo puede calcularse a partir de la ecuación v(t) y de la gráfica v-t.*

Comentario A17:

Es una actividad de síntesis y de generalización. Se insistirá en reconocer las situaciones en las que es preciso recurrir al uso del Cálculo diferencial, y en el significado de la diferencial de la rapidez (dv) para un instante t y un intervalo dt.

A18. *El anuncio de un coche afirma: "De 30 a 120 km/h en 9.0 s", con aceleración constante ¿Cuál es el valor de esa aceleración?, ¿qué distancia habrá recorrido el coche durante esos 9 segundos?*

Comentario A18:

Para este curso es suficiente que los alumnos aprendan a obtener la ecuación $e(t)$ aplicando reglas inversas a las del cálculo de derivadas (*antiderivando*). Como no hay cambio de sentido durante esos 9 segundos, el desplazamiento: $e(9)$-$e(0)$ coincidirá con la distancia recorrida por el coche durante esos 9 s.

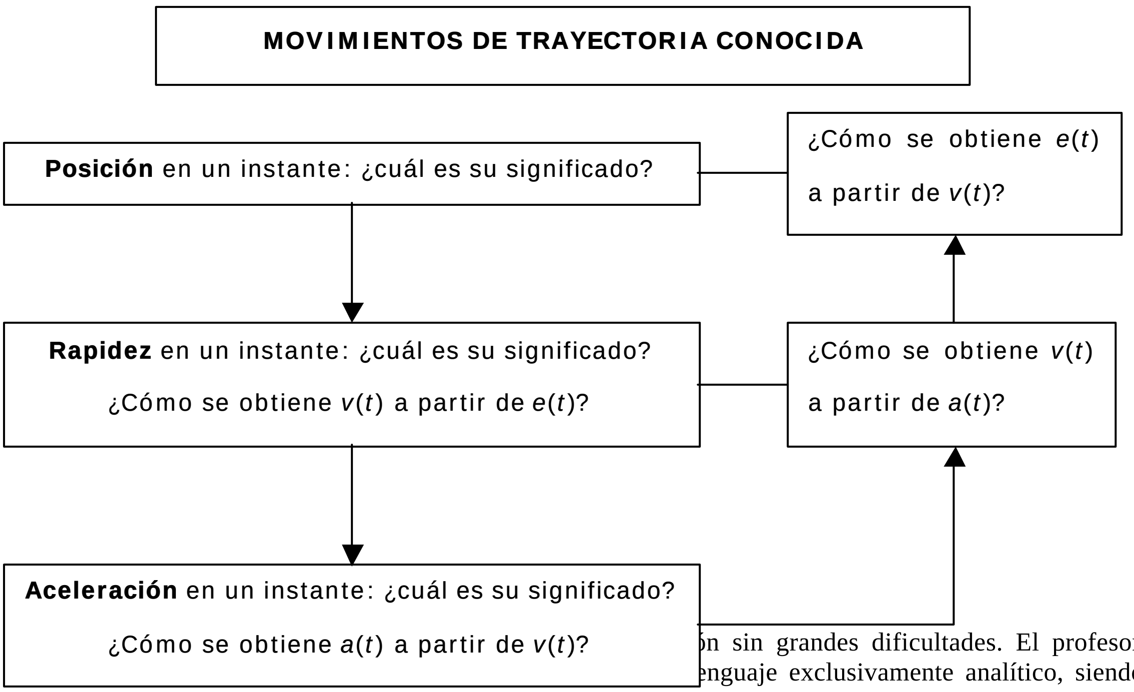
No obstante, en la discusión podrá aparecer un método de cálculo aproximado, en cuyo caso conviene remitirles al **Anexo I de Cinemática.** En las páginas 271-274 se presenta ese Anexo, tal como se lo entregaremos, llegado el caso, a los alumnos.

En dicho Anexo -de carácter opcional para este nivel introductorio- se utiliza el cálculo numérico para obtener aproximaciones cada vez mejores del Δe a través de una suma de diferenciales ($de = v \cdot dt$) durante un número cada vez mayor de subintervalos de tiempo. Este puede ser el punto final para este desarrollo optativo.

En el **Anexo II de Cinemática** (pp. 275-276) se introduce el concepto de integral como el límite de esa serie de sumas, advirtiendo que no coincide con ninguna de esas sumas, y que existe la posibilidad de que el error acumulado en ese caso sea cero. Se muestra que esta posibilidad se cumple (el resultado de la integral es exactamente el Δe, es decir, el error acumulado se hace cero) precisamente porque el cociente diferencial (de/dt) es la derivada. Se puede hacer después una generalización para mostrar el Teorema Fundamental. El contenido de ese Anexo, tal como se lo entregaremos a los alumnos, se muestra a continuación del Anexo I de Cinemática.

Para describir con precisión el movimiento de un cuerpo, ha sido necesario ampliar los conceptos de rapidez media durante un intervalo y aceleración media durante un intervalo, lo que nos ha llevado a inventar dos conceptos nuevos: rapidez y aceleración en un instante. Pero no sólo hemos inventado esos conceptos, sino que hemos aprendido a relacionar las ecuaciones de la posición, rapidez y aceleración en cualquier instante. A modo de recapitulación, realiza la siguiente actividad.

A19. *Realiza una recapitulación parcial de lo que hemos avanzado en la solución de nuestro problema general. Te puede servir de ayuda el siguiente esquema.*



...ón sin grandes dificultades. El profesor ...nguaje exclusivamente analítico, siendo necesario acompañarlo en todo momento con un lenguaje verbal y, si es necesario, con un lenguaje gráfico. Esperamos que los alumnos distingan, en cada magnitud, el caso en que es constante y el caso en que cambia con el tiempo.

Al final, el profesor recordará las reglas generales de cálculo de derivadas y *antiderivadas* para funciones polinómicas.

ANEXO I de Cinemática (opcional): Método aproximado para calcular el desplazamiento sobre la trayectoria (Ä*e*) usando la diferencial (d*e*)

Cuando un coche pasa de 8.33 m/s a 33.33 m/s en 9 s con aceleración constante, el valor de la aceleración será: *a*=Ä*v*/Ä*t*=2.78 m/s/s. Para calcular el desplazamiento durante esos 9 s, durante la clase se propuso un procedimiento cuya idea fundamental era: **ir realizando estimaciones cada vez más aproximadas a la realidad.**

La primera solución que se sugiere es multiplicar 8.33 m/s (30 km/h) por los 9 s que dura el movimiento, obteniendo: **75 m**. La crítica es inmediata, pues ese razonamiento sólo vale si la rapidez es constante pero... ¡al menos era una respuesta, frente a los que no conseguían contestar nada! Sólo es cuestión de precisar el significado de esa respuesta: lo que se habría desplazado el coche si la rapidez se hubiese mantenido constante, es decir, hemos calculado d*e* a partir de *t*=0 para un intervalo (d*t*) de 9 s

Otros compañeros propusieron entonces una solución mejor: calculan la rapidez en *t*=0, *t*=1, *t*=2, etc.; después calculan el desplazamiento desde t=0 hasta t=1 si la rapidez se hubiese mantenido constante (d*e* a partir de *t*=0 para d*t*=1), el desplazamiento desde *t*=1 hasta *t*=2 si la rapidez se hubiese mantenido constante (d*e* a partir de *t*=1 para d*t*=1), etc.; al final, suman todas esas distancias. Estas son sus cuentas:

***t* (s)**	***v* (m/s)**	**Intervalo de tiempo**	**Desplazamiento que se produciría d*e*=*v*· d*t* [d*t*=1 s]**
0	8.33	De 0 s a 1 s	8.33 m
1	11.11	De 1 s a 2 s	11.11 m
2	13.89	De 2 s a 3 s	13.89 m
...	...	...	...
7	27.78	De 7 s a 8 s	27.78 m
8	30.56	De 8 s a 9 s	30.56 m

¿ Desplazamiento total de 0 a 9 s .... 175.00 m ?

Aunque este resultado es mejor que el primero, sigue sin ser un resultado exacto pues en lugar de considerar que la rapidez es constante de 0 s a 9 s, hemos considerado que la rapidez es constante de 0 s a 1 s, de 1 s a 2 s, y así sucesivamente. Es decir, **no** hemos calculado Ä*e* durante cada segundo sino el correspondiente d*e*. No obstante, es evidente que los 175 m que se obtienen es una estimación del desplazamiento total bastante más realista que la primera que hemos planteado en clase (75 m). Además, sabemos que en los dos casos nos hemos quedado por debajo de la distancia que realmente ha recorrido el coche, **¿podrías explicar por qué?**

La manera de escribir matemáticamente el proceso seguido es así:

$$Äe \approx v_1 \cdot dt_1 + v_2 \cdot dt_2 + v_3 \cdot dt_3 + \ldots + v_8 \cdot dt_8 + v_9 \cdot dt_9 =$$

$$= de_1 + de_2 + de_3 + \ldots + de_8 + de_9 =$$

$$= 8.33 + 11.11 + 13.89 + \ldots + 27.78 + 30.56 = \mathbf{175.00\ m}$$

Para abreviar sumandos, se usa el símbolo sumatorio de la siguiente forma:

$$Äe \approx \sum_{i=1}^{9} v_i \cdot dt_i = \sum_{i=1}^{9} de_i = 175.00\ m$$

La ventaja de este procedimiento, sugerido por algunos compañeros, **es que puede mejorarse siguiendo una técnica parecida.** En lugar de dividir todo el intervalo de tiempo (de 0 s a 9 s) en nueve subintervalos, podemos dividirlo en un número mayor, por ejemplo: 18 subintervalos (cada uno de ellos de 0.5 s de duración), y suponer entonces que la rapidez se mantiene constante cada medio segundo. Sigue sin coincidir con el comportamiento real del coche, pues *v* es distinta en cada instante, pero es más realista aún que la anterior estimación. Además, sabemos que también ahora nos vamos a quedar *cortos*. Veamos:

***t* (s)**	***v* (m/s)**	**Intervalo de tiempo**	**Desplazamiento que se produciría**

			$de = v \cdot dt$ [dt=1 s]
0	8.33	De 0 s a 0.5 s	4.17 m
0.5	9.72	De 0.5 s a 1.0 s	4.86 m
1.0	11.11	De 1.0 s a 1.5 s	5.56 m
...	...	...	...
7.5	29.18	De 7.5 s a 8.0 s	14.59 m
8.0	30.56	De 8.0 s a 8.5 s	15.28 m
8.5	31.94	De 8.5 s a 9.0 s	15.97 m

Desplazamiento total que recorrería de 0 a 9 s .... **181.25 m**

Podemos escribir matemáticamente el proceso seguido de la siguiente manera:

$$Äe \approx \sum_{i=1}^{18} v_i \cdot dt_i = \sum_{i=1}^{18} de_i = 181.25\ m$$

En general, podemos realizar este proceso -eso sí, bastante pesado- dividiendo el intervalo que va desde t=0 hasta t=9 s en ***N*** subintervalos, cada uno de ellos de un tamaño: dt = 9/N, y escribir así el procedimiento a seguir:

$$Äe \approx \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot dt_i = \sum_{i=1}^{N} de_i$$

El resultado que obtengamos será siempre aproximado, pues no tiene ningún sentido hacer cada dt_i=0 ya que en ese caso la distancia recorrida sería cero. **Pero sabemos que la estimación es cada vez mejor conforme es mayor el número de subintervalos (*N*), es decir, cuanto menor sea la duración de cada subintervalo (d*t_i*), pues nos acercamos cada vez más al comportamiento real**.

En este momento, propondremos a los alumnos la realización de una actividad complementaria para poner en práctica el método de cálculo numérico mostrado hasta aquí. Una vez realizada dicha actividad, reconoceremos que sólo hemos llegado a un resultado aproximado.

Actividad complementaria. *La ecuación de la rapidez de un coche es la siguiente:* $\boldsymbol{v=t^2+1}$*. Calcula, mediante una técnica similar a la utilizada en este Anexo, el desplazamiento (o una estimación) de ese coche desde t=0 hasta t=4 s.*

En lo que resta de este **Anexo I**, recordaremos un método para obtener el valor exacto de Ä*e*: *antiderivando* $v(t)$ para obtener la ecuación $e(t)$ (este método se habrá discutido durante la realización de la **A18**). Se conectará así, al menos intuitivamente, el método de *ir mejorando aproximaciones* con el método del *cálculo de antiderivadas.*

Otra forma de calcular el desplazamiento del coche de la A18 es intentar calcular directamente: Ä*e*=*e*(9)-*e*(0). El problema que nos encontramos es que no conocemos la ecuación *e(t)* del movimiento del coche, pero podemos averiguarla si conocemos la ecuación de la aceleración o de la rapidez.

En este caso, sabemos que la aceleración es: 2,78 m/s^2, y que la rapidez inicial (en este caso: t_0=0) es *v*(0)=8.33 m/s. Como la aceleración es constante: Ä*v*=*a*· Ä*t*, y por tanto la ecuación de la rapidez en cada instante será: *v(t)*=2.78 *t*+8.33

Ahora bien, como la rapidez no es constante, no podemos aplicar el mismo razonamiento: "Ä*e*=*v*· Ä*t*, y por tanto: *e*=*e*(0)+v· *t*". Sin embargo, sabemos que: ***e'*=*v*=2.78*t*+8.33** Entonces, ***e(t)* será una función que al derivarla nos dé *v(t)*** (decimos que *e* es la *antiderivada* de *v*).

Por tanto: ***e(t)=1.39t²+8.33t+e*(0)** siendo *e*(0) la posición inicial (en este caso: t_0=0) , cuyo valor no es importante para calcular la distancia recorrida. Comprueba que, efectivamente, se cumple: ***v*=*e'*** (sea cual sea el valor de *e*(0)).

Realizando cálculos, la distancia recorrida desde *t*=0 hasta *t*=9 s resulta ser:

Ä*e* = *e*(9) – *e*(0) = 187.56 m

Este resultado es exacto.

ANEXO II de Cinemática (Opcional): Concepto de integral. Teorema Fundamental del Cálculo.

Hemos inventado ya un procedimiento para aproximarnos cada vez más al valor buscado: Ä*e*. Dividimos el intervalo de tiempo (Ä*t*) en ***N*** subintervalos, calculamos la diferencial de la posición en cada uno de ellos (de_i=v_i· dt_i), y sumamos todas esas diferenciales: Ä$e \approx \sum_{i=1}^{N} de_i = \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot dt_i$

Cada diferencial (de_i) se acerca más al Äe_i correspondiente cuanto menor es el intervalo de tiempo (Ät_i) para el que se calcula, es decir, cuanto mayor es el número

N de subintervalos, pero en ningún caso se cumplirá Äe_i=de_i ya que la rapidez no es constante por muy pequeño que sea Ät_i. Podemos afirmar entonces que el error (å$_i$) asociado a cada estimación: å$_i$=Äe_i-de_i nunca es cero si el Ät_i es distinto de cero, aunque es menor cuanto más pequeño es ese Ät_i.

El resultado obtenido mediante la suma de diferenciales será entonces una aproximación del Äe buscado, mejor cuanto mayor sea ***N***, pero nunca coincidirá con el valor exacto pues tendrá asociado un **error total** que es la suma de ***N*** términos distintos de cero: **error total** = $\sum_{i=1}^{N} å_i$

Aunque el error total no sea nunca cero, es posible que el **límite del error total** (que no es ningún error total) cuando ***N*** tiende a infinito sí sea cero. Sólo en el caso de que esto se cumpla, podemos afirmar: $Äe = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot dt_i$ (¡sin ningún error!).

La condición citada se cumplirá si: $\lim_{N \to \infty} N \cdot å = 0 \quad \forall å$ O, lo que es lo mismo, como:

$N \propto \frac{1}{Ät_i}$, para obtener el resultado exacto debe cumplirse: $\lim_{Ät_i \to 0} \frac{Äe_i - de_i}{Ät_i} = 0 \quad \forall i$

Esa condición equivale a exigir que: $\lim_{Ät \to 0} \frac{de - Äe}{Ät} = 0 \quad \forall t$

Teniendo en cuenta que Ät=dt, y que el cociente de/dt es constante para cada t, entonces el resultado será exacto si se cumple: $\frac{de}{dt} = \lim_{Ät \to 0} \frac{Äe}{Ät} = e' \quad \forall t$

Como el cociente de/dt es precisamente la rapidez, esa condición significa que ***v=e'***, es decir, que e es la *antiderivada* de v. Al cumplirse esta definición, podemos afirmar entonces con toda seguridad que: $Äe = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot dt_i$ El segundo miembro de esa ecuación recibe el nombre de integral, y se simboliza: $\int_0^9 v \cdot dt$

En resumen, sabemos calcular ya el valor exacto de Äe:

$$\int_0^9 v \cdot dt = Äe = e(9) - e(0) \qquad \textbf{siempre que: } \boldsymbol{e' = v}$$

La secuencia de actividades de Cinemática para 3º BUP que acabamos de presentar es uno de los instrumentos elaborados para comprobar la consecuencia A1 de nuestra segunda hipótesis (ver p. 245, en este mismo capítulo). Como se recordará, el diseño para comprobar esa consecuencia se completaba con otras secuencias de actividades elaboradas para dos tópicos de Física de COU, representativos de las distintas situaciones físicas que requieren el uso del Cálculo diferencial (ver p. 248). En el siguiente apartado se presenta la secuencia de actividades sobre el primero de esos tópicos.

8.2.2. Secuencia de actividades para utilizar *con sentido* el concepto de diferencial y la estrategia del Cálculo en situaciones físicas en que el comportamiento lineal existe y ha sido estudiado previamente

En el cuadro 8.II presentamos, de una manera genérica, la secuencia *problematizada* que hemos seguido para planificar la enseñanza del uso del Cálculo diferencial en este tipo de situaciones.

CUADRO 8.II. Secuencia didáctica, cuando se conoce antes el comportamiento uniforme, para responder a la pregunta general: *¿cuál es el ÄL producido por Äz?*

1. Toma de conciencia del problema en el contexto físico específico:

1.1. Establecer y discutir el significado de las expresiones: Ä*L*=*M*· Ä*z* ; *M*=Ä*L*/Ä*z*

1.2. Mostrar la insuficiencia de esas expresiones cuando *M* no es constante en el intervalo Ä*z*.

2. Posible estrategia para su resolución, y desarrollo de la misma:

2.1. Plantear la estimación: **"Ä*L*$_{est}$=*M*· Ä*z*, que es el Ä*L* si *M* permaneciese constante en ese Ä*z*"** o, lo que es igual: **d*L*=*M*· Ä*z*=*M*· d*z*** Interpretar el significado de *M* como d*L*/d*z* ("lo que cambiaría *L* por unidad de Ä*z*, a partir de *z*, si el cambio fuese uniforme"). Puede ayudar a aclarar el significado de la diferencial si se realiza cálculo numérico y se interpretan los resultados, destacando el carácter funcional de d*L*.

2.2. Reconocer la existencia de un error: Ä*L*-d*L*, sea cual sea Ä*z*. Ese error nunca es cero, pero se acerca más a cero cuanto menor sea Ä*z*

2.3. Plantear la mejora de la estimación del Ä*L* dividiendo el intervalo en *N* subintervalos, y sumando las estimaciones lineales. Realizar cálculo numérico en ejemplos concretos. Destacar la disminución del error conforme *N* aumenta.

2.4. Mostrar que, cuando *N* tiende a infinito (cuando el tamaño de cada subintervalo tiende a cero), el límite del error será cero, si, y sólo si, el cociente diferencial (dL/dz) coincide con la derivada (L'). Introducir el concepto de integral (definida) y aclarar el Teorema Fundamental.

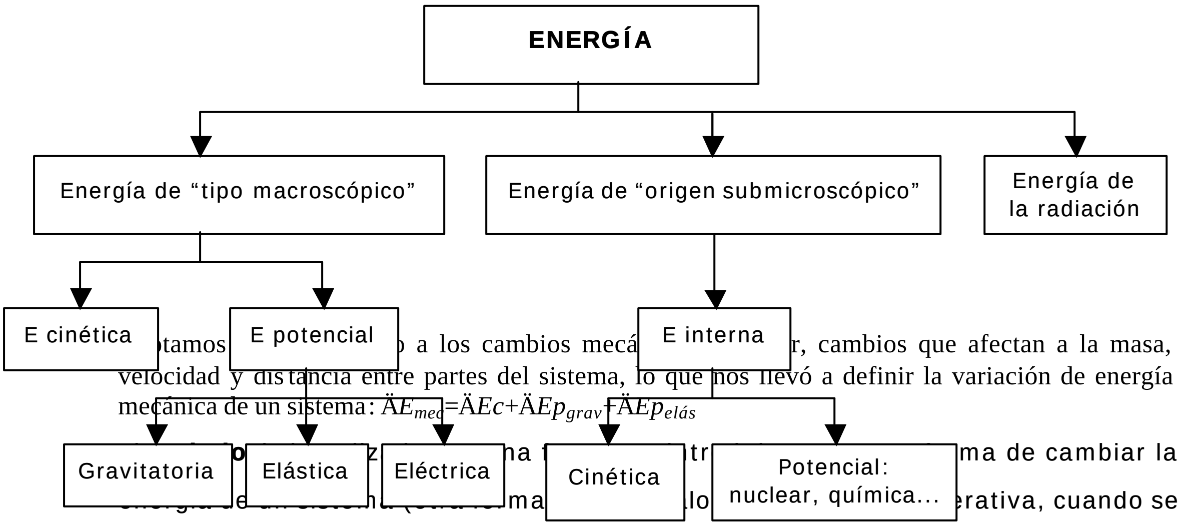
En concreto, para desarrollar el tópico que hemos elegido como ejemplo de este tipo de situaciones, hemos elaborado la secuencia de actividades que se presenta a continuación, junto a lo que esperamos obtener en cada actividad.

¿CÓMO SE CALCULA LA VARIACIÓN DE ENERGÍA POTENCIAL CUANDO LA FUERZA INTERIOR CONSERVATIVA NO ES CONSTANTE?

COU

Contextualización de las actividades dentro del tema:

En el curso anterior se estudió este tema, considerando fuerzas que no dependen de la posición. Se comenzó identificado cualitativamente distintos tipos de energía de un sistema. Las interacciones entre partes del sistema se clasificaron en conservativas, que son la causa de la energía potencial, y no conservativas. Se llegó, al final, al siguiente esquema (no exhaustivo):



[illegible]tamos [illegible] a los cambios mecá[illegible]r, cambios que afectan a la masa, velocidad y distancia entre partes del sistema, lo que nos llevó a definir la variación de energía mecánica de un sistema: $\Delta E_{mec}=\Delta Ec+\Delta Ep_{grav}+\Delta Ep_{elás}$

[illegible] ma de cambiar la energía de un sistema [illegible] rativa, cuando se conoce la trayectoria de antemano, es: $W=F_r\cdot \Delta r$, siendo F_r la componente de la fuerza (***F***) en la dirección del desplazamiento (Δr) es decir, la componente tangencial de la fuerza, cuyo valor es positivo si va en el mismo sentido que el desplazamiento, y negativo en caso contrario. Se distinguió entre trabajo realizado por fuerzas exteriores (W_{ext}) y por fuerzas interiores (W_{int}).

La expresión: $W_{ext}=\Delta E$, más allá de una mera igualdad matemática, se introdujo como una hipótesis que relaciona cuantitativamente *algo* que se le hace al sistema por el exterior (por otros sistemas), cuyo valor podemos calcular mediante la expresión: $W_{ext}=F_{ext,r}\cdot \Delta r$, con la variación de *algo* que tiene el sistema (la energía), que sólo depende de propiedades del sistema (y no del exterior).

Como la delimitación del sistema puede hacerse de manera arbitraria, esa hipótesis nos llevó también a la expresión: $W_{int}=-\Delta Ep$. El signo se interpretó físicamente: cuando el W_{int} es positivo, la *Ec* aumenta y, lógicamente, disminuye la *Ep*, y a la inversa.

Aplicando una u otra expresión en situaciones *controladas* en las que sólo cambia una forma de energía, se dedujeron las expresiones correspondientes para: ΔEc, ΔEp_{grav} y

$\Delta Ep_{elás}$ (en este último caso, aunque la fuerza depende de la posición, se hizo una deducción sobre la gráfica *F*-*x*).

En particular, se dedujo la expresión: $\Delta Ep_{grav}=m\cdot g\cdot \Delta h$, correspondiente a la variación de energía potencial gravitatoria experimentada por el sistema cuerpo-Tierra cuando el cuerpo pasa de encontrarse a una altura h_A a otra altura h_B, siendo ambas alturas muy pequeñas en relación con el radio de la Tierra, considerando así que $F_{T,c}$ es constante durante ese desplazamiento. Además, se relacionó el valor de la fuerza peso en una dirección (F_r) con la disminución de Ep_{grav} cada metro que se produce un desplazamiento en esa misma dirección y sentido.

En el curso de COU se hace una recopilación de las ideas más importantes del tema de 3º BUP, y se amplía al caso de fuerzas que varían con la posición. La secuencia de actividades que aquí presentamos es un fragmento del programa completo correspondiente a ese curso.

Al comenzar el tema, hemos vuelto a recordar la deducción de la expresión: $\Delta Ep_{grav}=m\cdot g\cdot \Delta h$, discutiendo el origen de energía potencial, y aplicándola en casos concretos. Posiblemente, durante en ese recordatorio, haya surgido la pregunta: **¿es realmente constante la fuerza en ese desplazamiento?**, justificando así la siguiente actividad; en caso contrario, propondremos directamente la actividad, confiando que en la puesta en común surja esa pregunta, desencadenante de las siguientes actividades. Como en esas actividades el desplazamiento va a coincidir siempre con la dirección de la fuerza, evitaremos a partir de aquí el subíndice, haciendo: $F_r=F$.

A1. *Calcula la variación de energía potencial gravitatoria del cuerpo de la actividad anterior cuando se desplaza 2000 km hacia arriba en la dirección vertical.*

Comentario A1:

La intención de esta actividad no es llegar a obtener una respuesta acertada, sino tomar conciencia del problema: si la fuerza interior conservativa ($F_{T,c}$) varía en el desplazamiento, ¿cómo hallar entonces ΔEp_{grav}?, e introducir el concepto de diferencial como estimación lineal del incremento.

Esperamos que la primera respuesta de muchos alumnos suponga implícitamente que la fuerza se mantiene constante. En la puesta en común se aclarará que esa condición no se cumple, pues aplicando la ley de gravitación universal se comprueba que mientras la fuerza peso a 5 m de altura es de -29.4 N, 2000 km *más arriba* es de -17.0 N.

Se identificará entonces el cálculo realizado ($5.88\cdot 10^7$ J) con d*Ep* a partir de h=5 m para $\Delta h=2\cdot 10^6$ m, es decir: la *Ep* cambiaría 58.8 millones de Julios durante ese desplazamiento si la fuerza se hubiese mantenido constante, si el cambio se hubiese producido de forma uniforme. Se destacará así la causa que obliga a usar el concepto de diferencial, y se aclarará su significado.

El profesor debe insistir en la diferencia entre d*Ep* (que hemos calculado) y ΔEp (que es lo que buscamos, y todavía no hemos calculado). En este caso, hemos realizado una estimación (ΔEp d*Ep* = $5.88\cdot 10^7$ J) *por exceso*, y por tanto el **error** cometido: (ΔEp-d*Ep*) es negativo.

A2. *Haz una estimación del ΔEp gravitatoria cuando el cuerpo de la actividad anterior se desplaza "en dos etapas": 1000 km en la primera y otros 1000 km en la segunda.*

Comentario A2:

Los alumnos deben realizar cálculo numérico e interpretar el significado de cada resultado. Utilizando la ley de gravitación universal para calcular la fuerza peso 1000 km más arriba (-22.0

N) del punto inicial, se obtienen los valores: $dEp_{1\ (h=0,\ \text{Ä}h=1000\ \text{km})} = 2.94\cdot\ 10^7$ J, $dEp_{2\ (h=1000\ \text{km},\ \text{Ä}h=1000\ \text{km})} = 2.20\cdot\ 10^7$ J. El profesor destacará el carácter funcional de la diferencial.

El nuevo valor estimado será: Ä Ep $dEp_1+dEp_2 = 5.14\cdot\ 10^7$ J. El error cometido: $(\text{Ä}Ep_1-dEp_1)+(\text{Ä}Ep_2-dEp_2)$ es menor que en la aproximación anterior. Esperamos que en este punto los alumnos sugieran aumentar el número de "etapas", el número de subintervalos en que se divide el desplazamiento original de 2000 km, para acercarse cada vez más al valor que buscamos.

Los alumnos deben realizar cálculo numérico de nuevo, aunque en esta ocasión cada grupo lo realizará para un número (N) distinto de subintervalos. Por comodidad para calcular el valor de la fuerza en cada comienzo del intervalo, el profesor debe proponer sustituir la variable h (distancia a la superficie de la Tierra) por la variable r (distancia al centro de la Tierra); en este caso, la altura inicial de 5 m resulta despreciable frente a los 6370 km del radio de la Tierra. Al poner en común los resultados, se reconocerá que el error total cometido es menor (en valor absoluto) cuanto mayor sea N, es decir, cuanto menor sea el tamaño ($\text{Ä}r_i$) de cada subintervalo, pero en todos los casos ese error es distinto de cero.

Aunque esperamos que los alumnos discutan ya sobre la posibilidad de aumentar el número de subintervalos *hasta el infinito*, el profesor propondrá organizar la discusión sobre las siguientes actividades.

A3. *Un alumno afirma que* Ä*Ep y* d*Ep coincidirán cuando el desplazamiento* Ä*r sea muy pequeño. Discute con tus compañeros si estás de acuerdo o no con esa afirmación.*

Comentario A3:

Esperamos que los alumnos reconozcan la falsedad de esa afirmación, aclarando que d*Ep* y ÄEp coincidirán cuando el comportamiento real sea de tipo lineal, sea cual sea el tamaño del Ä*r*. El profesor debe intervenir durante la discusión, para explicar que, aunque el error sea siempre distinto de cero, el límite de ese error (que no coincide con ninguno de los errores) cuando Ä*r* tiende a cero, sí será cero.

A4. *Un alumno afirma que, dividiendo el desplazamiento de 2000 km en N subintervalos, nunca podrá alcanzarse el valor exacto de* Ä*Ep, por muy grande que sea N. Discute con tus compañeros si estás de acuerdo o no con esa afirmación.*

Comentario A4:

Esperamos que los alumnos, después de la aclaración de la actividad anterior, muestren su acuerdo con esa afirmación, pero sugieran que haciendo el límite cuando N tiende a infinito, el error total sí será cero.

El profesor debe salir al paso de esta conclusión precipitada, advirtiendo que, efectivamente, cada error parcial tiende a cero pero el número de subintervalos tiende a infinito, lo que conduce a una indeterminación. Se trata, por tanto, de averiguar bajo qué condiciones se anula el límite del error total cuando N tiende a infinito (véase pp. 275-276, en este mismo capítulo).

La cuestión debe quedar planteada entonces en estos términos:

Para que: $\text{Ä}Ep = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} dEp_i$, debe cumplirse que: $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\text{Ä}Ep_i - dEp_i\right) = 0$

O, lo que es igual, debe cumplirse que: $\lim\limits_{N\to\infty} N\cdot\left(\text{Ä}Ep - dEp\right) = 0$, siendo: $(\text{Ä}Ep-dEp)$ cualquiera de los $(\text{Ä}Ep_i-dEp_i)$ (en el peor de los casos, el mayor de ellos).

Introduciendo el concepto de integral como *sumas de Riemann*, y teniendo en cuenta que cuando *N* tiende a infinito cada uno de los Är_i tiende a cero, el profesor expresará la posible solución al valor que buscamos de la siguiente forma:

Para que: $\int_{6.37\cdot10^6}^{8.37\cdot10^6} dEp = \text{Ä}Ep$, debe cumplirse que: $\lim\limits_{\text{Ä}r\to0} \frac{\text{Ä}Ep - dEp}{\text{Ä}r} = 0$ ($\forall\ r$)

Debemos recordar el significado de la expresión diferencial: **d*Ep*=-*F*$_r$· d*r* Es una estimación del Ä*Ep*, a partir de *r* y para un Ä*r* (=d*r*), que consiste en suponer que la fuerza es constante en ese Ä*r***. Lógicamente, la pendiente de esa estimación lineal (d*Ep*/d*r*) es constante y coincide con el valor de F_r en cada *r*.

Debes recordar, además, que el límite de una diferencia es igual que la diferencia de los límites: *lím*(*F–G*) = *límF* - *límG*

A5. *De acuerdo con las ideas que se acaban de recordar, ¿qué condición debe cumplirse para que el valor obtenido mediante la integral definida sea el valor exacto de* Ä*Ep?*

Comentario A5:

Con la ayuda de las ideas que se han recordado, y la ayuda suplementaria del profesor, esperamos que los alumnos concluyan que:

Para que: $\int_{6.37\cdot10^6}^{8.37\cdot10^6} dEp = \text{Ä}Ep$, debe cumplirse que: $\lim\limits_{\text{Ä}r\to0} \frac{\text{Ä}Ep}{\text{Ä}r} = \frac{dEp}{dr} = -F$ ($\forall\ r$), es decir, que la derivada de la *Ep* debe ser igual a –*F*. Puede interpretarse físicamente ahora esa igualdad: el valor de F_r en cada punto indica lo que disminuiría la Ep_{grav} cada metro que se produjese un desplazamiento en esa misma dirección y sentido, si la fuerza se mantuviese constante.

En ese momento quizás sea necesario que el profesor recuerde la definición de la función derivada, para concluir así en el Teorema Fundamental. A partir de aquí, se trata de aplicar reglas de antiderivación a la expresión: $Ep' = \frac{G\cdot M_T\cdot m_c}{r^2}$ (debe recordarse que, cuando el desplazamiento es *hacia arriba*, tomamos $F_{T,c}$ negativa pues tiene sentido contrario al desplazamiento), obteniendo: $Ep = -\frac{G\cdot M_T\cdot m_c}{r} + C$ Basta ya con sustituir los valores de *r* y calcular Ä*Ep*.

Durante este cálculo, surgirá la pregunta sobre el significado de la constante *C*. El profesor debe indicar que está relacionada con el origen (arbitrario) de la *Ep*, pero no afecta a los cálculos de Ä*Ep*.

A6. *Deduce una expresión general para calcular el* ÄEp_{grav} *cuando un cuerpo de masa* m_c*, se aleja de un planeta desde un punto* **A** *hasta otro* **B**.

Comentario A6:

El enunciado es ambiguo para obligar a los alumnos a realizar precisiones. El punto A debe estar por encima de la superficie del planeta (r_A R_P) para poder aplicar la ley de gravitación universal considerando la masa de todo el planeta. Hemos precisado que uno de los cuerpos es un planeta, aunque puede comentarse que puede tratarse de cualquier otro cuerpo *masivo* (estrella, satélite, galaxia...). Además, aunque no se especifica la trayectoria, puede suponerse que se trata de una trayectoria radial, pues cualquier otra trayectoria puede descomponerse en una radial y otra sobre una circunferencia concéntrica con el planeta, debido al carácter conservativo de la interacción gravitatoria.

Esperamos que los alumnos puedan desarrollar todo el proceso con la ayuda puntual del profesor. En caso de que surjan dificultades, el profesor tendrá preparado el siguiente guión:

- ¿Por qué no puede aplicarse la expresión: ÄEp=-W_{int}=-F· Är?
- ¿Cuál es el significado físico de la expresión: dEp=-F· dr?
- ¿Cómo puede mejorarse la estimación del ÄEp?, ¿cuál es la expresión correspondiente al error cometido?
- ¿Cuál es el significado de la expresión: $\int_{r_A}^{r_B} dEp$?, ¿cuál es la expresión del error cometido en este caso?
- ¿Qué condición debe cumplirse para que: $\int_{r_A}^{r_B} dEp = Ep_{r=r_B} - Ep_{r=r_A}$?

Una vez establecido el Teorema Fundamental, y deducida la expresión: $Ep_B - Ep_A = -G \cdot M_P \cdot m_c \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$, puede escribirse la expresión general correspondiente cuando se toma el origen de energía potencial en el infinito: $Ep = -\frac{G \cdot M_P \cdot m_c}{r}$

La última secuencia de actividades que hemos elaborado para comprobar la consecuencia A1 de nuestra segunda hipótesis (ver p. 245, en este mismo capítulo) se presenta en el siguiente apartado.

8.2.3. Secuencia de actividades para utilizar *con sentido* el concepto de diferencial y la estrategia del Cálculo en situaciones físicas en que la expresión diferencial debe ser formulada de manera tentativa, porque no es posible realmente o no se conoce el comportamiento lineal.

En el cuadro 8.III presentamos, de una manera genérica, la secuencia *problematizada* que hemos seguido para planificar la enseñanza del uso del Cálculo diferencial en este tipo de situaciones.

CUADRO 8.III. Secuencia didáctica, cuando no se conoce antes el comportamiento uniforme, para responder a la pregunta general: *¿cuál es el* Ä*L producido por* Ä*z?*

1. Toma de conciencia del problema: Reconocer las **dificultades** para escribir una expresión del tipo: ÄL=M· Äz, pues M no es constante en ese Äz

2. Posible estrategia para su resolución, y desarrollo de la misma:

- **2.1.** Tras un análisis físico, adelantar una o varias estimaciones lineales: ÄL_{est}=M_1· Äz, ÄL_{est}=M_2· Äz... y discutir el significado de cada una de ellas. Seleccionar una de las expresiones adelantadas y, a modo de hipótesis, considerarla como la expresión diferencial: dL=M· Äz=M· dz Realizar cálculo numérico para clarificar el significado de la diferencial, y destacar su carácter funcional.
- **2.2.** Reconocer la existencia de un error: ÄL-dL, sea cual sea Äz. Ese error nunca es cero, pero se acerca más a cero cuanto menor sea Äz
- **2.3.** Plantear la mejora de la estimación del Ä L dividiendo el intervalo en N subintervalos, y sumando las estimaciones lineales. Realizar cálculo numérico en ejemplos concretos. Destacar la disminución del error conforme N aumenta.
- **2.4.** Mostrar que, cuando N tiende a infinito (cuando el tamaño de cada subintervalo tiende a cero), el límite del error será cero, si, y sólo si, el cociente diferencial (dL/dz) coincide con la derivada (L'). Introducir el concepto de integral (definida) y aclarar el Teorema Fundamental. Subrayar que si hubiéramos escogido otra de las expresiones lineales adelantadas en 2.1, habríamos obtenido un resultado distinto para ÄL.

3. Análisis del resultado: Resaltar que, dada la naturaleza hipotética de la expresión diferencial de partida, el resultado obtenido debe ser considerado como una consecuencia contrastable, cuya validez se derivará d e su coherencia con el comportamiento experimental, con el marco teórico...

En concreto, para desarrollar el tópico que hemos elegido como ejemplo de este tipo de situaciones, hemos elaborado la secuencia de actividades que se presenta a continuación, junto a lo que esperamos obtener en cada actividad.

ABSORCIÓN DE UNA ONDA
COU

Contextualización de las actividades dentro del tema:

Previamente se ha definido la intensidad (I) de una onda en un punto como la cantidad de energía que atravesaría cada segundo cada unidad de área de superficie perpendicular a la dirección de propagación de la onda en ese punto, si el paso de energía se produjese de forma uniforme tanto espacial como temporalmente: $I = \frac{dE/dt}{dA}$

Se ha estudiado también el fenómeno de atenuación para explicar la disminución de intensidad de una onda al alejarse del foco, y se ha advertido que en el caso particular de una onda plana no existe atenuación ya que su frente de onda tiene siempre el mismo tamaño.

En ocasiones, la disminución de intensidad de una onda no sólo puede atribuirse al efecto de atenuación, es decir, a una mayor distancia al foco emisor. Por ejemplo:

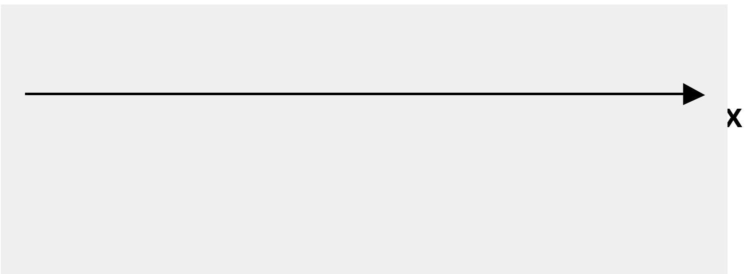
- La intensidad del sonido emitido por un altavoz no es la misma cuando estamos en la misma habitación que el altavoz que cuando estamos en otra habitación distinta, aunque en ambos casos estemos situados a la misma distancia del altavoz.
- La intensidad de la luz que nos llega del faro es menor los días de niebla, a pesar de que estamos siempre a la misma distancia y la potencia de emisión del faro es siempre la misma.

A1. *Intenta explicar las razones por las cuales disminuye la intensidad de la onda en los ejemplos que se acaban de citar.*

Comentario A1:

Antes de usar el Cálculo es preciso haber comprendido el fenómeno físico a abordar: el medio es el responsable de la disminución de intensidad; la causa no es ahora un reparto de la misma energía entre un número mayor de puntos, sino que el medio absorbe energía que no devuelve (se acumula en forma de energía interna).

En general, la disminución de la intensidad es debida tanto a la atenuación como a la **absorción del medio**. Para centrar nuestra atención en el fenómeno de absorción, eliminaremos el efecto de la atenuación suponiendo una *onda plana* que se propaga en la dirección del eje X.



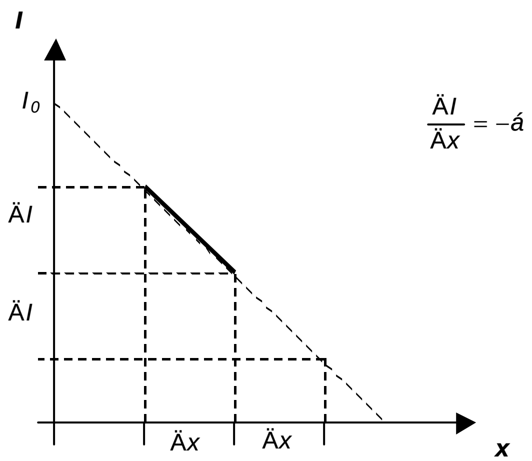
A2. *¿De qué crees que va a depender la disminución de intensidad de una onda al pasar de un punto a otro de un mismo medio? Adelanta una expresión que relacione el* Ä*I para un* Ä*x dado. Representa la gráfica I-x correspondiente.*

Comentario A2:

Esperamos que reconozcan la influencia de las características del medio (recogidas en la constante á) y la distancia entre los puntos (Ä*x*), y lo reflejen en una expresión lineal: Ä*I*=-á· Ä*x*. Se destacará que esa expresión constituye **una hipótesis**, y es la **más sencilla** entre muchas coherentes con un primer análisis cualitativo.

En el sistema de coordenadas *I-x* se representará el trozo de gráfica (segmento) Ä*I* frente a Ä*x*; como ese Ä*I* es el mismo para cualquier Ä*x*, pueden representarse distintos trozos consecutivos y construir la recta que va desde I_0 (en *x*=0) hasta *I*=0 para una cierta distancia.

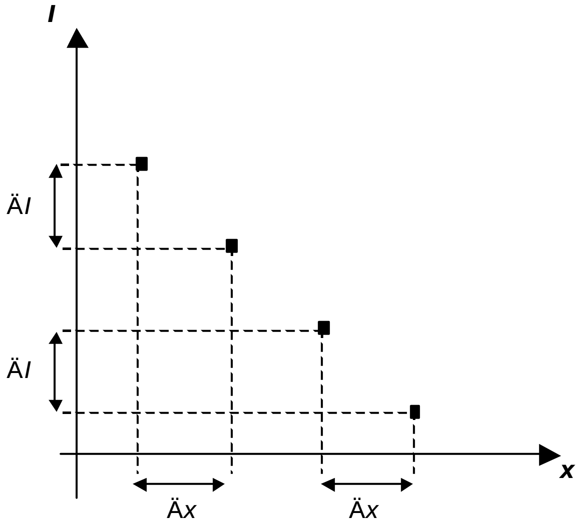
Es necesario poner a prueba esta hipótesis, según la cual la variación de la intensidad por cada unidad de longitud es siempre la misma, es decir, la intensidad disminuye linealmente con *x*.



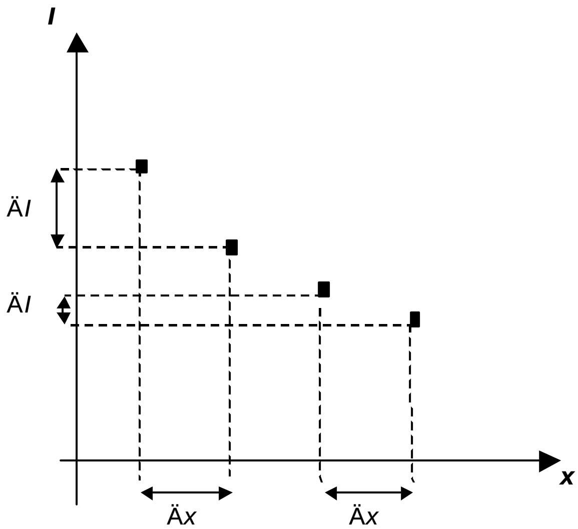
A3. *Imaginad un diseño experimental para probar la hipótesis anterior.*

Comentario A3:

Aunque se trate de un experimento mental, es necesario que los alumnos se enfrenten a esta tarea para que después puedan dar sentido a los datos que les vamos a suministrar. Basta con que propongan medir I para distintos valores de x (preferiblemente, múltiplos unos de otros: x_0, $2x_0$, $3x_0$...), y adelanten qué resultado confirmaría la hipótesis (que el ÄI entre cada medida sea siempre el mismo, si se han tomado valores de x múltiplos de un valor: x_0). Gráficamente, cabe esperar entonces:



A4. *Experimentalmente, se han obtenido los valores de I que se representan en la siguiente gráfica.*



A la luz de estos resultados, introducid las modificaciones oportunas en la hipótesis sobre la relación de ÄI con Äx

Comentario A4:

Esperamos que los alumnos reconozcan que no sucede lo que ellos esperaban, pues el Ä*I* en un intervalo Ä*x* depende del valor de *I* al principio de ese intervalo, y que adelanten entonces la nueva expresión: Ä*I*=-*I*· á· Ä*x*. Es posible que los alumnos escriban directamente I_0 en lugar de *I*, pero debe advertirse que se busca el Ä*I* correspondiente a cualquier Ä*x*, a partir de cualquier *x*, y no sólo a partir de *x*=0.

Durante la puesta en común, el profesor les hará tomar conciencia del problema: ¿qué valor de *I* debe tomarse en esa expresión, si varía a lo largo de ese Ä*x*? El comportamiento no lineal obligará entonces a considerar la expresión adelantada como una estimación lineal: Ä I_{est}=-*I*· á· Ä*x* Se advertirá que existen otras expresiones compatibles con el análisis cualitativo y el comportamiento experimental, y deben escribirse algunas de esas otras estimaciones lineales; por ejemplo: $\text{Ä}I_{est} = -\text{á}\cdot\sqrt{I}\cdot\text{Ä}x$, $\text{Ä}I_{est}=-\text{á}\cdot I^2\cdot \text{Ä}x$, etc.

El paso siguiente es considerar una de las estimaciones lineales como la diferencial, **a título de hipótesis**. Si elegimos la primera, entonces nuestra hipótesis es que: **d*I*=-á· *I*· d*x***

El profesor pedirá que expresen por escrito el significado de esa expresión diferencial, y la comparen con el Ä*I* correspondiente. Esperamos que reconozcan que el error cometido: (Ä*I*-d*I*) es negativo, y que su valor absoluto es menor cuanto menor sea Ä*x*. Si es necesario, el profesor debe recordar que ese error nunca se hará cero, aunque puede acercarse a cero todo cuanto se quiera, tomando Ä*x* suficientemente pequeña (es decir, el límite de ese error, cuando Ä*x* tiende a cero, es cero), algo que también ocurriría en las otras estimaciones lineales.

A5. *A partir de la expresión diferencial que has adelantado en la actividad anterior, intenta deducir una expresión para la función I(x).*

Comentario A5:

Esperamos que los alumnos reconozcan la estrategia a seguir: mejorar la estimación dividiendo el intervalo en un número *N* de subintervalos, y sumando cada una de las estimaciones parciales, y plantearse la condición que debe cumplirse para que este procedimiento conduzca al resultado exacto en el límite cuando *N* tiende a infinito.

Según el grado de familiaridad de los alumnos con la estrategia del Cálculo, será necesario detenerse más o menos en cada uno de los pasos (ver, en este mismo capítulo, pp. 284-285, el comentario A6). En cualquier caso, será necesario verbalizar los pasos fundamentales, evitando reducirlo todo a la aplicación mecánica de un nuevo lenguaje, algo que tendrá sentido sólo cuando se conviertan en expertos en la aplicación del Cálculo para la resolución de problemas físicos.

La conclusión final, será:

Para que: $\text{Ä}I = \lim\limits_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} dI_i = \int_x^{x+\text{Ä}x} dI$, debe cumplirse que: $\lim\limits_{\text{Ä}x\to 0}\frac{\text{Ä}I}{\text{Ä}x} = \frac{dI}{dx} = -\text{á}\cdot I$ ($\forall$ x), es decir: $I' = -\text{á}\cdot I$

A partir de aquí, puede buscarse directamente una función cuya derivada sea ella misma, o bien reescribir la expresión diferencial ($dI/I=-\text{á}\cdot dx$) y aplicar reglas de integración que esperamos que conozcan.

Una vez obtenida la expresión correspondiente ($I=I_0 . e^{-\text{á}\cdot x}$), debe ser puesta a prueba, ya que la expresión diferencial de partida era una hipótesis, y si hubiéramos escogido otra habríamos obtenido otros resultado distinto. Se comprobará que la expresión obtenida para *I*(*x*) es coherente con el comportamiento experimental que se ha descrito en **A4**, aunque su validez definitiva se obtiene por su ajuste con un conjunto más amplio de datos experimentales y fenómenos conocidos. Puede deducirse la expresión del espesor de semiabsorción de cada medio: ln2/á.

8.2.4. Red de análisis para el seguimiento de las clases

Para realizar una valoración cualitativa de en qué medida las actividades planificadas proporcionan oportunidades adecuadas para que los alumnos aprendan, el *profesor investigador* y los *profesores formados*, deberán completar un cuestionario abierto durante o inmediatamente después de las clases. Las cuestiones sobre las que los profesores deben reflexionar y valorar se presentan en el siguiente cuadro:

CUADRO 8. I. RED DE ANÁLISIS PARA EL SEGUIMIENTO DE LAS CLASES

Reflexión sobre la actividad A _____

1. ¿Las respuestas de los alumnos se han ajustado a lo que se esperaba? Describe cuáles han sido.
2. ¿Qué dificultades o ideas erróneas han surgido? ¿Cómo has tenido que intervenir para ayudar a superarlas?
3. ¿La actividad es adecuada para lo que se desea? ¿Comprenden los alumnos su sentido? ¿Genera la necesidad de una intervención por tu parte que es comprendida por los alumnos?
4. ¿La cambiarías por otra? ¿Cuál?, ¿por qué?
5. En el caso de actividades de aprendizaje/ evaluación, indica porcentajes aproximados de éxito en la tarea antes y tras la puesta en común.
6. Después de desarrollar el apartado completo, ¿qué modificaciones introducirías en la secuencia de actividades?, ¿crees que los alumnos comprenden lo que se está haciendo?

En el caso del tema de Cinemática, cuya secuencia de actividades ha sido desarrollada por distintos profesores, las reflexiones se pondrán en común con la intención de valorar, entre todos, en qué medida dicha secuencia ofrece oportunidades para aprender en el aula de 3º BUP e introducir posibles mejoras (de hecho, en la actualidad el programa-guía que utilizan ha sufrido algunas modificaciones –no sustanciales- respecto al presentado). En el caso de los tópicos de COU, la red de análisis será utilizada por el *profesor investigador*, que es el único que utiliza los materiales experimentales. Esperamos encontrar, en todos los casos, descripciones y comentarios que muestren que las situaciones generadas en el aula con la secuencia de actividades que hemos presentado producen intervenciones, diálogos, incluso dificultades, que sean indicadoras de que la enseñanza se está desarrollando dentro de la “zona de desarrollo potencial” de los alumnos. En definitiva, que sean adecuadas para aprender, al mismo nivel, al menos, que cualquier otra parte de la Física que enseñan los profesores de los grupos experimentales en sus clases.

8.2.5. Instrumentos para comprobar la mejora entre los alumnos de todos los indicadores de una adecuada comprensión del Cálculo diferencial en la Física.

Para comprobar que la introducción de nuestra propuesta sobre el Cálculo diferencial en el desarrollo de la Física a partir de 3º BUP mejora la comprensión y la actitud de los estudiantes respecto a la situación habitual, hemos utilizado los mismos instrumentos que nos han servido para mostrar las deficiencias de los estudiantes de COU que han recibido una enseñanza convencional sobre los mismos aspectos, que serán considerados como grupo de control. Esto nos permitirá realizar un análisis comparativo de los resultados de las distintas muestras.

Los instrumentos utilizados, lo que se espera medir con cada uno de ellos y los estadillos correspondientes para su análisis, han sido ya presentados con detalle en el capítulo 4. En la tabla 8.II recordamos cuáles son y el momento en que se aplicarán a los grupos experimentales (como ya hemos explicado en la p. 250 de este capítulo, los instrumentos relacionados con la integral y el Teorema Fundamental se emplearán aplicarán en grupos experimentales de segundo curso del *profesor investigador* (COU), pues esos aspectos no se contemplan *obligatoriamente* en la secuencia de actividades de Cinemática que desarrollamos en 3º BUP).

TABLA 8.II. Instrumentos para comprobar la mejora de los indicadores de una adecuada comprensión de la diferencial en la Física entre los alumnos de grupos experimentales.

Instrumento (ver *hojas recordatorio*)	**Momento en que se aplicará a los grupos experimentales**
C1e-p (cap. 4, p. 126) **C2e-p** (cap. 4, p. 129) **C3e-p** (cap. 4, p. 131) **C5e** (cap. 4, p. 139) **C6e** (cap. 4, p. 141) **C7e** (cap. 4, p. 143) **C8e** (cap. 4, p. 145) **Entrevista** semiestructurada (cap. 4, pp. 154-158)	En 3º BUP, varios días después de terminar el tema de Cinemática
C4e-p (cap. 4, p. 133) **P1e** (cap. 4, p. 147)	En COU, en el mes de mayo, a grupos experimentales de *segundo curso.*

Para evitar la posibilidad de que algunos estudiantes del grupo de control no hubieran recibido –o hubieran recibido menos- enseñanza sobre los conceptos relacionados con el Cálculo diferencial, los grupos de control estarán formados por estudiantes a punto de terminar el curso de COU, pertenecientes a seis Institutos de Almería (ver cap. 5, p. 172), cuando ya han tenido distintas oportunidades de utilizarlo tanto en Física como en Matemáticas.

Utilizaremos como grupos experimentales los alumnos de 3º de BUP -y, ocasionalmente, también de COU- del *profesor investigador* (todos son alumnos del Instituto *Galileo* de Almería, situado en un barrio de clase cultural y económica de nivel bajo), y los alumnos de 3º BUP de *profesores formados* (todos son alumnos del Instituto *Al-Andalus*, situado en la misma ciudad, en un barrio de clase cultural y económica media y baja). Lógicamente, esperamos encontrar claras diferencias a favor de los grupos experimentales, y que éstas sean más acusadas para los grupos del *profesor investigador*.

8.3. DISEÑO PARA COMPROBAR QUE LOS PROFESORES PERCIBEN POSITIVAMENTE LA *NUEVA* PROPUESTA SOBRE LA DIFERENCIAL Y LA POSIBILIDAD DE INCORPORARLA EN SUS CLASES

Para que el nuevo enfoque del Cálculo diferencial en la enseñanza de la Física llegue a tener una incidencia real, es necesario que los protagonistas encargados de realizar el cambio, los profesores, puedan cambiar sus propias concepciones.

En distintos trabajos se destaca cómo el estilo de enseñanza y las dificultades de los profesores en el aula están determinados por su dominio del contenido y su conjunto de creencias sobre *qué* y *cómo* enseñar (Ausubel, 1978; Tobin y Espinet, 1989; Gil, 1991; Woolnough, 1994). Los *Principles and Standards for School Mathematics* proclaman la importancia de que los profesores conozcan y comprendan profundamente las matemáticas que están enseñando, las diferentes representaciones de las ideas fundamentales, con sus ventajas e inconvenientes, pues este conocimiento determinará en gran medida sus decisiones curriculares y su actuación en el aula (NCTM, 2000). Más concretamente, Thompson ha insistido en la importancia de cambiar el pensamiento matemático del profesor para llevar a cabo innovaciones reales que permitan superar el *gap* entre los objetivos y la instrucción escolar, aunque advierte que es difícil realizar este cambio (Thompson, 1994; Thompson y Thompson, 1996).

En efecto, como ya se comentó al justificar la primera hipótesis (cap. 3, pp. 94-95), los profesores están condicionados por una “formación docente ambiental” adquirida inconscientemente en su etapa de estudiantes a través de lo que han visto hacer a sus profesores (Furió y Gil, 1989). El contenido de esa “formación ambiental” se ve reflejado en los resultados ya mostrados del análisis de textos universitarios y de las respuestas de los profesores: falta de comprensión genuina y actitud meramente algorítmica (ver cap. 5). Las características de esa “formación ambiental” han sido estudiadas también por Mura (1993 y 1995) al analizar el pensamiento matemático de profesores universitarios, ya sean especialistas en Matemáticas o en Educación Matemática; según ese autor, es ampliamente compartida una visión formalista que enfatiza la lógica, el rigor y el simbolismo, y dicha visión es acompañada -sobre todo en los profesores de Educación Matemática- por una visión instrumentalista que considera el estudio de reglas como un elemento central de la asignatura

Teniendo en cuenta la importancia del pensamiento de los profesores, para que puedan llegar a cambiar el uso que ellos hacen del Cálculo diferencial consideramos imprescindible que reconozcan el problema, se impliquen en su solución, (re)elaboren la nueva propuesta y valoren sus posibilidades. Con este fin, hemos diseñado un curso para profesores, de 20 h de duración, titulado: *"El uso del concepto de diferencial y del Cálculo diferencial en la enseñanza de la Física (un análisis crítico y una propuesta fundamentada)"*. Ese curso costa de tres fases: 1) Toma de conciencia de las dudas y dificultades de los asistentes y sus alumnos cuando usan el Cálculo diferencial, 2) Reflexión descondicionada sobre las causas de tales deficiencias y posibles formas de superarlas, donde se les presenta la propuesta alternativa, y 3) Puesta a prueba de la potencialidad de esa propuesta, utilizándola en aquellas situaciones en las que se han identificado las deficiencias.

El curso ha sido impartido como actividad formativa organizada por Centros de Profesorado de Andalucía y de la Comunidad Valenciana, por el I.C.E. de la Universidad de Alicante, o dentro del Plan de actualización científico-didáctica organizado por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía. La forma de organizar y desarrollar el curso coincide con la forma habitual en que el autor de esta investigación desarrolla su enseñanza: a través de un programa-guía de actividades estructuradas para resolver situaciones problemáticas. El programa-guía completo y comentado, así como los objetivos, la estructura, el contenido y la metodología del curso se presentan en el **Anexo 6**.

Presentamos a continuación los diseños experimentales que utilizaremos para probar las dos consecuencias contrastables en que hemos concretado ese cambio entre los profesores (ver p. 246, en este mismo capítulo).

8.3.1. Diseño para comprobar que se produce una mejora de la comprensión del Cálculo diferencial cuando los profesores resuelven problemas de Física

Como se recordará, para contrastar la primera hipótesis hemos utilizado, entre otros instrumentos, el análisis de las respuestas de los profesores cuando resuelven un problema de Física que requiere el uso del Cálculo diferencial. En concreto, hemos preparado dos enunciados distintos (P2e-p, P3p, cap. 4, p. 148), que hemos pasado indistintamente a los profesores antes de iniciar el curso de formación.

Para probar que se ha producido un cambio, pediremos a cada profesor al finalizar el curso que resuelva uno de esos dos problemas, distinto del que resolvió al comienzo. Analizaremos sus respuestas con el mismo estadillo que hemos utilizado para los problemas antes del curso (cap. 4, p. 151). Compararemos los resultados de ese análisis antes y después del curso; como los problemas utilizados han sido los mismos, podremos atribuir las diferencias a un efecto del propio curso.

8.3.2. Diseño para comprobar que los profesores valoran positivamente el papel de la *nueva* propuesta sobre la introducción y uso de la diferencial en la enseñanza y el aprendizaje de la Física

Para estudiar si los profesores ven potencialmente útil la propuesta presentada durante el curso, hemos elaborado un cuestionario de diez ítems (Cuadro 8. IV) sobre los distintos indicadores de una adecuada comprensión de la diferencial en la Física (cap. 2, p. 81).

Cada profesor, al finalizar el curso, valorará entre 0 y 10 en qué medida se ve favorecido el aspecto señalado en cada ítem según se utilice la diferencial habitual o la que hemos propuesto como alternativa. Estudiaremos la diferencia de valoración en cada ítem.

CUADRO 8.IV. Valora de 0 a 10 en qué grado se favorece la consecución de cada uno de los aspectos citados según la concepción de la diferencial que se utilice:	**Diferencial propuesta**	**Diferencial habitual**
1. Que se justifique la necesidad de usar el Cálculo diferencial	______	______
2. Que se comprenda el significado físico de las expresiones diferenciales	______	______
3. Que se comprendan más claramente los conceptos básicos del Cálculo (derivada, diferencial e integral)	______	______
4. Que se puedan abordar con mayor seguridad nuevos problemas de Física que requieran el uso del Cálculo diferencial	______	______
5. Que se supere la visión reduccionista que identifica el dominio del Cálculo diferencial con la aplicación mecánica de reglas	______	______
6. Que se supere la ambigüedad del *todo vale* para la expresión diferencial	______	______
7. Que se reconozca a cada expresión diferencial su carácter de hipótesis y, por tanto, como posible fuente de error	______	______
8. Que se vincule estrechamente el análisis físico del problema al desarrollo diferencial que se lleva a cabo	______	______
9. Que, en particular, los alumnos utilicen con comprensión el Cálculo diferencial	______	______
10.Que, en particular, los alumnos superen una actitud negativa hacia el uso del Cálculo diferencial en la Física	______	______

Capítulo 9

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LA CONTRASTACIÓN EXPERIMENTAL DE LA SEGUNDA HIPÓTESIS

En los capítulos anteriores hemos fundamentado nuestra segunda hipótesis y hemos presentado el diseño experimental para su contrastación. Las consecuencias que hemos obtenido se refieren a la posibilidad de incorporar la nueva propuesta de la diferencial a las clases de Física, a las mejoras que esperamos producir con ello entre los estudiantes, y a la percepción positiva por parte de los profesores de dicha propuesta. Para contrastar estas consecuencias, describiremos lo que sucede en el aula cuando utilizamos en nuestras clases las secuencias de actividades previamente diseñadas, y analizaremos las respuestas de estudiantes y profesores a distintas cuestiones y problemas.

En este capítulo se mostrarán los resultados obtenidos con ese diseño experimental. Cuando sea necesario establecer comparaciones entre los resultados obtenidos por grupos sometidos a diferente tratamiento (experimentales y de control), se estimará el nivel de significación de las diferencias que se observan entre los distintos grupos mediante el parámetro estadístico *t de Student*. Consideraremos que existen diferencias significativas cuando el nivel de significación sea del 5% o menor, es decir, cuando la probabilidad de que las diferencias sean debidas al azar en vez de a nuestro tratamiento sea menor del 5%.

9.1. DESCRIPCIÓN DE LO QUE SUCEDE EN EL AULA

Como se recordará, hemos elaborado una secuencia de actividades basada en el modelo de enseñanza por investigación, para introducir los conceptos básicos del Cálculo diferencial, que se inserta en el desarrollo del tema de Cinemática con alumnos de 3º BUP. Hemos elaborado también secuencias de actividades para distintos tópicos de Física de COU, con la intención de enseñar la estrategia completa del Cálculo e introducir el concepto de integral y el Teorema Fundamental; en concreto, hemos presentado esa secuencia para dos *tópicos ejemplificadores* de los dos tipos de situaciones que, desde el punto de vista matemático, podemos encontrar en el uso del Cálculo diferencial en la Física (según se haya podido estudiar previamente o no la situación uniforme).

Hemos presentado ya estas secuencias de actividades con comentarios sobre lo que se pretende en cada actividad, y las respuestas y dificultades que esperamos que surjan en la realización de cada una de ellas. Para valorar cualitativamente en qué medida esas actividades proporcionan oportunidades para que los alumnos aprendan, hemos diseñado una red de análisis para el seguimiento de las clases (cap. 8, p. 295).

A continuación (pp. 307-337) presentamos cada actividad con comentarios que describen lo que ha sucedido realmente en el aula. Como se recordará, a pesar de que las actividades se insertan en un programa más amplio, sólo hemos presentado en este trabajo las actividades directamente relacionadas con nuestro objeto de estudio: el uso del Cálculo diferencial en la Física.

TEMA 1. ¿CÓMO CARACTERIZAR CON PRECISIÓN EL MOVIMIENTO DE UN OBJETO INDEPENDIENTEMENTE DE SU NATURALEZA?

(Cinemática, 3º BUP)

Recuérdese la **contextualización de las actividades dentro del tema** (cap. 8, p. 257)

A4. *La posición de un móvil en el instante t=4 s es e=10 m, y 6 s más tarde está en e=58 m ¿Cuál será la rapidez del móvil en t=4 s? Explica el significado del resultado obtenido.*

Comentario A4:

Algunos alumnos confunden posición con desplazamiento sobre la trayectoria e instante con intervalo de tiempo, lo que les lleva a calcular: $v=e/t=2.5$ m/s. En la puesta en común el profesor va realizando marcas sobre la trayectoria, y los alumnos corrigen el error; entonces, todos calculan la rapidez (media): $v=\text{Ä}e/\text{Ä}t=8$ m/s.

Algunos estudiantes advierten ya en su grupo que 8 m/s es la rapidez media. En la puesta en común, al traducir los cálculos en el sistema de coordenadas *e-t*, todos reconocen que han supuesto un movimiento uniforme al calcular la pendiente de la supuesta recta. Con la ayuda del profesor, se resumen los cálculos realizados mediante la expresión: $v_m(t,\text{Ä}t)=\dfrac{e(t+\text{Ä}t)-e(t)}{\text{Ä}t}$, y se advierte que ese resultado será la rapidez durante el movimiento si, y sólo si, la rapidez se mantiene constante.

A5. a) *Calcula la rapidez media de la bola que cae por el plano inclinado a partir de t=0.4 s para un Ät de 1.3 s. Explica sobre la gráfica e-t las operaciones realizadas, así como el significado físico del resultado obtenido* **b)** *¿Sabes ya la rapidez de la bola en t=0.4 s?, ¿nos hemos aproximado al menos a su valor?*

Comentario A5:

En un apartado anterior habían obtenido experimentalmente la gráfica *e-t* y la ecuación correspondiente: $e=88t^2$ Todos los alumnos realizan el cálculo correctamente (184.8 cm/s), y el profesor les invita en la puesta en común a expresar lo que se hecho en distintas formas: verbal, haciendo marcas sobre la trayectoria, de forma analítica y mediante el sistema de coordenadas *e-t*. En este último caso, los alumnos se limitan a trazar la cuerda, siendo necesario que el profesor trace la *recta secante* para calcular su pendiente.

Aunque algunos piensan que 184.8 cm/s es ya la rapidez en $t=0.4$ s, en la discusión reconocen su error e incluso advierten que $v(0.4)$ debe ser menor de 184.8 cm/s. Al ver sólo el instante $t=0.4$ s, algunos alumnos vuelven a repetir el error de partida: $v=e/t$, provocando una nueva discusión entre los distintos grupos.

Cuando el profesor pide que busquen un procedimiento para aproximarse más a $v(0.4)$, los alumnos se refieren de inmediato al cálculo de la rapidez media en un intervalo más pequeño. El profesor desecha las propuestas que suponen ir hacia atrás –por ejemplo, entre 0.3 y 0.4 s-, con el argumento de buscar siempre lo que va a cambiar la posición a partir de ese instante, no lo que ya ha cambiado antes.

Los alumnos hacen los cálculos para Ät=0.1 s, y con la ayuda del profesor lo interpretan sobre la gráfica (pendiente de la recta secante *vista con lupa*) y haciendo marcas sobre la trayectoria. Reconocen ahora disponer de un método para aproximarse mucho a la rapidez en t=0.4 s, aunque advierten al mismo tiempo que siempre existirá un error pues ningún tramo de la curva de la gráfica *e-t* es recto, por muy pequeño que sea.

Al hacer la crítica de los resultados, el profesor formula la pregunta clave, relacionada no con el cálculo sino con el significado: "el significado de la rapidez media está asociado a un Ät, sin embargo estamos hablando de la rapidez en un instante, **¿tiene algún sentido hablar de rapidez en un instante?**" Esta pregunta provoca una discusión acalorada entre los alumnos: niegan que pueda haber rapidez sin transcurso del tiempo, y sin embargo admiten que pueden conocer la rapidez de un coche en un instante determinado. La discusión sirve para introducir la siguiente actividad.

A6. *Por un procedimiento todavía desconocido, hemos averiguado la rapidez de un coche en el instante t=6 s, y el resultado es: 25 m/s. Discute el significado físico de ese valor.*

Comentario A6:

La primera lectura de la actividad deja perplejos a algunos alumnos, extrañados de que realmente se pueda conocer $v(6)$. Ante las dificultades para empezar, el profesor propone un ejemplo: "vamos en un tren, miramos el reloj y marca las once menos cuarto, y en ese instante miramos el velocímetro e indica: 110 km/h, ¿qué significa ese dato?" Muchos alumnos todavía se extrañan; otros contestan de inmediato: "el tren ha recorrido 110 km en 1 h", y son corregidos por sus compañeros: "el tren *va* a recorrer 110 km en 1 h". Esta respuesta es completada en voz alta: "¡eso si se mantiene la rapidez constante!" En este momento, el profesor propone que discutan la respuesta a la actividad planteada en pequeños grupos.

En la puesta en común todos están de acuerdo en el significado de $v(6)$=25 m/s, y casi todos destacan que es necesario suponer constante la rapidez. La definición final es: "a partir de t=6 s, el móvil *recorrería* 25 m cada segundo si mantuviese constante esa rapidez". El profesor insiste: "después de 1 s, ¿habrá recorrido entonces 25 m?" Aunque algunos contestan afirmativamente, son corregidos por sus propios compañeros: "¡sólo si la rapidez se mantiene constante!".

Los alumnos interpretan el significado de nuevos valores de la rapidez en distintos instantes, e incluso calculan el desplazamiento sobre la trayectoria durante 2 s, 5 s... criticando siempre su propia respuesta: "¡esto sólo en el caso supuesto de que mantuviese la rapidez constante!".

En lugar de tener que escribir: "Äe si la rapidez se mantuviese constante, si e cambiase uniformemente", el profesor propone utilizar el término: "de, *diferencial de la posición*". En este momento algunos alumnos piensan que en unos movimientos existe Äe y en otros de; para salir al paso, el profesor insiste: en todos los movimientos puede definirse Äe, cuyo significado es el mismo que hemos utilizado hasta aquí, y de es un nuevo concepto que hemos inventado para referirnos a lo que sucedería a partir de un instante si el movimiento fuese uniforme. Utilizando este nuevo concepto, la rapidez en un instante se define operativamente a través de la siguiente expresión: $v \equiv \frac{de}{dt}$

A7. *En un instante determinado, un coche se mueve a 60 km/h. ¿Cuánto se habrá desplazado durante los siguientes quince minutos?*

Comentario A7:

Todos los alumnos calculan 15 km, y el 60% además precisan: “15 km si se mantuviese constante la rapidez”, o bien: “como no sabemos si el movimiento es uniforme, no sabemos si en realidad se habrá desplazado 15 km”. El profesor escribe: d*e*=*v*(*t*)· Ä*t*, como expresión de las operaciones realizadas.

Para distinguir entre Ä*e* y d*e*, el profesor realiza marcas sobre la trayectoria; el Ä*e* queda como interrogante: mayor, menor o igual que 15 km. Por último, se reflejan los cálculos -y el interrogante sobre Ä*e*- en el sistema de coordenadas *e*-*t*.

Refiriéndose siempre al ejemplo de la bola que cae por el plano inclinado, el profesor inventa datos de rapidez instantánea y pregunta por el desplazamiento en distintos intervalos de tiempo. Aunque todos hacen el cálculo correcto, sólo unos pocos precisan: “eso si la rapidez hubiese sido constante”. Se repiten cálculos del mismo tipo y se interpretan, hasta que la mayoría comprende el significado. Al final, se destaca que d*e* depende de *t* y de Ä*t*.

Mediante una breve cuestión escrita al finalizar la actividad, hemos comprobado que el 65% de los alumnos saben calcular e interpretar correctamente d*e* conociendo la rapidez en un instante, así como interpretar el significado de la rapidez en un instante. Al comenzar la siguiente clase volvemos a obtener resultados similares, y en mayor porcentaje aún reconocen que si el movimiento es uniforme d*e* es igual que Ä*e*, o que es innecesario entonces hablar de d*e*. Preguntados por la relación entre d*e* y Ä*e* según la rapidez aumente o disminuya, casi la mitad responde correctamente, a pesar de que esa relación aún no se ha discutido en clase. Todo ello refleja un buen grado de comprensión y seguimiento de la clase.

Ya sabemos el **significado** de la rapidez en un instante cualquiera, pero sabemos calcularla sólo en el caso de movimientos uniformes. Debemos abordar entonces la siguiente cuestión: **¿cómo calcular la rapidez instantánea de un cuerpo en un movimiento no uniforme?** Nos ocuparemos, en primer lugar, del cálculo de la rapidez de la bola en un instante concreto, por ejemplo, t=0.8 s.

A8. *Mediante la ecuación del movimiento que hemos deducido experimentalmente ($e=88t^2$), calcula la posición de la bola en el instante t=0.8 s, y señala en la gráfica e-t el punto correspondiente. Calcula un valor aproximado de la rapidez en t=0.8 s, y representa sobre la gráfica los cálculos realizados. ¿Puedes mejorar esa aproximación?*

Comentario A8:

Cada grupo de alumnos escribe en la pizarra el resultado obtenido, especificando el Ä*t* considerado (lo hacen desde Ä*t*=1 s hasta Ä*t*=0.0001 s). Con ayuda del profesor, se interpreta cada resultado haciendo marcas sobre la trayectoria y en la gráfica *e*-*t*.

Al analizar los resultados, después de realizar la interpretación gráfica, todos los alumnos coinciden en que *v*(0.8) será la pendiente de la recta tangente a la gráfica que pasa por ese punto; sólo algunos de ellos mencionan la posibilidad de calcular el límite de la sucesión numérica. El profesor aclara entonces que la recta tangente no coincide con ninguna de las rectas secantes, ni el límite de la sucesión coincide con ninguna de las rapideces medias, algo que admiten sin dificultad.

Los alumnos ponen en práctica el procedimiento gráfico para calcular *v*(0.8): trazan la recta tangente y calculan la pendiente. Un alumno de cada grupo escribe su resultado en la pizarra, especificando el valor utilizado de Ä*t* para calcular: d*e*/Ä*t*. Al discutir sobre las discrepancias, coinciden fácilmente en que no es debido al valor del Ä*t* considerado, sino al error cometido al trazar la recta tangente.

Algunos alumnos han adelantado ya la posibilidad de calcular el límite de una sucesión discreta de números (valores concretos de rapideces medias a partir de *t*=0.8 s, para distintos Ä*t*). El profesor adelanta, como conclusión, que será posible calcular **exactamente** el límite de la función: v_m(0.8, Ä*t*). Se introduce así la siguiente actividad.

Hemos inventado una estrategia para calcular la rapidez en *t*=0.8 s: se calcula la rapidez media para un Ä*t* a partir de 0.8 s, se calcula otra rapidez media para un Ä*t* más pequeño, después otra... y se obtiene así una sucesión de números. El límite de esa sucesión cuando Ä*t* tiende a cero es la rapidez en *t*=0.8 s pero, ¿cómo calcular el valor exacto de ese límite? En la gráfica *e*-*t* podemos hacerlo trazando la recta tangente a la curva en *t*=0.8 s y calculando su pendiente, pero: ¿cómo podemos estar seguros de haber trazado exactamente la tangente?

En lugar de trazar la tangente o de calcular el límite de una sucesión numérica, podemos calcular de forma exacta el **límite de una función: v_m(Ä*t*).** Para ello, obtendremos la expresión general de la rapidez media a partir de *t*=0.8 s y para un Ä*t* genérico, y después calcularemos el límite de esa expresión cuando Ät tiende a cero. La actividad siguiente muestra la planificación que ha realizado un compañero tuyo para calcular el valor exacto de la rapidez de la bola cuando *t*=0.8 s paso a paso. Revísala y completa los cálculos.

A9. *Sabiendo que:* ***e(t)=88t²***, *para hallar la rapidez en el instante t=0.8 s, haré lo siguiente:*

Posición de la bola cuando t=0.8 s .... e(0.8) = ?

Posición de la bola un Ät después .... e(0.8+Ät) = ?

Desplazamiento de la bola durante ese Ät .... Äe = e(0.8+Ät) - e(0.8) = ?

Rapidez media a partir de t=0.8 s, durante ese Ät .... v_m(0.8, Ät) = Äe/Ät = ?

Rapidez en el instante t=0.8 s .... v(0.8) = ?

Comentario A9:

Esta actividad fue encargada para casa, y sólo unos pocos la realizaron correctamente, salvo errores operativos (por ejemplo, considerar el cuadrado del binomio como suma de cuadrados).

La mayoría sustituyeron Ä*t* por un valor concreto, el más frecuente: 0.1 s. Lógicamente, no fueron capaces de contestar a la última pregunta. En la puesta en común, y después de haber representado gráficamente los cálculos, casi todos reconocen que han calculado la rapidez media entre 0.8 y 0.9 s. Algunos, en el último apartado, proponen sustituir Ät por un valor "muy pequeño": 0.001 s, lo que refleja una confusión entre el límite y el *último término* de la serie (o uno de los últimos).

Después de esa primera puesta en común, el profesor les propone repetir los cálculos dejando Ä*t* como variable. Más del 50% realizan los cálculos correctamente, y el resto aprende el procedimiento correcto durante la nueva puesta en común. El profesor interpreta en la gráfica cada paso, e identifica el resultado con el valor exacto de la pendiente de la recta tangente.

Cuando se les propone calcular la rapidez en otro instante siguiendo un procedimiento similar, la mayoría realiza correctamente los cálculos sin ayuda.

Sin necesidad de leer la información posterior, en la discusión algunos alumnos preguntan cómo calcular la rapidez en un instante cualquiera. Aunque algunos tienen dificultades para manejar funciones de más de una variable, el profesor va sustituyendo en el último cálculo realizado el valor numérico concreto de *t* por la *variable t*. Al terminar, algunos identifican el resultado con la derivada (se empezó la parte de Física después de desarrollar la de Química, de manera que ya habían tratado en Matemáticas el *cálculo* de derivadas), aunque no tienen claro si es casualidad; posiblemente, esto indica que ni siquiera estos alumnos más aventajados reconocen la derivada como el límite del cociente incremental.

Como aplicación, el profesor plantea en clase la siguiente actividad de evaluación individual:

La ecuación del movimiento de un móvil es la siguiente: $\boldsymbol{e = 5t^2 + 3}$*, y la de otro:* $\boldsymbol{e = 4t - 1}$ *(S.I.) Deduce la ecuación v(t) de cada móvil. Calcula la rapidez cuando t=2 s y explica el significado físico del resultado.*

Estos son los resultados de esa evaluación:

- El 90% obtiene correctamente *v*(*t*) en el primer móvil ($e=5t^2+3$) calculando el límite de la rapidez media "paso a paso", y el otro 10% calcula directamente la derivada.
- En el segundo móvil (*e=4t-1*), una tercera parte reconoce que es un movimiento uniforme e identifica la rapidez como el coeficiente que acompaña a la variable *t*; el resto, vuelve a calcular el límite de las rapideces medias, aunque en la puesta en común advierten que no era necesario.
- El 50% explica correctamente el significado del resultado obtenido para v_2, distinguiendo entre el primer móvil (*lo que se desplazaría*...) y el segundo (*lo que se desplaza*...)

Estos resultados ponen de manifiesto que la mayoría de los alumnos han comprendido el *proceso de cálculo* de la rapidez en cualquier instante.

Después de entregarles su actividad corregida, el profesor realiza los siguientes comentarios que son seguidos sin dificultad por todos los alumnos:

- el cálculo del límite de velocidades medias equivale a calcular la derivada de la posición, y por tanto pueden aplicar las reglas de derivación "sabiendo lo que están haciendo". El profesor insiste en distinguir entre el concepto ($de/\text{Ä}t$, o mejor: de/dt) y la forma de cálculo mediante "reglas de derivación".

- cuando el movimiento sea uniforme no es necesario usar el Cálculo diferencial para calcular la rapidez
- es importante incorporar explicaciones verbalizadas para interpretar el significado físico de los resultados

Ya sabemos resolver el problema de calcular la rapidez instantánea en t=0.8 s. Podemos utilizar el mismo procedimiento **para calcular la ecuación de la rapidez en cualquier instante: *t*.** Para ello, obtendremos la función: $\boldsymbol{v_m(t,\text{Ä}t)}$ y después calcularemos el límite cuando Ä*t* tiende a cero.

Posición de la bola en el instante *t*	$e(t) = 88t^2$
Posición de la bola un Ä*t* después	$e(t+\text{Ä}t) = 88(t+\text{Ä}t)^2 = 88t^2 + 88\text{Ä}t^2 + 176t\cdot\ \text{Ä}t$
Desplazamiento a partir de *t* durante ese Ä*t*	$\text{Ä}e = e(t+\text{Ä}t) - e(t) = 88\text{Ä}t^2 + 176t\cdot\ \text{Ä}t$
Rapidez media a partir de *t*, durante ese Ä*t*	$v_m(t,\text{Ä}t) = \text{Ä}e/\text{Ä}t = 88\text{Ä}t + 176t$
Rapidez en el instante *t*	$v(t) = \lim\limits_{\text{Ä}t \to 0} (88\text{Ä}t + 176t) = 176t$

Habrás reconocido ya que el proceso que hemos seguido para calcular la rapidez instantánea es precisamente el cálculo de la derivada de la posición respecto del tiempo: *e'*. Para no tener que hacer el proceso al límite en todas las ocasiones, puedes utilizar las reglas que ya conoces del cálculo de derivadas. En concreto, la que usaremos con más frecuencia es: si $f(z)=A\cdot\ z^m$, entonces $f'=A\cdot\ m\cdot\ z^{m-1}$.

El camino seguido para dar significado y calcular la rapidez en un instante ha sido un poco más largo de lo esperado; en ese camino **hemos inventado el concepto de diferencial y lo hemos relacionado con el concepto de derivada**. Para resumir lo que hemos hecho, y además generalizarlo a cualquier otro movimiento (y no sólo una bola que cae), te proponemos la siguiente actividad.

A10. *Imagina que conocemos ya la posición de un móvil en cualquier instante mediante una gráfica e-t y una ecuación e(t). Expresa con tus propias palabras qué se entiende por rapidez instantánea y cómo se puede obtener la ecuación de la rapidez en cualquier instante.*

Comentario A10:

Cuando se recoge a los alumnos, antes de la puesta en común, el 50% explica correctamente el concepto y el resto repite el enunciado: “rapidez instantánea es la rapidez que tiene en cada instante”. En cuanto a la forma de cálculo, todos explican correctamente el procedimiento como el cálculo del límite de rapideces medias que se reduce al cálculo de la derivada: *e*’.

Al final, el profesor entrega el siguiente guión para que elaboren un pequeño resumen y lo incluyan en su cuaderno para que sea corregido por el profesor:

1. Movimiento uniforme, es decir, con rapidez constante

- ¿Qué es la rapidez?
- ¿Cómo se calcula a partir de la ecuación: $e = e(0) + v \cdot t$?

2. Movimiento no uniforme, es decir, acelerado

- ¿Qué es la rapidez?
- ¿Cómo se calcula a partir de la ecuación: $e(t)$?

A11. *Hemos estudiado el movimiento de tres bolas distintas utilizando un mismo sistema de referencia, y después de analizar los datos experimentales hemos obtenido la siguiente ecuación para el movimiento de cada bola (S.I.):*

$e = 0.2t - 1$ $\qquad$ $e = 0.3t^2 + 2$ $\qquad$ $e = -9.6t + 0.4t^3$

a) *Explica las diferencias entre el movimiento de esas tres bolas*

b) *Calcula la ecuación de la rapidez de cada bola*

c) *Calcula la rapidez de cada bola cuando t=3 s, y explica el significado físico del resultado obtenido.*

d) *Calcula en cada caso el valor de Äe y de para t=3 s y Ät=5 s, y explica el significado físico del resultado obtenido.*

Comentario A11:

La mayoría de los alumnos distingue correctamente entre movimientos uniformes y no uniformes, aunque tienen más dificultad para explicar el último caso, como era de esperar. En la puesta en común se mejora la explicación haciendo marcas sobre la trayectoria en cada segundo, y construyendo la gráfica aproximada *e-t*.

Casi todos los alumnos calculan la ecuación de la rapidez en cada caso, aunque algunos no saben derivar la tercera ecuación. Calculan correctamente $v(3)$ y explican su significado; tan sólo es preciso volver a corregir algunas expresiones del tipo: “es la rapidez cuando t=3 s”, pidiendo que expliquen su significado físico.

El último apartado (d) es muy fructífero para insistir en que Ä*e* existe en cualquier movimiento, y para establecer su relación con de. Se hace necesaria la ayuda del profesor para contestar correctamente.

A12. *La ecuación de la posición de un cuerpo en cualquier instante es la siguiente:* $\boldsymbol{e=-30+4t^2}$ *Calcula la posición y rapidez del cuerpo en el instante $t=1.5$ s, y la rapidez cuando se encuentre a 6 m (hacia el lado positivo) del origen. Explica el significado físico de los resultados que obtengas.*

Comentario A12:

El 90% de los alumnos realiza los cálculos correctamente. El 60% explica correctamente sus resultados, mientras el 40% restante se resiste a verbalizar explicaciones y se limita a contestar: "es la rapidez cuando han pasado 1.5 s", "es la rapidez cuando está a 6 m del punto de referencia". De nuevo, este tipo de respuestas es corregida entre todos.

1.3. DETERMINACIÓN DE LA ACELERACIÓN[31] EN CADA INSTANTE

En este apartado queremos averiguar cuál es la aceleración de la bola en cada instante, y en qué instante tiene la bola una aceleración determinada. Expresaremos el resultado mediante una gráfica *a-t* o mediante una ecuación *a*(*t*), que obtendremos a partir de la ecuación: $\boldsymbol{v=176t}$. Pero antes de aprender a **calcular**, estudiaremos el **significado** de la aceleración en cada instante, partiendo del concepto de aceleración media. Por el camino, tendremos que recurrir de nuevo al concepto de diferencial, en este caso la diferencial de la rapidez: **d*v***

A13. *Calcula la aceleración media de la bola desde $t=0$ hasta $t=2$ s e interpreta el resultado obtenido. ¿Cuál crees que es la aceleración de la bola en el instante $t=0.8$ s? ¿Ha sido necesario, en este caso, hacer uso del Cálculo diferencial?*

Comentario A13:

Después de un breve intercambio de opiniones, todos los alumnos identifican la aceleración con el cambio de rapidez por unidad de tiempo. Les cuesta más trabajo traducir esta idea en el cálculo: Ä*v*/Ä*t*, pero una vez discutido todos parecen entenderlo. En la puesta en común se representa cada paso: *v*(0), *v*(2), Ä*v*... en la gráfica *v-t*, y se discute si el resultado es la aceleración media o la aceleración en cada instante. Todos reconocen sin dificultad que no ha sido necesario utilizar el Cálculo diferencial porque la rapidez cambia uniformemente, es decir, la aceleración es la misma durante todo el movimiento.

Los cálculos se repiten de forma inmediata, sin necesidad de trabajo en pequeños grupos, en los distintos ejemplos de ecuaciones y gráficas que les presenta el profesor. El hecho de haber introducido ya la relación: *v=e'*, lleva a algunos alumnos repetidores a sugerir el cálculo de la

[31] Como se recordará, la parte del tema de *Cinemática* que aquí se presenta se refiere al estudio de movimientos de trayectoria conocida. La aceleración que aquí se define puede denominarse: *aceleración sobre la trayectoria* o, directamente, *aceleración tangencial*; de hecho así lo hacemos en nuestras clases, pero lo hemos suprimido aquí para evitar arrastrar este adjetivo en todos los comentarios.

aceleración “derivando la velocidad”, aunque el profesor insiste en que, en los ejemplos citados, no resulta necesario.

A14. *Por un procedimiento todavía desconocido, hemos averiguado la aceleración de un cuerpo en el instante t=2 s, y el resultado es de 6 m/s/s. Discute el significado físico de ese valor. ¿Cuánto habrá cambiado la rapidez de ese cuerpo en un intervalo de 5 s a partir de ese instante?*

Comentario A14:

Todos los alumnos interpretan el significado y hacen los cálculos como si la aceleración fuese constante, aunque son pocos los que hacen explícita esa suposición. Al final de la puesta en común, reconocen que al precisar: “ Ä*v* si la aceleración se mantuviese constante”, están refiriéndose a: d*v*.

A partir de aquí, los alumnos aceptan con facilidad la posterior explicación del profesor. **Para la definición** de aceleración instantánea, se distingue entre el caso en que la aceleración es constante (de forma operativa: *a*=Ä*v*/Ä*t*) y el caso en que no es constante (de forma operativa: *a*=d*v*/d*t*). **Para calcular** la aceleración en este último caso, el profesor vuelve a recordar la necesidad de calcular el límite de la aceleración media... Los alumnos reconocen que el cálculo de ese límite es precisamente el cálculo de la derivada; se concluye entonces: *a*=*v’*.

Al proponerles la actividad siguiente, los alumnos preguntan de inmediato si pueden usar ya reglas de derivadas. El profesor les recomienda que usen esas reglas sólo si están seguros de lo que están haciendo.

A15. *En la* **A11** *se estudió el movimiento de tres bolas distintas. Calcula la aceleración de cada una en el instante t=0.9 s.*

Comentario A15:

Los alumnos, después de recordar las correspondientes ecuaciones: *v*(*t*), no tienen dificultades para calcular la aceleración en los dos primeros ejemplos: nula en el primero, constante en el segundo. Los que aplican ya reglas de derivación, hacen pronto los cálculos, aunque algunos tropiezan con una dificultad: calculan *v*(0.9) y después intentan derivar. Los que, a pesar de la explicación de la actividad anterior, intentan hacerlo *paso a paso* (cálculo de la aceleración media, cálculo del límite...) son más lentos, aunque al final reconocen todos la equivalencia de los dos *métodos*.

En la puesta en común, se escriben en cada caso las ecuaciones *e*(*t*), *v*(*t*) y *a*(*t*) y sus correspondientes gráficas, distinguiendo de nuevo en qué casos ha sido necesario usar el Cálculo diferencial.

A16. *La ecuación e(t) del movimiento de un cuerpo viene dada por la siguiente expresión:* $\boldsymbol{e=t^3+t+3}$ *(S.I.). Deduce la ecuación v(t) para ese movimiento. Calcula el valor de la aceleración instantánea en t=0,6 s y explica el significado físico de ese valor.*

Comentario A16:

De los 14 alumnos a los que se ha recogido al azar en la clase del *profesor investigador* esta actividad, todos hacen los cálculos correctamente (cinco siguen calculando la derivada como límite de velocidades medias...), y el 80% interpretan correctamente el significado del resultado obtenido para $a(0.6)$.

En la puesta en común se han representados las tres gráficas: *e-t*, *v-t* y *a-t*. Se han hecho cálculos para otros instantes, se han señalado esos resultados sobre las gráficas y se ha verbalizado su significado.

A17 (actividad de revisión/recapitulación). *Expresa con tus propias palabras qué se entiende por aceleración instantánea (para un movimiento cualquiera), y cómo puede calcularse a partir de la ecuación v(t) y de la gráfica v-t.*

Comentario A17:

Se ha recogido esta actividad, antes de la puesta en común, a 11 alumnos del grupo del *profesor investigador*. Estos son los resultados más llamativos: 10 explican correctamente el concepto, todos explican cómo calcular la aceleración instantánea a partir de la ecuación $v(t)$ (9 de ellos, detallan además el procedimiento *paso a paso*), y tan sólo tres explican el procedimiento de cálculo de la aceleración a partir de la gráfica *v-t*, señalando la pendiente (dv/dt) de la recta tangente.

El profesor recoge y amplía las aportaciones más importantes. Al final, entrega el siguiente guión para que elaboren un pequeño resumen y lo incluyan en su cuaderno:

1. Movimiento uniformemente acelerado, es decir, con aceleración constante:

- ¿Qué es la aceleración?
- ¿Cómo se calcula a partir de la ecuación: $v = v(0) + a\cdot t$?

2. Movimiento no uniformemente acelerado, es decir, con aceleración NO constante:

- ¿Qué es la aceleración?
- ¿Cómo se calcula a partir de la ecuación: $v(t)$?

Al final, el profesor generaliza, a través de distintos ejemplos que relacionan magnitudes físicas, la idea de cociente diferencial y su equivalencia con la derivada. Así, **en general**: ***df/dx* es** lo que cambiaría *f*, a partir de *x*, cada vez que *x* cambia una unidad, si ese cambio se produjese de manera uniforme. Ese cociente **se calcula**: $\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'$

A18. *El anuncio de un coche afirma: "De 30 a 120 km/h en 9.0 s", con aceleración constante ¿Cuál es el valor de esa aceleración?, ¿qué distancia habrá recorrido el coche durante esos 9 segundos?*

Comentario A18:

Existen tres tipos de alumnos según el cálculo realizado para el desplazamiento sobre la trayectoria:

1. Los que calculan de. Advierten que el resultado no es Δe, tan sólo una estimación.

2. Los que aplican fórmulas *memorizadas* (ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado estudiadas el curso anterior), o el teorema de Merton (calculan la velocidad promedio y multiplican por el tiempo).
3. Los que utilizan técnicas de *antiderivación*, inducidos por alumnos repetidores

En la puesta en común, no hay dificultad para comprender cualquiera de esas tres respuestas. El profesor advierte la mayor generalidad de la tercera frente a la segunda, y propone algún ejercicio de aplicación de aceleración no constante. Al cálculo de antiderivadas les llaman cálculo de integrales (mejor, si acaso, cálculo de primitivas); no obstante, reconocen que tan sólo aplican reglas inversas a la derivación, sin inventar ningún concepto. Hasta aquí, era el contenido básico relacionado con el Cálculo diferencial que pretendíamos alcanzar con el tema de Cinemática.

Comentario de los Anexos:

Los grupos experimentales del *profesor investigador* fueron un poco más allá, analizando con detalle la primera respuesta. En ocasiones, los propios alumnos sugieren mejorar la aproximación suponiendo constante la rapidez durante cada segundo; en otros casos, lo propone el profesor. Después de realizar los primeros cálculos, se les entrega el **Anexo I de Cinemática** (cap. 8, pp. 271-274), y se va leyendo entre todos sin dificultad. Cuando se les entrega para casa el ejercicio del final de ese Anexo, se les insiste en la necesidad de realizar cálculo numérico.

Al comenzar la segunda clase, se anotan en una tabla en la pizarra los resultados obtenidos por distintos alumnos según el número de subintervalos que han elegido (o el tamaño de los mismos). Algunos comentan en voz alta que se obtiene una serie numérica que se acercará cada vez más al resultado.

El profesor resume mediante una expresión sumatoria en función de *N* todos los resultados y deja abierta la duda: **¿será exacto el resultado cuando *N* tiende a infinito?, ¿llegará a ser cero la suma de un número cada vez mayor de errores cada vez más pequeños?** El profesor *bautiza* al concepto inventado como integral, destacando que no coincide con ninguna de las sumas o términos de la serie.

En general, no se puede ir más allá de la introducción de este concepto, pues un buen número de alumnos empieza a tener dificultad con las expresiones matemáticas utilizadas. Al menos, la mayoría es capaz de seguir sin dificultad la construcción del concepto y la duda planteada. En este punto, el profesor asegura que el error se hace cero, y que la forma de calcularla es precisamente *antiderivando*, tal como se había hecho en el tercer tipo de respuesta.

Para los alumnos más interesados, el profesor entrega el **Anexo II de Cinemática** (cap. 8, pp. 275-276) donde se relaciona el error nulo con el cálculo de antiderivadas (Teorema Fundamental); son muy pocos los alumnos que, de forma individual, comentan en los días siguientes ese segundo Anexo con el profesor. El profesor investigador y los profesores formados, al poner en común el diario de sus clases, consideran que, dado el curriculum de Física y Química de 3º BUP, es mejor dejar el tratamiento preciso y completo del problema para el curso siguiente. Por tanto, las ideas contenidas en este Anexo serán desarrolladas en el curso siguiente.

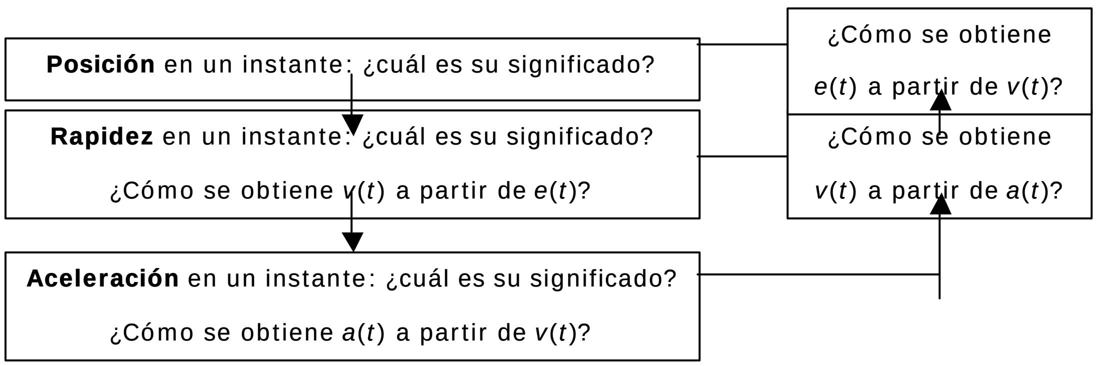
Incluso, alguno de los *profesores formados* se muestra partidario de limitarse en el Bachillarato y/o COU a usar derivadas y antiderivadas, sin necesidad de enseñar el concepto de integral (definida) y el Teorema Fundamental. En su opinión, una vez escrita la expresión diferencial, se despeja el cociente diferencial y se iguala a la derivada, procediendo a partir de aquí con el cálculo de antiderivadas.

Esa opinión no es compartida por el *profesor investigador*, pues el tratamiento completo y preciso del problema y la estrategia del Cálculo permitirá valorar y comprender mejor todo su sentido. En particular, sólo de esa manera se podrá justificar y comprender la razón por la cual el cociente diferencial debe ser igual a la derivada, más allá de una mera definición.

Para describir con precisión el movimiento de un cuerpo, ha sido necesario ampliar los conceptos de rapidez media durante un intervalo y aceleración media durante un intervalo, lo que nos ha llevado a inventar dos conceptos nuevos: rapidez y aceleración en un instante. Pero no sólo hemos inventado esos conceptos, sino que hemos aprendido a relacionar las ecuaciones de la posición, rapidez y aceleración en cualquier instante. A modo de recapitulación, realiza la siguiente actividad.

A19. *Realiza una recapitulación parcial de lo que hemos avanzado en la solución de nuestro problema general. Te puede servir de ayuda el siguiente esquema.*

MOVIMIENTOS DE TRAYECTORIA CONOCIDA



Comentario A19:

La realización de esta actividad ha permitido aclarar las ideas que se habían trabajado. El profesor ha aprovechado, además, para relacionar en la medida de lo posible con lo que han estudiado en Matemáticas, recordando las reglas básicas de derivación e integración (*antiderivación*).

¿CÓMO SE CALCULA LA VARIACIÓN DE ENERGÍA POTENCIAL CUANDO LA FUERZA INTERIOR CONSERVATIVA NO ES CONSTANTE?

COU

Debe recordarse la **contextualización de las actividades dentro del tema** (cap. 8, pp. 279-280). En particular, en las actividades previas se ha utilizado la expresión Ä$Ep_{grav}=m\cdot g\cdot$ Äh para realizar cálculo numérico en distintos ejercicios y problemas.

En el caso de un desplazamiento desde la superficie hasta 200 m de altura, cuando el profesor ha insistido en el valor constante de la fuerza peso, unos pocos alumnos han recordado la ley de gravitación universal. No obstante, el resto de la clase los ha convencido como si la constancia del peso fuese una evidencia en una altura tan pequeña (ponen, como ejemplo, lo que sucede en la cima de una pequeña montaña), no siendo necesario realizar cálculo numérico. De todas formas, el profesor ha mostrado con un dibujo que esos 200 m resultan despreciables frente al radio de la Tierra. En esta discusión algún alumno ha preguntado qué ocurriría si el desplazamiento hubiese sido mayor, y la fuerza peso no hubiese sido constante, pero no ha sido asumido como problema por el grupo. El profesor da paso entonces a la siguiente actividad.

A1. *Calcula la variación de energía potencial gravitatoria del cuerpo de la actividad anterior cuando se desplaza 2000 km hacia arriba en la dirección vertical.*

Comentario A1:

Todos los alumnos realizan el cálculo suponiendo la fuerza constante de –29.4 N durante el desplazamiento. Cuando el profesor les pide calcular la fuerza de atracción gravitatoria a 2000 km de altura y comprueban que se reduce casi a la mitad (17.0 N), algunos critican de inmediato el resultado obtenido anteriormente. Para convencer a todos, el profesor escribe la expresión $F\cdot$ Är, y pregunta: ¿qué valor de F tomamos si va cambiando en ese Är? Para los más reticentes, les propone esperar a la siguiente actividad para comprobar que la expresión operativa que ellos conocen del trabajo no puede utilizarse cuando la fuerza no es constante.

Algunos alumnos han comentado durante la discusión que han calculado la diferencial, pues han *supuesto* que la F es constante; estas intervenciones, y las aclaraciones del profesor, lleva a todos a reconocer que han realizado una estimación. El profesor recuerda entonces el significado que ya han estudiado de la diferencial, y destaca la causa que ha obligado a usarla.

La propuesta de algunos alumnos de calcular el trabajo tomando la fuerza a 2000 km de altura, sirve al profesor para resaltar la existencia de un error cuando se mantiene la fuerza constante (ÄEp-dEp), y advertir que en la expresión diferencial se toma el valor de la fuerza al principio del intervalo (lo que se justificará más tarde al tomar cada vez intervalos más pequeños). En este caso concreto: ÄEp<dEp, y por tanto el error es negativo.

A2. *Haz una estimación del* Ä*Ep gravitatoria cuando el cuerpo de la actividad anterior se desplaza "en dos etapas": 1000 km en la primera y otros 1000 km en la segunda.*

Comentario A2:

La mayoría de los alumnos realiza los cálculos sin dificultad. Durante la puesta en común se discute el significado físico de cada uno de ellos en términos de estimación, y se reconoce que el error cometido en cada estimación es menor. El profesor aprovecha para destacar el carácter funcional de la diferencial, y para advertir que también hemos cometido un error, aunque menor, al calcular cada d*Ep*.

Para los alumnos con mayores dificultades, el profesor insiste en que el resultado al hacer los cálculos "en dos etapas" es distinto del resultado cuando se hace "en una sola etapa", lo que pone de manifiesto que el trabajo realizado no puede calcularse realmente escribiendo el valor inicial de la fuerza. Al sumar los dos valores de d*Ep* que han obtenido, todos reconocen que el error cometido es ahora menor (aunque suman dos términos), que nos hemos acercado más al valor de Ä*Ep* que buscamos.

De inmediato, muchos proponen dividir los 2000 km en un número mayor de "etapas" o subintervalos, aunque son contestados por otros: "siempre cometerás un error", "así nunca se acabaría pues siempre se puede seguir aumentando el número de divisiones".

El profesor propone aplazar la discusión para más tarde, y realizar cálculos concretos ya que, aunque no podamos llegar al valor exacto de Ä*Ep*, al menos podemos acercarnos mucho más. Al realizar los cálculos por grupos, el resultado más aproximado se ha obtenido dividiendo el desplazamiento de 2000 km en diez intervalos de 200 km (se sigue apreciando que la fuerza gravitatoria disminuye de forma apreciable: de dos en dos newton al principio y de uno en uno al final).

A3. *Un alumno afirma que* Ä*Ep y* d*Ep coincidirán cuando el desplazamiento* Ä*r sea muy pequeño. Discute con tus compañeros si estás de acuerdo o no con esa afirmación.*

Comentario A3:

En la puesta en común de la actividad anterior ya habían discutido esta cuestión. Todos los alumnos señalan que nunca coincidirán Ä*Ep* y d*Ep*, aunque son muchos los que comentan que cada vez se hará más pequeño; "pero seguirán sin coincidir", insisten otros. Se establece así una conciencia crítica en el grupo: todos quieren creer que al final llegarán a coincidir, pero cuando se expresa en voz alta surge la advertencia en sentido contrario. El profesor aprovecha estos comentarios para recordar el concepto de límite: aunque siempre se comete un error, podría ser que el límite de ese error sea cero cuando el tamaño del desplazamiento tienda a cero.

Durante la discusión, el profesor ha comentado también que Ä*Ep* y d*Ep* coincidirán cuando realmente la fuerza sea constante durante el desplazamiento, pero en este caso sería inútil recurrir al concepto de diferencial (refuerza así la justificación que ha obligado a utilizar la diferencial).

Algunos alumnos han comentado que, entonces, todos los cálculos realizados usando la fórmula: $m\cdot g\cdot h$ son también aproximados, "son también diferenciales" dicen ellos. El profesor reconoce que realmente es así, que en lugar de calcular Ä*Ep* habíamos calculado también en esos casos d*Ep*. Por tanto, el resultado que obtengamos a nuestro problema también debe aplicarse a los casos en que antes usábamos esa fórmula "equivocada". El profesor propone aplazar esta cuestión para discutir en alguna actividad posterior.

A4. *Un alumno afirma que, dividiendo el desplazamiento de 2000 km en N subintervalos, nunca podrá alcanzarse el valor exacto de* Ä*Ep, por muy grande que sea N. Discute con tus compañeros si estás de acuerdo o no con esa afirmación.*

Comentario A4:

Esta idea ya había sido adelantada en clase, y había sido criticada. Los alumnos coinciden en que no se puede obtener así el Ä*Ep* buscado.

El profesor trata de introducir una duda. Recuerda que en la actividad anterior se había establecido que (Ä*Ep*-d*Ep*) nunca era cero, pero sí lo era su límite cuando el desplazamiento tiende a cero.

"¿No puede ocurrir aquí lo mismo, haciendo que *N* tienda a infinito?" Esta posibilidad es admitida por la mayoría de los alumnos, pero tienen grandes dificultades para expresar con lenguaje matemático esta idea.

El profesor escribe verbalmente en la pizarra las expectativas de llegar a obtener el resultado exacto de Ä*Ep*, y después asume el papel protagonista para tratar de expresarlo matemáticamente, tal como se ha explicado en el comentario de esta actividad en el capítulo 8 (p. 283). La mayor dificultad de los alumnos consiste en comprender el símbolo "sumatorio"; dado que crea más obstáculo que ayuda, el profesor opta por evitarlo, escribiendo siempre los sumandos iniciales seguidos de puntos suspensivos hasta el término enésimo.

Al introducir el concepto de integral, muchos alumnos lo relacionan con el cálculo de primitivas. No obstante, al no aparecer en el integrando ninguna función para hallar la antiderivada, no se deciden por aplicar reglas. La conclusión final de esta actividad queda planteada de la siguiente forma:

para que: $\int_{6.37\cdot 10^6}^{8.37\cdot 10^6} dEp = \text{Ä}Ep$, debe cumplirse que: $\lim\limits_{\text{Ä}r \to 0} \dfrac{\text{Ä}Ep - dEp}{\text{Ä}r} = 0 \quad (\forall\, r)$

Debemos recordar el significado de la expresión diferencial: **d*Ep*=-*F*** $\boldsymbol{dEp = -F_r \cdot dr}$ **Es una estimación del Ä*Ep*, a partir de *r* y para un Ä*r* (=d*r*), que consiste en suponer que la fuerza es constante en ese Ä*r***. Lógicamente, la pendiente de esa estimación lineal (d*Ep*/d*r*) es constante y coincide con el valor de F_r en cada *r*.

Debes recordar, además, que el límite de una diferencia es igual que la diferencia de los límites: *lím*(*F*–*G*) = *lím F* - *lím G*

A5. *De acuerdo con las ideas que se acaban de recordar, ¿qué condición debe cumplirse para que el valor obtenido mediante la integral definida sea el valor exacto de* Ä*Ep?*

Comentario A5:

Aunque escriben (correctamente) la condición que debe cumplirse de la siguiente forma: $\lim\limits_{\text{Ä}r \to 0} \dfrac{\text{Ä}Ep}{\text{Ä}r} = \lim\limits_{\text{Ä}r \to 0} \dfrac{dEp}{\text{Ä}r}$, es necesaria la ayuda del profesor: en primer lugar, para reconocer que el primer miembro es la definición de la derivada, que ellos simbolizan: *Ep'* (es necesario recordar las *distintas* expresiones que han utilizado en Matemáticas), y en segundo lugar para reconocer que el segundo miembro es la pendiente de la estimación diferencial, que es la misma sea cual sea el Ä*r* o d*r*.

Se llega a la conclusión de que la condición que debe cumplirse es que d*Ep*/d*r* sea igual a *Ep'*. En ese momento, el profesor tiene que volver a recordar la expresión diferencial de partida, y la ley de gravitación universal ($F = -G \cdot M_T \cdot m_c / r^2$).

Es imprescindible la intervención casi continuada del profesor, aunque es cierto que se ha creado un ambiente de interés y expectativa. Al final, cuando reconocen que tienen que aplicar el cálculo de antiderivadas o primitivas se sienten un poco defraudados, pues recuerdan que durante la discusión ya lo había dicho más de uno.

Es necesario entonces que el profesor recapitule, advirtiendo que, efectivamente, podíamos haber acabado mucho antes, pero no habríamos sabido por qué la integral (*sumas de Riemann*) se calculaba mediante la antiderivada. La fijación de los alumnos en los aspectos mecánicos del Cálculo les lleva a no valorar suficientemente los aspectos de comprensión.

El cálculo de la antiderivada no presenta dificultades, tan sólo en relación con el significado de la constante de integración. Teniendo en cuenta el *cansancio mental* de los alumnos, el profesor no se detiene mucho en esta cuestión, tan sólo señala que su valor no afecta al cálculo de Ä*Ep* en el desplazamiento de 2000 km.

Al final, el profesor introduce la siguiente actividad, para realizar en la siguiente clase: "ya sabemos calcular el Ä*Ep* para un caso concreto, pero buscamos ahora una expresión general para cualquier Ä*r*".

A6. *Deduce una expresión general para calcular el* ÄEp_{grav} *cuando un cuerpo de masa* m_c, *se aleja de un planeta desde un punto* **A** *hasta otro* **B**.

Comentario A6:

Todos los alumnos llega a escribir la expresión diferencial, que el profesor completa utilizando la ley de gravitación universal: $dEp = -F \cdot dr = \frac{GM_p \cdot m_c}{r^2} \cdot dr$ A partir de aquí, ya algunos quieren calcular antiderivadas, aunque todavía no tienen muy claro de qué función. El profesor les entrega el guión que se había previsto para la realización de esta actividad (cap. 8, p. 285).

De nuevo, las mayores dificultades se encuentran en el uso del lenguaje matemático. Con la ayuda del profesor, esta vez con mayor fluidez que en la actividad anterior, se llega a la siguiente conclusión:

para que: $\int_{r=r_A}^{r=r_B} dEp = \text{Ä}Ep = Ep_{r=r_B} - Ep_{r=r_A}$, debe cumplirse que: $Ep' = \frac{dEp}{dr} = \frac{G \cdot M_P \cdot m_c}{r^2}$

A partir de aquí, vuelven a utilizar sus conocimientos sobre cálculo de primitivas para llegar a la expresión buscada más la constante de integración, que el profesor hace cero para que la *Ep* en el *infinito* sea cero: $Ep = -\frac{G \cdot M_P \cdot m_c}{r}$ El resto de la discusión se centra en el análisis físico, en especial en el signo negativo.

Al final, el profesor propone valores numéricos concretos para comprobar que, en el caso del sistema formado por el cuerpo y el planeta Tierra, la expresión Ä *Ep*=*m*· *g*· Ä*h* conduce prácticamente a los mismo resultados cuando *h* es pequeña y Ä*h* también, dando así respuesta a una cuestión que había quedado aplazada en la discusión de una actividad anterior.

ABSORCIÓN DE UNA ONDA

COU

Debe recordarse la **contextualización de las actividades dentro del tema** (cap. 8, p. 289).

En ocasiones, la disminución de intensidad de una onda no sólo puede atribuirse al efecto de atenuación, es decir, a una mayor distancia al foco emisor. Por ejemplo:

- La intensidad del sonido emitido por un altavoz no es la misma cuando estamos en la misma habitación que el altavoz que cuando estamos en otra habitación distinta, aunque en ambos casos estemos situados a la misma distancia del altavoz.
- La intensidad de la luz que nos llega del faro es menor los días de niebla, a pesar de que estamos siempre a la misma distancia y la potencia de emisión del faro es siempre la misma.

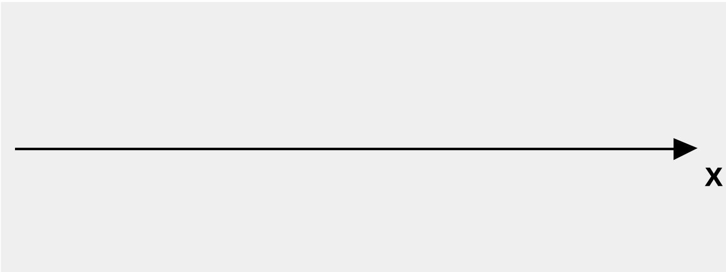
A1. *Intenta explicar las razones por las cuales disminuye la intensidad de la onda en los ejemplos que se acaban de citar.*

Comentario A1:

Los argumentos de los alumnos son muy ricos conceptualmente, y se refieren a distintas causas más allá de la atenuación: se produce un reparto de energía entre la onda reflejada y la transmitida al pasar del aire al muro y después del muro al aire; se produce un efecto de dispersión de la luz por las moléculas de aire, disminuyendo la energía transmitida en una determinada dirección. El profesor anota las posibles causas y va estableciendo condiciones para que no aparezcan cada una de ellas; al final, reconocen que el medio puede absorber energía que no transmite, aunque los alumnos intentan encontrar el mecanismo por el que sucede ese hecho, y por eso buscan explicaciones *microscópicas*.

Una vez reconocida la existencia de distintas causas, el profesor advierte que nos vamos a ocupar en las siguientes actividades exclusivamente del efecto de absorción, eliminando las restantes. El párrafo explicativo que habíamos incluido a continuación en el programa de actividades queda justificado, pero resulta insuficiente pues durante la discusión los alumnos han señalado más causas, además de la atenuación y la absorción. El profesor se encarga entonces de añadir condiciones suplementarias: es un medio homogéneo (no hay cambio de velocidad de propagación) en el que no se produce dispersión.

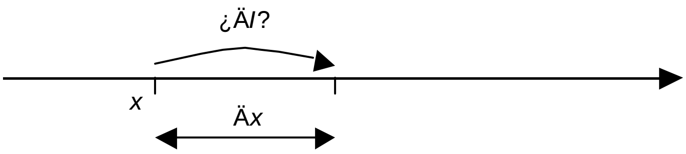
En general, la disminución de la intensidad es debida tanto a la atenuación como a la **absorción del medio**. Para centrar nuestra atención en el fenómeno de absorción, eliminaremos el efecto de la atenuación suponiendo una *onda plana* que se propaga en la dirección del eje X.



A2. *¿De qué crees que va a depender la disminución de intensidad de una onda al pasar de un punto a otro de un mismo medio? Adelanta una expresión que relacione el ÄI para un Äx dado. Representa la gráfica I-x correspondiente.*

Comentario A2:

Al leer el enunciado de la actividad, el profesor señala un punto del eje X, le asigna un valor *I* a la intensidad, y señala un Ä*x* poniendo entre interrogantes: ¿Ä*I*? Ante las preguntas de los alumnos, establece que la onda se propaga en el sentido positivo del eje X.

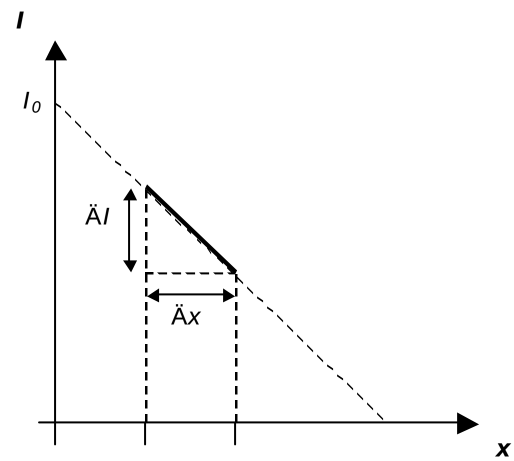


Todos los alumnos citan la influencia de Ä*x* y las características del medio (que el profesor incluye en el coeficiente: á, sin precisar su significado ni unidades), en ambos casos creciente. Escriben la expresión: Ä*I*=á· Ä*x*, y el profesor llama la atención sobre el signo de Ä*I*.

Algunos alumnos buscan en la puesta en común la influencia de otras variables: velocidad de propagación, tiempo que tarda en recorrer ese Ä*x*... variables que, al depender del medio, el profesor supone contenidas en á, sin entrar en la discusión. Algunos alumnos se refieren a otras dos variables: la potencia de emisión de la onda, y la distancia al foco (implícitamente se están refiriendo al valor de *I* al comienzo del intervalo); ante las dificultades de estos alumnos para justificar la importancia de estas dos variables, y la resistencia del resto de compañeros, el profesor deja esta influencia entre interrogantes, para ser analizada después.

Cuando el profesor les muestra otras posibles expresiones compatibles con el análisis cualitativo, ellos enuncian otras alternativas. Algunas las rechazan (por ejemplo: Ä*I*=á^{Äx}) porque no se ajustan a las condiciones límite (si Ä*x*=0, debe ser Ä*I*=0). Al final, reconocen que se quedan con la primera expresión que han escrito porque es la más sencilla de todas. En ese momento, se representa gráficamente en el sistema de coordenadas *I*-*x*, identificando: Ä*I*, Ä*x*, á (pendiente), y repitiendo para Ä*x* consecutivos hasta obtener una recta:

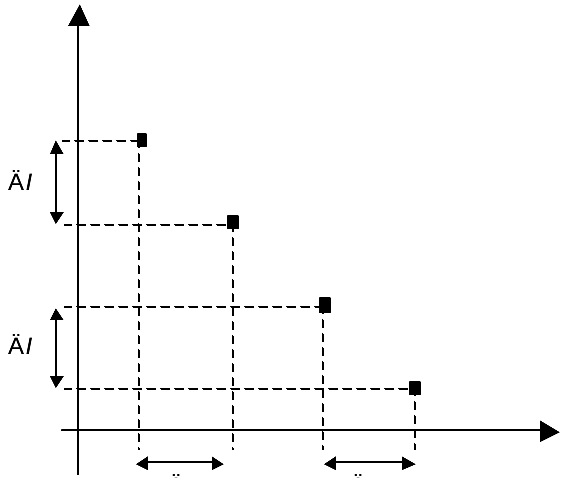
El profesor reconoce la importancia del criterio de sencillez, pero advierte que la expresión debe ser considerada como hipótesis, que debe ser contrastada experimentalmente. Justifica así la realización de la siguiente actividad.



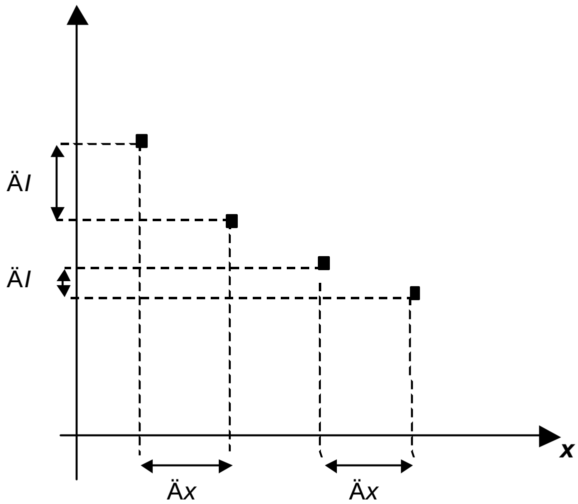
A3. *Imaginad un diseño experimental para probar la hipótesis anterior.*

Comentario A3:

Los alumnos proponen medir la intensidad en distintos puntos, y centran su discusión en la técnica de medida. El profesor propone utilizar medidas indirectas, como por ejemplo el ennegrecimiento de placas fotográficas (directamente proporcional al valor de la intensidad), y recuerda la existencia de un fotómetro en cualquier cámara fotográfica. El profesor sugiere tomar medidas a intervalos regulares, y les pide que adelanten una gráfica con los resultados esperados. Al final, se representa en la pizarra:



A4. *Experimentalmente, se han obtenido los valores de I que se representan en la siguiente gráfica.*



A la luz de estos resultados, introducid las modificaciones oportunas en la hipótesis sobre la relación de ÄI con Äx

Comentario A4:

Los alumnos reconocen de inmediato que estos resultados no se ajustan a lo que ellos esperaban. Sus preguntas reflejan que han comprendido el significado de los resultados experimentales que se han obtenido. Por ejemplo: "¿no habíamos dicho que á sólo depende del medio, y no de *x*?" (han identificado á con la pendiente del trozo de recta: -Ä*I*/Ä*x*), "¿entonces la intensidad nunca se haría cero?".

En la respuesta a esa segunda pregunta se discute el concepto de límite: en la situación ideal que estamos estudiando *I* nunca se haría cero, pero el límite de *I* cuando *x* tiende a infinito sí sería cero (*I* se acerca a cero más que cualquier número pequeño que tomemos, con tal de hacer *x* suficientemente grande).

Algún alumno pretende adelantar directamente *I*(*x*) de acuerdo con la curva que se deduce de esos puntos experimentales, pues dice que "le recuerda a una 'parábola' o una 'hipérbola'". El profesor le hace ver que es un camino con muchas posibilidades de error: es preferible centrarse lo que ocurre en un Ä*x* cualquiera, y eso nos permitirá encontrar la función que él busca.

El profesor resume el análisis cualitativo realizado en **A2**: |Ä*I*| es creciente con Ä*x* y con á, haciendo ver que sigue siendo válido pero es necesario completarlo e introducir cambios en la expresión. Pensando quizás en la influencia (que ya habían sugerido anteriormente) de la distancia al foco, algunos sugieren: Ä*I*=-á· Ä*x*/*x*. Es bien aceptada, pero el profesor propone estudiar casos límite (falla en *x*=0). Otros alumnos, en mayor número, sugieren introducir el valor de *I* en el numerador: Ä*I*=-á· *I*· Ä*x*, siendo compatible con el análisis cualitativo y con los casos límite. Además, les parece la más sencilla, a pesar de que admiten que hay otras candidatas (que les muestra el profesor); se trata entonces de una nueva hipótesis.

Algunos alumnos comentan que la nueva expresión es también lineal respecto al Ä*x*, igual que la primera, y es posible que tampoco sirva. El profesor explica sobre la gráfica que la pendiente es cada vez más pequeña conforme *I* disminuye. Otro alumno advierte: ¿y si el resultado de |Ä*I*| es mayor que *I*? El profesor aprovecha para resaltar que es una estimación, aunque los alumnos no lo reconocen.

El profesor propone cálculo numérico con datos concretos, para Ä*x*=40 cm, y después les pide hacer lo mismo por etapas de 10 en 10 cm. Al terminar esos cálculos, admiten la dificultad: ¿qué valor de *I* debe tomarse si es variable a lo largo de ese Ä*x*? La estimación consiste en tomar la *I* del principio, reconociendo entonces que se trata de la diferencial: d*I*=-á· *I*· d*x*.

El profesor propone datos concretos para calcular las correspondientes d*I*, interpretar el significado físico del resultado y comparar |Ä*I*| con |d*I*|. Se aprecia la existencia de un error (Ä*I*-d*I*) que es más pequeño cuanto menor sea Ä*x*.

A partir de aquí, todos se plantean ya subdividir el intervalo sabiendo que les va a conducir hasta la integral correspondiente. Algún alumno sugiere que se puede pasar d*x* al otro miembro, y obtener así la derivada. El profesor propone realizar la siguiente actividad para justificar esa relación.

A5. *A partir de la expresión diferencial que has adelantado en la actividad anterior, intenta deducir una expresión para la función I(x).*

Comentario A5:

El profesor recapitula después de leer el enunciado, destacando la expresión diferencial adelantada como hipótesis. Los alumnos se proponen realizar cálculo numérico, pero el profesor les sugiere que intenten escribir en lenguaje matemático lo que harían para obtener un resultado más aproximado al Ä*I* buscado.

A los alumnos con más dificultades, el profesor les ayuda para el caso más sencillo: dividir el Ä*x* en dos trozos, escribiendo el Ä*I* aproximado como suma de dos dI_i, y junto a esa expresión la del error cometido: 2· (Ä*I*-d*I*). Les pide a esos alumnos que repitan la expresión para el caso en que Ä*x* se divida en cinco intervalos, y al final el profesor generaliza para *N* divisiones del Ä*x* utilizando símbolo sumatorio. A esta conclusión (sin utilizar sumatorios) habían llegado ya otros alumnos por sí solos.

Como había ocurrido otras veces, la mayoría de los alumnos tienen dificultades para utilizar con autonomía ese nuevo lenguaje. Los pasos restantes de la estrategia del Cálculo los tiene que realizar el profesor, esperando en cada paso la aprobación de los alumnos: plantea la posibilidad de que el error se haga cero en el límite cuando *N* tiende a infinito (cuando cada Ä*x* tiende a cero), deduce la necesidad de que el cociente diferencial coincida con la derivada, y resume la conclusión utilizando el concepto de integral y el Teorema Fundamental.

En lugar de aplicar reglas de cálculo de primitivas (antiderivadas), el profesor sugiere buscar "por tanteo" (ya han estudiado en Matemáticas la función exponencial) una expresión que cumpla: *I'*=-á· *I* Tras algunas pruebas fallidas, algunos alumnos proponen la función exponencial, y con la ayuda del profesor concluyen: $I=I_0$· $e^{-á· x}$

El profesor recuerda que la expresión diferencial de partida (d*I*=-á· *I*· d*x*) era una hipótesis, la más sencilla entre otras expresiones posibles. Los alumnos se encargan de comprobar que la expresión obtenida es coherente con el análisis cualitativo y el comportamiento experimental, y el profesor advierte que su validación definitiva se obtendrá por su coherencia con nuevas experiencias, por su acierto para predecir nuevas situaciones, y por su ajuste con otras ideas (como por ejemplo, la explicación del mecanismo microscópico por el que se produce la absorción).

Hemos recogido hasta aquí, a grandes rasgos, las intervenciones, argumentos y dificultades de los alumnos cuando se enfrentan con las actividades que hemos preparado. Las dificultades que aparecen son las naturales y habituales cuando se están formando nuevos conceptos con la participación de los alumnos, según nuestra experiencia como profesores, y son indicadoras de que se está actuando dentro de la "zona de desarrollo potencial" de los alumnos.

Las intervenciones descritas muestran con claridad que se están proporcionando oportunidades adecuadas para que los alumnos aprendan, pues se produce un alto nivel de implicación e interés, y su participación hace que las aportaciones del profesor constituyan una respuesta a una necesidad sentida.

Pasamos a mostrar ahora que estos alumnos han comprendido mejor el uso del Cálculo diferencial en la Física que los alumnos que no han seguido nuestra propuesta, y que desarrollan actitudes más positivas hacia el papel de los conceptos diferenciales en la enseñanza/aprendizaje de la Física.

9.2. LOS PROGRAMAS DE ACTIVIDADES CONSIGUEN QUE LOS ALUMNOS MEJOREN SU COMPRENSIÓN Y ACTITUD HACIA EL USO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LA FÍSICA

Para comprobar que se ha producido una mejora significativa de todos los indicadores de una adecuada comprensión de la diferencial en la Física (cap. 2, p. 81), hemos empleado los instrumentos indicados en la tabla 8.II, en el momento que allí se indica (cap. 8, p. 297). En concreto, hemos pasado la cuestión C4e-p (Teorema Fundamental) y el problema P1e a los estudiantes de *segundo curso* experimental (COU), todos alumnos del *profesor investigador*, y las restantes cuestiones han sido pasadas a distintos estudiantes de los grupos experimentales de 3º BUP (del *profesor investigador* y de *profesores formados*). Unos pocos alumnos de 3º BUP del *profesor investigador* han sido, además, entrevistados siguiendo un guión previamente establecido (cap. 4, p. 158).

En total, han participado en la contrastación experimental de este consecuencia, contestando a una o varias cuestiones, un total de 211 alumnos de grupos experimentales, distribuidos de la siguiente forma: 112 alumnos pertenecientes a tres grupos de 3º BUP del *profesor investigador*, 81 alumnos pertenecientes a tres grupos de 3º BUP de *profesores formados* y 18 alumnos de un mismo grupo de *segundo curso* experimental (COU) del *profesor investigador*. Conviene advertir que estas cifras se refieren al número total de alumnos implicados, pero no coinciden con el tamaño de la muestra que ha contestado a cada pregunta, pues no se han pasado todas las cuestiones a todos los alumnos.

Se presentarán por separado los resultados de los alumnos de grupos experimentales del *profesor investigador* y los de *profesores formados*, y serán comparados con los resultados de los alumnos de nueve grupos de control de COU (un total de 270 alumnos). Para decidir si existen o no diferencias significativas entre cada grupo experimental y el grupo de control, utilizaremos el parámetro estadístico *t de Student* cuando se trata de porcentajes y el estadístico $\div^{2}$ cuando se trata de una pregunta con varias respuestas posibles, en los dos casos para el nivel de confianza habitual del 5% o menor

En lugar de presentar los resultados obtenidos con cada instrumento de manera separada, los agruparemos en torno a cada uno de los indicadores de una adecuada comprensión de la diferencial en la Física, independientemente de cómo hayan sido obtenidos, tal como hicimos al presentar los resultados de nuestra primera hipótesis (cap. 5, pp. 174 y ss.). Los resultados de la entrevista se utilizarán para ilustrar nuestra interpretación de las respuestas obtenidas por escrito.

Para valorar e interpretar en su justa medida los resultados, debe tenerse en cuenta que tanto los grupos experimentales como los de control pertenecen a cursos en los que se produce la iniciación al Cálculo; no obstante, en el caso de los experimentales casi todos los resultados han sido obtenidos en 3º BUP, a mitad de curso (la parte de Física se empezó en el segundo cuatrimestre), mientras los de grupos de control son del nivel de COU y contestan a final de curso. Esta diferencia es claramente desfavorable para nuestra hipótesis, pues los alumnos de grupos de control han tratado durante más tiempo los conceptos matemáticos y físicos de las situaciones que se les plantean.

No debe extrañar que las respuestas de los alumnos de grupos experimentales de 3º BUP se encuentren todavía lejos de lo que cabría esperar después de un uso reiterado de la *nueva* propuesta; no obstante, las diferencias con respecto a los grupos de control deben mostrar una determinada orientación: si ya en estos cursos se aprecian diferencias significativas, cabe esperar que una enseñanza basada en la *nueva* propuesta acabe produciendo unos resultados cada vez mejores en términos absolutos, y con diferencias cada vez mayores con los alumnos de grupos de control. Un indicador de estas expectativas positivas lo constituirán los resultados de los alumnos de *segundo curso* experimental, a pesar de tratarse de una muestra reducida.

9.2.1. Análisis comparativo de resultados sobre la justificación de la necesidad de usar la diferencial

En la tabla 9.I se presentan los resultados del problema y las cuestiones que guardan relación con la justificación del uso de la diferencial en situaciones físicas concretas.

TABLA 9.I. Respuestas relacionadas con la justificación de la necesidad de usar la diferencial	**Gr. Control** **%** (sd)	**Gr. Exptal.** ***P. investig.*** **%** (sd)	**Gr. Exptal.** ***P. formado*** **%** (sd)
C1e-p: La causa que justifica con mayor precisión el paso de Ä*v*=*a*· Ä*t* a la expresión: d*v*=*a*· d*t* es:	COU (N=149)	3º BUP (N=103)	3º BUP (N=68)
Porque la aceleración depende del tiempo	10.7 (2.5)	33.0 (4.7)	25.0 (5.3)
¿Diferencia significativa?		**SÍ**	**SÍ**
C5e: Ante distintas ecuaciones del movimiento, consideran *imprescindible* usar el Cálculo diferencial para calcular la rapidez instantánea:	COU (N=117)	3º BUP (N=112)	3º BUP (N=81)
Distinguen correctamente entre ecuaciones lineales y no lineales en casos sencillos	16.2 (3.4)	63.4 (4.6)	23.5 (4.7)
¿Diferencia significativa?		**SÍ**	**NO**
P1e: Cuando resuelven problemas...	COU (N=57)	COU (N=18)	
Utilizan el Cálculo diferencial	19.3 (5.3)	88.9 (7.6)	
¿Diferencia significativa?		**SÍ**	
Intentan justificar la necesidad de usarlo	1.8 (1.8)	83.3 (9.0)	
¿Diferencia significativa?		**SÍ**	
Lo justifican correctamente	1.8 (1.8)	83.3 (9.0)	
¿Diferencia significativa?		**SÍ**	

En todas las respuestas, menos una, existen diferencias significativas favorables a los grupos experimentales; como era de esperar, las diferencias son más acusadas para los grupos experimentales del *profesor investigador*, a pesar del contexto socioeconómico al que pertenece el alumnado, y mayores aún para los estudiantes de *segundo curso* experimental. Interpretamos estas diferencias como una muestra de la mejora que el uso de la nueva propuesta produce en la comprensión de las causas que obligan a recurrir a la diferencial en situaciones físicas concretas.

Los siguientes extractos de entrevistas a alumnos experimentales de 3º BUP, que tan sólo han tenido un primer acercamiento al Cálculo diferencial en las clases de Física en el tema de Cinemática, ponen de manifiesto la alta calidad de sus respuestas. En concreto, cuando están analizando un problema ya resuelto y se les pregunta la razón por la cual una expresión escrita en términos de incrementos (Ä*m*=ñ· Ä*V*) pasa a escribirse en términos diferenciales (d*m*=ñ· d*V*), contestan:

EXTRACTO 25: Ejemplo de respuesta para justificar el paso de incrementos a diferenciales (Francis, alumno de *alto rendimiento*, 3° BUP)

Francis: *Porque como la densidad va variando según la altura, no es la misma a 0 m que a 2000 m, por eso no podemos seguir una misma densidad sino que va cambiando según la altura a la que se encuentra (...) Al no ser la misma densidad, entonces no podemos considerar un valor...*

EXTRACTO 26: Ejemplo de respuesta para justificar el paso de incrementos a diferenciales (Antonio, alumno de *rendimiento medio*, 3° BUP)

Antonio: *Porque, al ir subiendo, la densidad va disminuyendo, y cuanto menos densidad...*

E: Pero, ¿por qué no usamos entonces la primera expresión: Ä*m*=ñ· Ä*V*?

Antonio: *Porque en Äm es regular, y en* d*m la masa cambia irregularmente, no varía regularmente.*

EXTRACTO 27: Ejemplo de respuesta para justificar el paso de incrementos a diferenciales (Palen, alumno de *rendimiento medio*, 3° BUP)

Palen: *Aquí (*Ä*m*=ñ· Ä*V) el cambio sería de forma constante en cada intervalo de altura, y aquí (*d*m*=ñ· d*V) sin embargo cambiaría (...) Yo creo que* (el que resuelve el problema) *se ha dado cuenta que la densidad no es constante, y por eso hace ese paso.*

9.2.2. Análisis comparativo de resultados sobre el significado de la diferencial

En la tabla 9.II se presentan los resultados del problema y las cuestiones que guardan relación con el significado de las expresiones diferenciales en situaciones físicas concretas.

TABLA 9.II. Respuestas relacionadas con el significado de la diferencial	**Gr. Control**		**Gr. Exptal. *P. investig.***		**Gr. Exptal. *P. formado***	
	%	(sd)	**%**	(sd)	**%**	(sd)

C7e: ¿Cuál es el significado físico de la expresión diferencial: d*N*=-ë· *N*· d*t*?	COU (N=52)	3º BUP (N=95)	3º BUP (N=78)
Estimación lineal del Ä*N*	0 (-)	38.9 (5.0)	20.5 (4.6)
¿Diferencia significativa?		**SÍ**	**SÍ**
C3e-p: ¿Cuál es el significado físico de un valor numérico de la diferencial: d*T* (Ä*t*=0.05 s)?	COU (N=56)	3º BUP (N=97)	
Estimación lineal del Ä*T*	0 (-)	43.3 (5.1)	
¿Diferencia significativa?		**SÍ**	
P1e: Cuando resuelven problemas...	COU (N=57)	COU (N=18)	
Escriben expresiones diferenciales	17.5 (5.1)	83.3 (9.0)	
¿Diferencia significativa?		**SÍ**	
Explican algún significado	0 (-)	66.7 (11.4)	
¿Diferencia significativa?		**SÍ**	
Significado correcto: Estimación lineal del Ä*m*	0 (-)	66.7 (11.4)	
¿Diferencia significativa?		**SÍ**	

De nuevo, todos los resultados son favorables a nuestra hipótesis: existen claras diferencias entre los porcentajes de alumnos de grupos experimentales que explican correctamente el significado físico de expresiones diferenciales y valores numéricos concretos, y esas diferencias son mayores aún cuando se consideran grupos experimentales de *segundo curso* del *profesor investigador*.

Para valorar en su justa medida esas diferencias, debe advertirse que casi todos los grupos de control, al ser de COU, habían estudiado, o estaban estudiando en ese momento, el tema de Física nuclear, mientras que para los grupos experimentales (3º BUP) el contenido físico de la expresión: d*N*=-ë· *N*· d*t* era totalmente desconocido. Pese a ello, se produjeron respuestas escritas de los alumnos experimentales que asignaban un claro significado a esa expresión matemática; sirva de ejemplo la siguiente respuesta literal de un alumno experimental de 3º BUP: "d*N* significa cuánto cambiaría el número de núcleos de esa sustancia en un determinado espacio de tiempo (d*t*) si siempre se desintegrasen los mismos núcleos cada segundo". Tampoco las resultaba familiar la expresión: d*T*=*T'*· d*t*, y sin embargo son capaces de explicar el significado físico de un valor numérico concreto obtenido a partir de esa expresión, como se muestra en la siguiente respuesta literal escrita por un alumno experimental de 3º BUP: "si a partir del momento de introducir el termómetro la temperatura asciende lo mismo cada segundo, la temperatura a los treinta minutos habría aumentado 2160 ºC".

Algunas respuestas escritas de los estudiantes de los grupos experimentales de 3º BUP se refieren a la idea de estimación, pero no saben precisar en qué consiste; para situarnos siempre en la opción más desfavorable para nuestra hipótesis, no hemos contabilizado estas respuestas como correctas en los resultados de la tabla 9.II. El siguiente extracto de una entrevista con una alumna de grupo experimental reproduce una respuesta de este tipo:

EXTRACTO 28: Ejemplo de respuesta *imprecisa* para explicar el significado de la diferencial, no contabilizada como correcta (Rocío, alumna de *alto rendimiento*, 3º BUP)

Rocío: *El incremento es el cambio constante y la diferencial no...* d*m es lo que cambiaría la masa si... conforme la densidad... por lo que cambiaría el volumen*

E: Lo que cambiaría la masa, ¿en qué condiciones?, ¿por qué utilizas el tiempo condicional?

Rocío: *Si la densidad fuese esto...* (señala la ecuación del enunciado)

También aparecen durante las entrevistas con alumnos experimentales respuestas correctas, en su lenguaje todavía poco preciso, sobre el significado de la expresión diferencial: $\mathrm{d}m = ñ \cdot \mathrm{d}V$

EXTRACTO 29: Ejemplo de respuesta correcta sobre el significado de la expresión diferencial (Gema, alumna de *alto rendimiento*, 3º BUP)

Gema: *Esa expresión* ($\mathrm{d}m = ñ \cdot \mathrm{d}V$) *nos dice: lo que cambiaría la masa depende de lo que cambiaría el volumen, suponiendo la densidad constante.*

EXTRACTO 30: Ejemplo de respuesta correcta sobre el significado de la expresión diferencial (Palen, alumno de *rendimiento medio*, 3º BUP)

Palen: *Esa expresión* ($\mathrm{d}m = ñ \cdot \mathrm{d}V$) *nos dice lo que cambiaría la masa si cambiara* *constantemente la masa cada intervalo de altura* (se refiere a la columna de aire).

Las diferencias encontradas entre grupos experimentales y de control en relación con el significado de la diferencial, deben conducir también a claras diferencias en sus respuestas a las cuestiones relacionadas con el valor numérico de la diferencial y el reconocimiento del carácter funcional. En la tabla 9.III se presentan los resultados más importantes sobre este aspecto.

Como puede apreciarse, existen diferencias significativas en todas las respuestas que hemos considerado indicadoras del reconocimiento del carácter funcional de la diferencial, a favor siempre de los alumnos de grupos experimentales, en mayor medida en los del *profesor investigador*.

TABLA 9.III. Respuestas relacionadas con el carácter funcional de la diferencial	**Gr. Control**		**Gr. Exptal. *P. investig.***		**Gr. Exptal. *P. formado***	
	%	(sd)	**%**	(sd)	**%**	(sd)
C2e-p: Cuando eligen posibles valores numéricos que puede tener la diferencial de una magnitud	COU (N=40)		3º BUP (N=95)		3º BUP (N=78)	
Respuestas consistentes con el carácter funcional, pues admiten más de un valor numérico	15.0	(5.7)	81.8	(4.4)	57.0	(5.6)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**		**SÍ**	
Respuestas consistentes con el carácter funcional cuando justifican su elección	25.0	(6.9)	76.6	(4.9)	50.6	(5.7)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**		**SÍ**	
C3e-p: Cálculo de d*T* de una pieza que se introduce en un horno, para dos intervalos de tiempo, conociendo el valor de la derivada en el instante inicial	COU (N=56)		3º BUP (N=97)			
Obtiene un valor numérico para d*T* en ambos intervalos, lo que puede interpretarse como un reconocimiento (al menos operativo) del carácter funcional de la diferencial	44.6	(6.7)	74.2	(4.5)		
¿Diferencia significativa?			**SÍ**			

Cuando se pregunta a los alumnos experimentales durante la entrevista cuál es el valor numérico que puede tomar d*m*, por regla general las respuestas son inmediatas, reconociendo el carácter funcional, tal como muestran los dos siguientes extractos.

EXTRACTO 31: Ejemplo de respuesta que reconoce el carácter funcional de la diferencial (Mendo, alumno de *alto rendimiento*, 3° BUP)

Mendo: d*m valdrá bastante, conforme vamos subiendo se hace menos denso el aire.*

E: ¿Cuál será su valor?

Mendo: *Depende de la altura hasta la que subamos*

EXTRACTO 32: Ejemplo de respuesta que reconoce el carácter funcional de la diferencial (Gema, alumna de *alto rendimiento*, 3° BUP)

Gema: *Me imagino que valdrá poco, pues al ser tan estrecho* (el cilindro de aire) *el volumen es pequeño... Bueno, depende de la altura, si la altura es grande valdrá mucho, y si la altura es pequeña, valdrá poco.*

9.2.3. Análisis comparativo de resultados sobre la relación entre diferencial y derivada

En la tabla 9.IV se presentan los resultados de las cuestiones relacionadas con este aspecto concreto.

TABLA 9.IV. Respuestas sobre la relación entre diferencial y derivada	**Gr. Control** **%** (sd)	**Gr. Exptal.** ***P. investig.*** **%** (sd)	**Gr. Exptal.** ***P. formado*** **%** (sd)
C6e (1ª): Dada la expresión: d*R*/d*z*=*L*· *z*, consideran correcta la lectura:	COU (N=40)	3º BUP (N=106)	3º BUP (N=81)
La diferencial de *R* entre la diferencial de *z* es igual .	37.5 (7.7)	96.2 (1.9)	91.4 (3.1)
¿Diferencia significativa?		**SÍ**	**SÍ**
C6e (2ª): Dado el razonamiento: "d*R*/d*z*=*L*· *z* Despejando d*R* se obtiene: d*R*=*L*· *z*· d*z*", consideran que:	COU (N=40)	3º BUP (N=106)	3º BUP (N=81)
Es correcto y se lee en términos de diferenciales	37.5 (7.7)	90.6 (2.9)	85.2 (4.0)
¿Diferencia significativa?		**SÍ**	**SÍ**
C3e-p: Para calcular directamente d*T* a partir del valor de la derivada (*T'*=1.2 ºC/s):	COU (N=56)	3º BUP (N=97)	
Usan la **fórmula de Cauchy** (d*T*=*T'*· d*t*) para Ä*t*=0.05 s y Ä*t*=30 min	35.7 (6.5)	57.7 (5.0)	
¿Diferencia significativa?		**SÍ**	

Como puede apreciarse, existen diferencias claramente significativas a favor de los alumnos de grupos experimentales, cuando se trata de reconocer a la expresión d*R*/d*z* como un verdadero cociente y aceptar por tanto como correctos los razonamientos, frecuentemente realizados en Física, basados en esta idea.

Durante la entrevista se les preguntaba por la lectura de un cociente diferencial (d*m*/d*V*=...), y se les preguntaba también si es correcto despejar de esa expresión: d*m*=...d*V*. Las respuestas de los alumnos experimentales que reproducimos en los siguientes extractos sirven para ilustrar los rotundos resultados presentados en la última tabla.

EXTRACTO 33: Ejemplo de lectura correcta del cociente diferencial (Palen, alumno de *rendimiento medio*, 3° BUP)

E: ¿Cómo lees esta expresión: d*m*/d*V*?

Palen: *Diferencial de m entre diferencial de V*

E: ¿Es correcto despejar: "ñ= d*m*/d*V*, entonces: d*m*=ñ· d*V*"?

Palen: *Yo creo que está bien despejar*

EXTRACTO 34: Ejemplo de lectura correcta del cociente diferencial (Mar, alumna de *rendimiento medio*, 3° BUP)

E: ¿Cómo lees esta expresión: d*m*/d*V*?

Mar: *Es la derivada: el diferencial de la masa entre el diferencial del volumen...*

E: ¿Es correcto despejar: "ñ= d*m*/d*V*, entonces: d*m*=ñ· d*V*"?

Mar: *Sí, claro que se puede despejar*

EXTRACTO 35: Ejemplo de lectura correcta del cociente diferencial (Rocío, alumna de *alto rendimiento*, 3° BUP)

E: ¿Cómo lees esta expresión: d*m*/d*V*?

Rocío: *La diferencial de m partido la diferencial de V*

E: ¿Es una derivada?

Rocío: *Sí*

E: ¿Es correcto despejar: "ñ= d*m*/d*V*, entonces: d*m*=ñ· d*V*"?

Rocío: *Está bien dado ese paso*

9.2.4. Análisis comparativo de resultados sobre la integral y el Teorema Fundamental

Como ya se ha advertido, en el tema de Cinemática de 3º BUP no se contemplaba de manera obligatoria la introducción del concepto de integral y el Teorema Fundamental; sin embargo, estas ideas son esenciales para adquirir una visión global de la estrategia del Cálculo y comprender las verdaderas razones por las que se realiza la estimación diferencial. Actualmente nos encontramos en fase de experimentación sobre la introducción de estas ideas en el curso de COU o 2º Bachillerato: hemos presentado ya las secuencias de actividades correspondientes a dos tópicos específicos de este curso. Por esta razón, los resultados de grupos experimentales sobre este aspecto concreto han sido obtenidos con alumnos de *segundo curso*, alumnos de COU del *profesor investigador* que lo fueron también el año anterior en 3º BUP. Como ya se ha explicado (cap. 8, p. 250), el número de alumnos de este *segundo curso* experimental es bastante bajo (N=18). Los resultados se presentan en la siguiente tabla.

TABLA 9.V. Respuestas sobre la integral y el Teorema Fundamental	**Gr. Control** **%** (sd)	**Gr. Exptal.** ***P. investig.*** **%** (sd)
P1e: Cuando resuelven problemas...	COU (N=57)	COU (N=18)
Escribe integrales	17.5 (5.1)	77.8 (10.1)
¿Diferencia significativa?		**SÍ**
Especifica: como *suma de muchos términos*	0 (-)	72.2 (10.9)
¿Diferencia significativa?		**SÍ**
Justifica de alguna manera el Teorema Fundamental	0 (-)	66.7 (11.4)
¿Diferencia significativa?		**SÍ**
C4e-p: Dado el enunciado del Teorema Fundamental, cuando se les pide argumentos que lo justifiquen, en especial el hecho de que aparezca la función primitiva:	COU (N=56)	COU (N=15)
Escriben argumentos que pueden justificar el Teor. Fundamental	0 (-)	80.0 (10.7)
¿Diferencia significativa?		**SÍ**

A pesar del tamaño reducido de la muestra de alumnos experimentales de segundo curso, las grandes diferencias obtenidas, a favor del grupo experimental, ponen de manifiesto la potencialidad de la nueva propuesta para adquirir una visión completa y llena de sentido físico de la estrategia general del Cálculo (cap. 2, p. 59) y de las relaciones que existen entre sus conceptos básicos: diferencial, derivada e integral.

Teniendo en cuenta que las entrevistas de alumnos experimentales han sido realizadas en 3º BUP, no podemos ofrecer extractos que ilustren los resultados que hemos presentado.

9.2.5. Análisis comparativo de resultados sobre el uso mecánico del Cálculo y las expectativas de usarlo *con sentido*

Los resultados que hemos presentado han puesto de manifiesto claras diferencias entre grupos experimentales y grupos de control respecto al uso con comprensión del Cálculo diferencial. Tales resultados muestran, por sí mismos, que los alumnos de grupos experimentales, al contrario que sus compañeros de grupos de control, no se limitan a utilizar el Cálculo de forma mecánica sino que comprenden por qué hacen lo que hacen.

No obstante, para mostrar con mayor nitidez aún las diferencias entre este uso con comprensión de los alumnos de grupos experimentales frente al uso mecánico de los alumnos de grupos de control, en la tabla 9.VI y el gráfico 9.I presentamos los resultados más llamativos del análisis de la resolución de un problema *novedoso*, en el que se pedía expresamente verbalizar lo que se hacía. Las diferencias entre los resultados de ambos grupos hacen innecesario cualquier comentario.

TABLA 9.VI. Uso del Cálculo diferencial para resolver problemas de Física	**Gr. Control** %	(sd)	**Gr. Exptal.** ***P. investig.*** %	(sd)
P1e: Cuando resuelven el problema...	COU (N=57)		COU (N=18)	
1. Usa el Cálculo diferencial	19.3	(5.3)	88.9	(7.6)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**	
2. Intenta justificarlo, aunque sea erróneamente	1.8	(1.8)	83.3	(9.0)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**	
3. Asigna algún significado a la diferencial, aunque sea incorrecto	0	(-)	66.7	(11.4)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**	
4. Escribe integrales	17.5	(5.1)	77.8	(10.1)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**	
5. Considera explícitamente a la integral como suma de muchos términos	0	(-)	72.2	(10.9)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**	
6. Justifica de alguna manera el Teorema Fundamental	0	(-)	66.7	(11.4)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**	

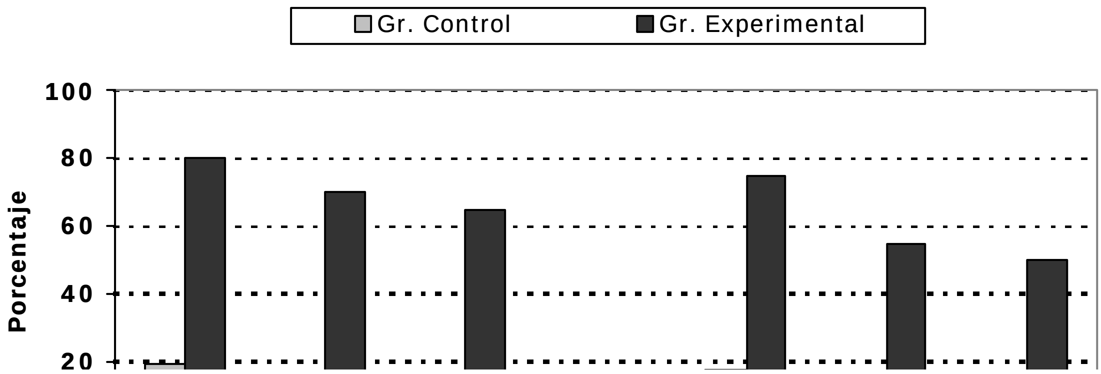


Gráfico 9.I. Uso del Cálculo diferencial para resolver problemas de Física (ver tabla 9.VI)

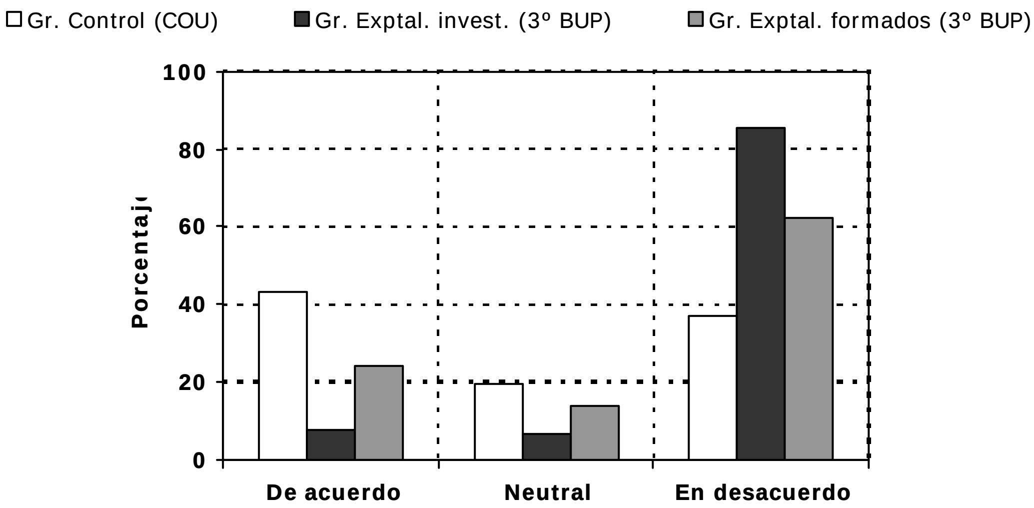
1 2 3 4 5 6

Esta diferencia en el uso con comprensión del Cálculo diferencial se refleja también en las distintas opiniones de ambos grupos de alumnos, obtenidas mediante una escala tipo Likert, sobre el contenido de dos afirmaciones (C8e) relacionadas con la reducción del Cálculo diferencial en las clases de Física a la aplicación mecánica de reglas (tabla 9.VII y gráfico 9.II; tabla 9.VIII y gráfico 9.III).

TABLA 9.VII y GRÁFICO 9.II

"Cuando se utiliza el Cálculo diferencial en las demostraciones y en el planteamiento de problemas de Física, no presto atención pues sé de antemano que no me voy a enterar y atiendo solamente a la fórmula que se obtiene al final"

	De acuerdo (%)	**Neutral (%)**	**Desacuerdo (%)**
Grupos de **control** (COU, N=108)	43.5	19.4	37.0
Grupos **experimentales** del *investigador* (3º BUP, N=103)	7.8	6.8	85.4
Grupos **experimentales** de prof. *formados* (3º BUP, N=79)	24.1	13.9	62.0



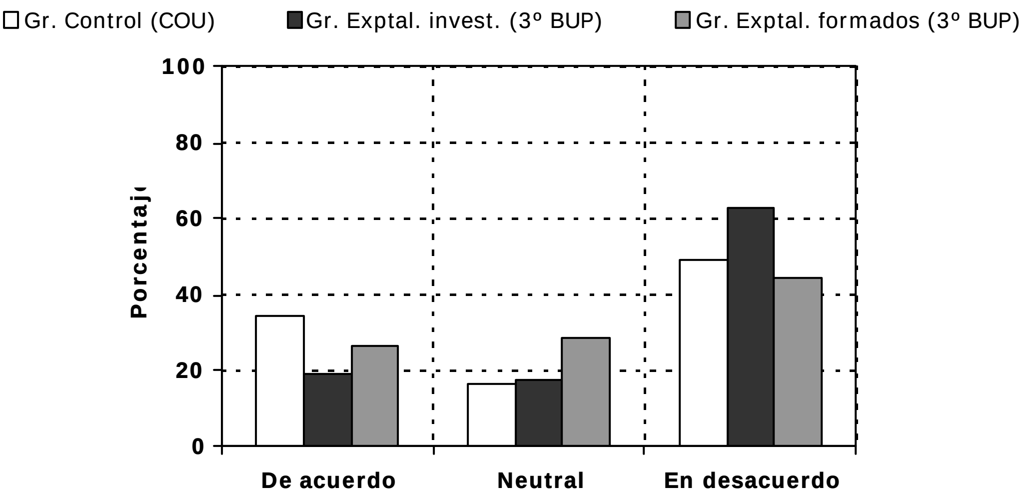
Existen diferencias significativas (utilizando el estadístico $\div^2$, para á<0.05), al expresar su grado de acuerdo o desacuerdo con esta afirmación, entre cualquiera de los grupos experimentales y el grupo de control. La observación de los resultados muestra que las diferencias son favorables a nuestra hipótesis.

El 63% de los alumnos de grupos de control admite implícitamente o está claramente de acuerdo con que *no presta atención cuando se usa el Cálculo diferencial en la Física pues sabe que no se va a enterar y atiende solamente a la fórmula final*, lo que es un claro reflejo de la preponderancia del mecanicismo. Sin embargo, el 62% de los alumnos de grupos experimentales de profesores formados, y el 85.4% de los alumnos del profesor investigador, rechazan expresamente esta idea, lo que interpretamos como un reflejo del uso con comprensión que se promueve en sus clases de Física.

TABLA 9.VIII y GRÁFICO 9.III

"En realidad, lo único que es necesario saber en la asignatura de Física sobre el Cálculo diferencial es resolver las derivadas e integrales que aparecen en algunas fórmulas"

	De acuerdo (%)	Neutral (%)	Desacuerdo (%)
Grupos de **control** (COU, N=108)	34.3	16.7	49.1
Grupos **experimentales** del *investigador* (3º BUP, N=103)	19.4	17.5	63.1
Grupos **experimentales** de prof. *formados* (3º BUP, N=76)	26.3	28.9	44.7



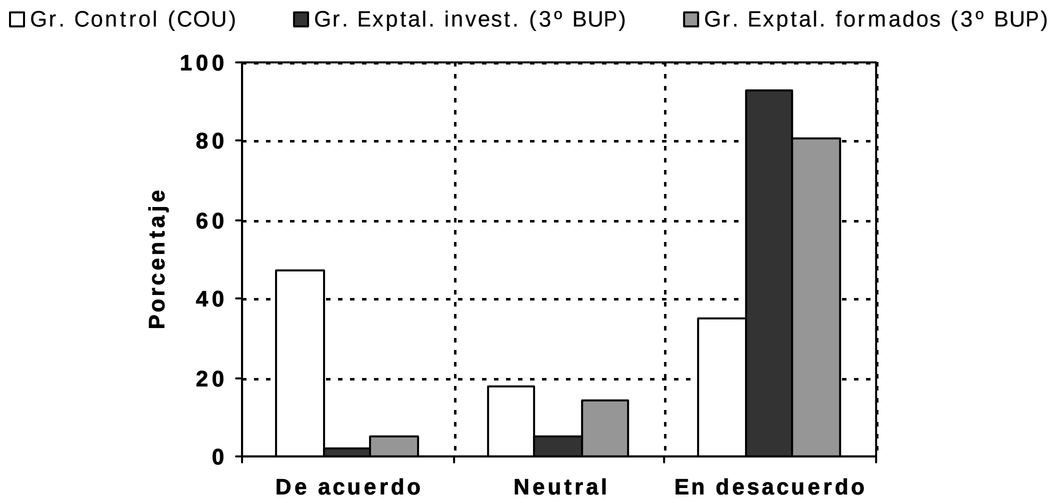
Como ya hemos comentado al presentar los resultados de la primera hipótesis (cap. 5, p. 205), los alumnos de COU de grupos de control todavía no han tenido tiempo de aprender el estatus que llega a adquirir el Cálculo diferencial en las clases de Física, y quizás por este motivo sólo la mitad de ellos admite o está de acuerdo con que *lo único importante en esas clases es resolver las derivadas e integrales que aparecen en algunas fórmulas*. A pesar de ello, se obtienen diferencias significativas a favor de los grupos experimentales del *profesor investigador*: el 63% de ellos rechaza expresamente ese reduccionismo. Las posibles dudas que puedan surgir en la interpretación de estos resultados se disipan cuando se analizan los resultados que se muestran a continuación.

En efecto, estas diferencias (uso mecánico del Cálculo entre grupos de control *vs* uso con comprensión entre los grupos experimentales), deben afectar también a las expectativas de los alumnos, y las que perciben en sus profesores, sobre la posibilidad de entender y usar con seguridad el Cálculo en situaciones novedosas. Hemos recogido las opiniones de ambos grupos de alumnos, mediante una escala tipo Likert, sobre el contenido de dos afirmaciones (C8e) relacionadas con esas expectativas (tabla 9.IX y gráfico 9.IV; tabla 9.X y gráfico 9.V).

TABLA 9.IX y GRÁFICO 9.IV

"Noto que el profesor utiliza el Cálculo diferencial porque lo necesita para el desarrollo del tema, pero él no espera que nosotros lo entendamos"

	De acuerdo (%)	Neutral (%)	Desacuerdo (%)
Grupos de **control** (COU, N=108)	47.2	17.6	35.2
Grupos **experimentales** del *investigador* (3º BUP, N=102)	2.0	4.9	93.1
Grupos **experimentales** de prof. *formados* (3º BUP, N=78)	5.1	14.1	80.8

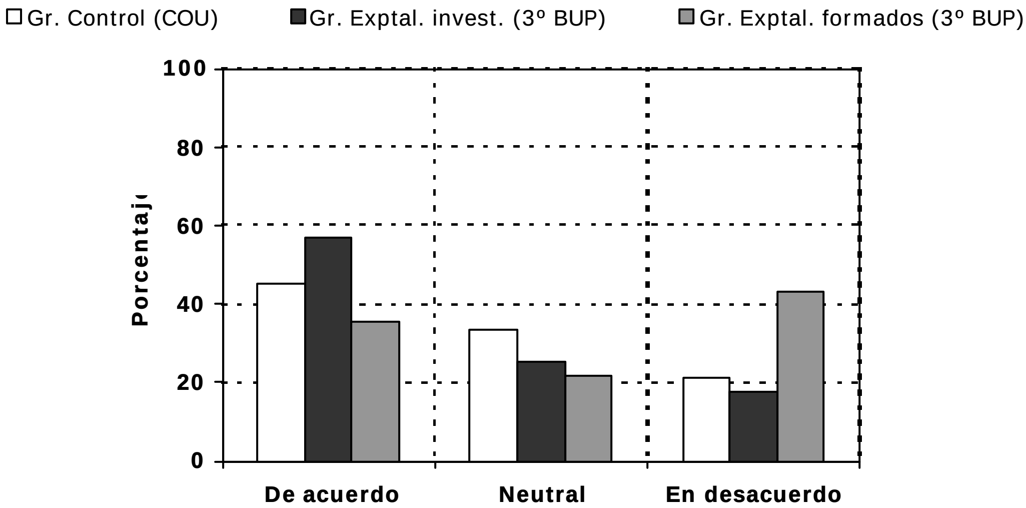


Las diferencias son rotundas, favorables siempre a nuestra hipótesis. Resulta evidente que más del 80% de los alumnos de grupos experimentales (más del 93% si son del *profesor investigador*) perciben con claridad el interés y las expectativas positivas del profesor para que ellos entiendan el uso del Cálculo diferencial, frente al 65% los alumnos de grupos de control que admiten o reconocen abiertamente que el profesor carece de expectativas positivas.

TABLA 9.X y GRÁFICO 9.V

"Yo utilizo con seguridad el Cálculo diferencial y me siento capaz de resolver nuevos problemas con él"

	De acuerdo (%)	Neutral (%)	Desacuerdo (%)
Grupos de **control** (COU, N=108)	45.4	33.3	21.3
Grupos **experimentales** del *investigador* (3º BUP, N=102)	56.9	25.5	17.6
Grupos **experimentales** de prof. *formados* (3º BUP, N=79)	35.4	21.5	43.0



En este caso no existen diferencias significativas entre grupos de control y grupos experimentales del *profesor investigador*, y sí existen entre grupos de control y grupos experimentales de *profesores formados*, favorables, en principio, a los grupos de control. Pero este resultado no debe contemplarse de forma aislada, sino en conjunto con los resultados que hemos presentado hasta aquí y que han puesto de manifiesto la escasa comprensión del Cálculo diferencial entre los alumnos de los grupos de control, y su visión reduccionista y mecánica del Cálculo. En nuestra opinión, la seguridad manifestada por estos alumnos no debe ser interpretada como un resultado desfavorable para nuestra hipótesis, sino como un reflejo de la tendencia a identificar el Cálculo diferencial con el manejo de reglas de derivación e integración, y del hecho de tratarse de alumnos al final de un curso superior, que han adquirido mayor fluidez en el desarrollo y aplicación de reglas y algoritmos.

Los resultados presentados confirman entonces la existencia de diferencias entre la visión del Cálculo de los alumnos de grupos de control (marcado por el uso mecánico y sin sentido), y la visión de los alumnos de grupos experimentales (marcado por la comprensión, aunque todavía insuficientemente consolidada, por encontrarse en la fase de iniciación). Estas diferencias se reflejan en la mejor comprensión por parte de los alumnos experimentales de los conceptos básicos del Cálculo y las relaciones entre ellos, pero también en su mayor capacidad para utilizarlo en situaciones novedosas. También se reflejan esas diferencias en la actitud de los alumnos experimentales indicadora de comprensión que se manifiesta en su negativa explícita a admitir que dejen de prestar atención cuando se usa el Cálculo, en su negativa a admitir que el profesor no se interese por que lleguen a comprenderlo, o en su negativa a admitir que el Cálculo se reduce a la aplicación mecánica de reglas.

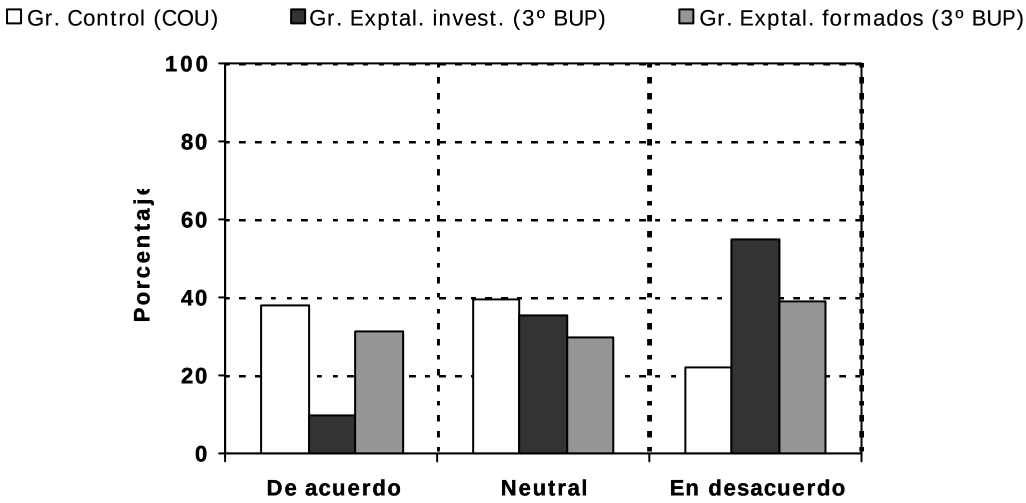
9.2.6. Análisis comparativo de resultados sobre la valoración del papel del Cálculo diferencial en el aprendizaje de la Física

Las diferencias entre grupos experimentales y grupos de control sobre el uso con comprensión del Cálculo diferencial deben verse reflejadas en una distinta valoración del papel que juega el Cálculo diferencial en el aprendizaje de la Física. Hemos presentado dos afirmaciones (C8e) para que expresen su opinión al respecto, mediante una escala tipo Likert. Los resultados se presentan en las dos siguientes tablas y sus respectivos gráficos (tabla 9.XI y gráfico 9.VI; tabla 9.XII y gráfico 9.VII).

TABLA 9.XI y GRÁFICO 9.VI

"Una de las causas más importantes de que a los alumnos no les guste la Física es el uso del Cálculo diferencial"

	De acuerdo (%)	Neutral (%)	Desacuerdo (%)
Grupos de **control** (COU, N=108)	38.0	39.8	22.2
Grupos **experimentales** del *investigador* (3º BUP, N=102)	9.8	35.3	54.9
Grupos **experimentales** de prof. *formados* (3º BUP, N=77)	31.2	29.9	39.0



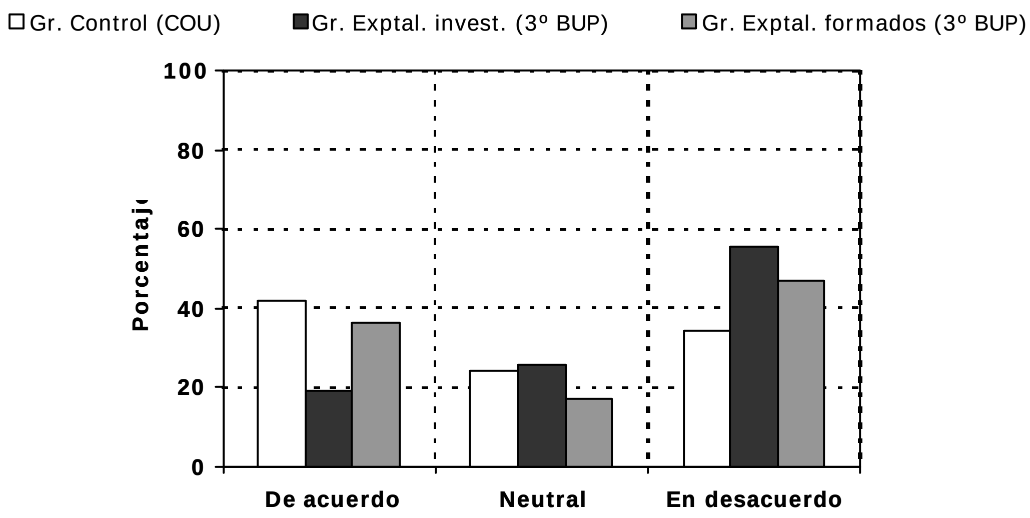
Existen diferencias significativas (utilizando el estadístico ÷ ^{2}, para á<0.05), al expresar su grado de acuerdo o desacuerdo con esta afirmación, entre cualquiera de los grupos experimentales y el grupo de control. La observación de los resultados muestra que las diferencias son favorables a nuestra hipótesis.

El 78% de los alumnos de grupos de control reconocen abiertamente o admiten que el uso del Cálculo diferencial es una fuente de rechazo hacia la Física, mientras el 39% de los alumnos de grupos experimentales de *profesores formados* y el 55% de los alumnos del *profesor investigador* manifiestan expresamente su desacuerdo con esa idea.

TABLA 9.XII y GRÁFICO 9.VII

"El uso del Cálculo diferencial hace que la Física sea más difícil de comprender, de forma que más que ayudar, obstaculiza la comprensión de los conceptos"

	De acuerdo (%)	Neutral (%)	Desacuerdo (%)
Grupos de **control** (COU, N=108)	41.7	24.1	34.3
Grupos **experimentales** del *investigador* (3º BUP, N=101)	18.8	25.7	55.4
Grupos **experimentales** de prof. *formados* (3º BUP, N=77)	36.4	16.9	46.8



En este caso, existen diferencias significativas tan sólo entre los grupos de control y los grupos experimentales del *profesor investigador*. La observación de los resultados muestra que esas diferencias son favorables a nuestra hipótesis.

El 66% de los alumnos de los grupos de control reconocen claramente o admiten que el uso del Cálculo diferencial es un obstáculo para la comprensión, mientras el 47% de los alumnos de grupos experimentales de *profesores formados* y el 55% de los alumnos del *profesor investigador* muestran claramente su desacuerdo con esa idea.

Estos resultados muestran una clara mejoría entre los alumnos de grupos experimentales (más acusada si son del *profesor investigador*) frente a los alumnos de grupos de control, en la valoración que hacen del papel que juega el Cálculo diferencial en el aprendizaje de la Física.

Al final de la entrevista se preguntaba a los alumnos por la influencia del uso del Cálculo diferencial en el gusto por la Física entre sus compañeros y en ellos mismos. Las opiniones más frecuentes negaban que influyese negativamente, como se muestra en los dos siguientes ejemplos:

EXTRACTO 36: (Francis, alumno de *alto rendimiento*, 3º BUP)

Francis: *Yo creo que no influye. A mí no me ha supuesto ningún obstáculo.*

EXTRACTO 37: (Antonio, alumno de *rendimiento medio*, 3º BUP)

Antonio: *No influye nunca, no produce ningún tipo de rechazo, ni a mí ni a mis compañeros.*

Si ya es suficiente con reconocer que, al menos, no produce rechazo, en ocasiones se llega a admitir incluso que el Cálculo diferencial influye *positivamente* en el gusto hacia la Física, como es el caso del siguiente extracto de una entrevista, donde además se resalta el buen papel que puede jugar la realización de cálculo numérico.

EXTRACTO 38: (Palen, alumno de *rendimiento medio*, 3º BUP)

Palen: *Es un poco más sencillo al usar el Cálculo diferencial, y entonces agrada más a la gente. Si se tuviera que hacer de otra forma habría que dividir en muchos intervalos y sería mucho más trabajoso.*

En resumen, puede afirmarse que los resultados del análisis comparativo sobre los indicadores de una adecuada comprensión de la diferencial en la Física son altamente alentadores, sobre todo si consideramos que los grupos experimentales son de un curso inferior a los grupos de control, y que se trata de conceptos novedosos que, como todos los conceptos, no se aprenden de una vez para siempre. En el caso de los alumnos de segundo curso experimental, que han tenido la oportunidad de utilizar durante dos cursos nuestra propuesta, las diferencias son mucho más acentuadas.

La propuesta alternativa de introducción y uso del Cálculo diferencial en la enseñanza de la Física, presentado en un tema de iniciación en 3º BUP, favorece la comprensión y genera actitudes positivas en mayor medida que lo que produce la enseñanza habitual. Se trata así de un primer paso en la dirección deseada, por supuesto mejorable. Cabe esperar que un mayor dominio por parte del profesor cuando enseña y usa el Cálculo diferencial, así como una mayor familiaridad de los alumnos con el uso del Cálculo en distintas situaciones físicas, revertirá en diferencias mayores aún a favor de la nueva propuesta.

Pero la validez de los materiales empleados y las altas expectativas de mejora entre los alumnos, siendo un importante paso adelante, no son suficientes para que se produzca la incorporación efectiva de la nueva propuesta en la enseñanza de la Física. Es necesario comprobar que es posible también cambiar la práctica habitual de los profesores cuando usan el Cálculo diferencial en las clases de Física. En el siguiente y último apartado se presentan los resultados obtenidos en relación con la posibilidad de este cambio.

9.3. LOS PROFESORES PERCIBEN POSITIVAMENTE LA *NUEVA* PROPUESTA SOBRE LA DIFERENCIAL Y LA POSIBILIDAD DE INCORPORARLA EN SUS CLASES

Como se recordará, hemos diseñado un curso de formación de profesores en el que se analizan las deficiencias relacionadas con el uso del Cálculo diferencial en la enseñanza de la Física, y sus posibles causas. En ese curso se les presenta la propuesta alternativa y se ofrecen oportunidades de ponerla a prueba, utilizándola en aquellas situaciones en las que se han identificado las deficiencias. El diseño completo del curso se muestra en el **Anexo 6** de este trabajo.

Hemos elaborado dos diseños experimentales para comprobar que los profesores asistentes al curso, después de reflexionar sobre las deficiencias del uso del Cálculo diferencial en la enseñanza habitual de la Física, y después de conocer la nueva propuesta, valoran positivamente sus posibilidades para mejorar la situación descrita y mejoran su propia comprensión del Cálculo. A continuación se presentan los resultados obtenidos en cada uno de esos diseños.

9.3.1. Resultados sobre la mejora producida entre los profesores en su comprensión de los conceptos del Cálculo diferencial cuando resuelven problemas de Física.

Para contrastar esta consecuencia, hemos comparado la forma de usar el Cálculo diferencial para resolver problemas de Física, los mismos profesores, *antes* y *después* de asistir al curso. Para ello, hemos preparado dos enunciados de forma que cada profesor resuelva un problema distinto *antes* y *después*; para evitar que la diferencia de resultados sea achacable a la distinta complejidad de los enunciados, hemos alternado en cada curso el orden en que se presentan. En la tabla 9.XIII se presentan los resultados del análisis de los problemas resueltos.

Para valorar correctamente esos resultados, debe advertirse que el último curso para profesores fue impartido en el 98, cuando aún no habíamos encontrado la estructura *problematizada* que da sentido, integrándolos, a todos los conceptos y a la estrategia del Cálculo, estructura que hemos presentado en el capítulo 2. Esto hizo que no prestáramos la atención que merece a la construcción del concepto de integral como *sumas de Riemann* y la relación entre la condición que debe verificar la diferencial y el Teorema Fundamental, lo que se ve reflejado en que la mejora en estos aspectos (nº 8 y 9 de la tabla 9.XIII) es menor que en los demás.

Actualmente ya disponemos de una nueva versión del curso de formación, pero aún no disponemos de datos suficientes obtenidos con dicho curso.

Este *defecto* es, en nuestra opinión, consustancial a toda investigación: la estructura lógica de la resolución del problema se alcanza en la etapa final de la investigación, mientras al principio se trata de tentativas exploratorias justificadas. Habitualmente, en las memorias finales no se recoge este aspecto, pero nosotros deseamos expresar que no ha sido un proceso lineal sino que se han producido reestructuraciones profundas.

TABLA 9.XIII. Uso del Cálculo diferencial por los profesores para resolver problemas de Física *antes* y *después* de asistir al curso (Se demandaban explícitamente comentarios relacionados con la diferencial)	**ANTES** (N=94)		**DESPUÉS** (N=95)	
	%	(sd)	**%**	(sd)

1. Usa el Cálculo diferencial	80.9	(4.1)	88.4	(3.3)
2. Intenta justificarlo, aunque sea erróneamente	13.8	(3.6)	66.3	(4.9)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**	
3. Lo justifica correctamente	9.6	(3.1)	64.2	(4.9)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**	
4. Escribe expresiones diferenciales necesarias	66.0	(4.9)	82.1	(4.0)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**	
5. Asigna algún significado a la diferencial, aunque sea incorrecto	8.5	(2.9)	44.2	(5.1)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**	
6. Explica el significado como estimación lineal del incremento	1.1	(1.1)	44.2	(5.1)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**	
7. Escribe integrales	69.1	(4.8)	74.7	(4.5)
8. Considera explícitamente a la integral como suma de muchos términos	5.3	(2.3)	17.9	(4.0)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**	
9. Justifica de alguna manera el Teorema Fundamental	0	(-)	25.3	(4.5)
¿Diferencia significativa?			**SÍ**	

Estos resultados muestran con claridad que el curso contribuye a que los profesores usen mejor y con mayor seguridad el Cálculo diferencial para resolver problemas de Física, mostrando una mayor comprensión de lo que están haciendo. En concreto, existen claras diferencias significativas a favor de nuestra hipótesis en todos los aspectos relacionados con el uso del Cálculo diferencial: justificación y explicación del significado de la diferencial, uso de expresiones diferenciales necesarias de acuerdo con el análisis físico que realizan y justificación del cálculo de antiderivadas para obtener el resultado final.

Aunque los resultados obtenidos por los profesores *después* de asistir al curso son todavía mejorables, puede considerarse un claro éxito que a través de un curso de corta duración se consiga producir importantes cambios, dotando de significado a lo que se ha venido aplicando de forma mecánica y con sentido nebuloso durante muchos años, ya sea en su etapa como estudiantes o en su ejercicio profesional. Cabe esperar que un mayor entrenamiento en el uso del Cálculo diferencial desde el enfoque alternativo que proponemos produzca unos resultados mejores aún.

En apoyo de estas expectativas positivas, podemos comentar el siguiente resultado. La muestra de 95 profesores que han resuelto el problema al finalizar el curso (ver tabla 9.XIII), incluye a los asistentes a cursos de una duración media de 20 h, pero también a los asistentes a un curso *excepcional* de 26 h en el que hemos desarrollado un módulo complementario (6 h) dedicado a resolver nuevos problemas. Si analizamos por separado los resultados obtenidos por los 22 asistentes a este curso *excepcional*, el análisis muestra que se producen mejoras en todos los apartados: todos usaron el Cálculo diferencial, el 95% escribieron expresiones diferenciales que eran necesarias y lo justificaron correctamente, el 73% explicaron el significado de esas expresiones correctamente, y el 46% justificaron el uso de antiderivadas para llegar al resultado final.

El gráfico 9.VIII muestra los resultados más destacados que se acaban de comentar:

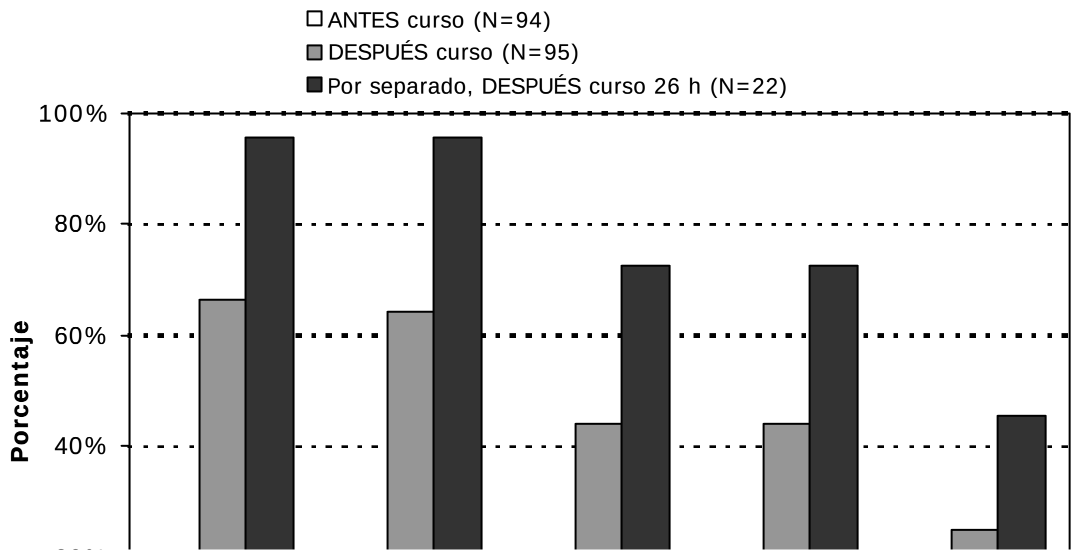


Gráfico 9.VIII. Resultados comparativos sobre la forma en que los profesores usan el Cálculo diferencial antes y después de asistir al curso (correspondientes a la tabla 9.XIII). Se muestran también los resultados del análisis por separado de los 22 asistentes a un curso con un módulo complementario (6 h) de resolución de problemas.

de la enseñanza y el aprendizaje de la Física.

Para contrastar esta consecuencia hemos pedido a los profesores asistentes al curso, al término del mismo, que cumplimenten un cuestionario de 10 ítems (ver cap. 8, p. 301). En cada ítem se les pide que valoren en qué medida la *concepción habitual* de la diferencial por un lado, y la *concepción alternativa* por otro, favorecen un aspecto concreto relacionado con el uso del Cálculo diferencial en las clases de Física. La tabla 9.XIV recoge los resultados de esa valoración. El análisis estadístico de los datos de esa tabla se ha hecho mediante la *t de Student* para datos dependientes.

TABLA 9.XIV. Valoración comparativa, realizada por los profesores que participan en el curso de formación, sobre la diferencial propuesta y la diferencial habitual (N=120)

Valorar de 0 a 10 en qué grado se favorece la concepción de los aspectos citados según la concepción de la diferencial que se utilice	$\overline{d}$ (sd)	¿Diferencia significativa?

1. Que se justifique la necesidad de usar el Cálculo diferencial	4.36 (3.03)	**SÍ**
2. Que se comprenda el significado físico de las expresiones diferenciales	4.86 (2.82)	**SÍ**
3. Que se comprendan más claramente los conceptos básicos del Cálculo (derivada, diferencial e integral)	3.90 (2.61)	**SÍ**
4. Que se puedan abordar con mayor seguridad nuevos problemas de Física que requieran el uso del Cálculo diferencial	3.75 (2.80)	**SÍ**
5. Que se supere la visión reduccionista que identifica el dominio del Cálculo diferencial con la aplicación mecánica de reglas	4.99 (2.64)	**SÍ**
6. Que se supere la ambigüedad del *todo vale* para la expresión diferencial	4.89 (2.90)	**SÍ**
7. Que se reconozca a cada expresión diferencial su carácter de hipótesis y, por tanto, como posible fuente de error	6.53 (3.06)	**SÍ**
8. Que se vincule estrechamente el análisis físico del problema al desarrollo diferencial que se lleva a cabo	4.42 (2.80)	**SÍ**
9. Que, en particular, los alumnos utilicen con comprensión el Cálculo diferencial	4.40 (2.92)	**SÍ**
10.Que, en particular, los alumnos superen una actitud negativa hacia el uso del Cálculo diferencial en la Física	3.76 (2.65)	**SÍ**

Los resultados obtenidos muestran con rotundidad que los profesores valoran muy positivamente la potencialidad de la *nueva* concepción de la diferencial para superar todas las deficiencias por las que se les preguntaba. En concreto, la media de las diferencias es superior a 3.75, a favor de la diferencial propuesta, sea cual sea el aspecto por el que se les pregunte. En todos los casos, podemos afirmar que la probabilidad de que las diferencias en las valoraciones sean debidas al azar y no a nuestro tratamiento, es mucho menor del uno por mil.

En resumen, hemos comprobado que los profesores, cuando toman conciencia de las deficiencias en la enseñanza y en su propia comprensión del Cálculo diferencial, y después de conocer la *nueva* propuesta y discutir su posible aplicación en la enseñanza, cambian su práctica habitual: mejoran su comprensión, abandonan su actitud mecánica y valoran positivamente la potencialidad de la nueva concepción para superar las deficiencias habituales en el uso del Cálculo diferencial en las clases de Física.

Aunque los resultados obtenidos en la contrastación de nuestra segunda hipótesis no necesitan mayores comentarios, vale la pena resaltar que la puesta en práctica de la nueva propuesta de uso del Cálculo diferencial en las clases de Física, que hemos llevado a cabo durante tres años consecutivos, produce entre los alumnos una notable mejoría en todos los indicadores de una adecuada comprensión, incluyendo los relacionados con el ámbito actitudinal.

Las diferencias entre grupos experimentales y grupos de control son claras, a pesar de que los primeros eran de un curso (3º BUP) inferior al de los segundos (COU). Esas diferencias son siempre favorables a los grupos experimentales, ya sean del *profesor investigador* o de los *profesores formados*, aunque, como es lógico, son más acusadas en los grupos del autor de esta investigación. Por último, las diferencias se hacen enormes cuando se trata de alumnos experimentales del *profesor investigador* que han utilizado la nueva propuesta durante dos cursos (3º BUP y COU). El aumento gradual de esas diferencias entre grupos de control y grupos experimentales de *primer curso* de *profesores formados*, de *primer curso* del *profesor investigador*, y de *segundo curso* del *profesor investigador*, no hacen sino reforzar la validez de nuestra segunda hipótesis.

Por otra parte, los profesores, cuando han participado en una reflexión colectiva y se les presenta la nueva propuesta, perciben que puede mejorar la situación actual, y que sirve para superar el *malestar difuso* sobre el uso del Cálculo diferencial en las clases de Física que nos habíamos planteado al comienzo de nuestro trabajo.

Las mejoras conseguidas por la nueva propuesta dan apoyo también a la validez de nuestra primera hipótesis, al confirmar que la baja comprensión del Cálculo diferencial por estudiantes y profesores puede achacarse en buena medida a la enseñanza habitual.