1. Ejercicio Presencial.

INSTRUCCIONES. El ejercicio se evaluará sobre un máximo de **10 puntos**; se valorará la correcta justificación de los pasos que conducen a la solución.

En un laboratorio tratan de medir como cambia la temperatura de unas láminas de cartón coloreadas al ser iluminadas con una lámpara de luz blanca. Sabemos que las bombillas se encuentran, inicialmente, a una temperatura de 20 grados centígrados. Una vez encendida la lámpara medimos el incremento de temperatura ΔT cada 5 segundos. Los resultados de estas medidas se muestran en la tabla 1.

Tabla1. Medidas de ΔT.

t(s)	L.Negra	L.Roja
5	0.87	0.82
10	0.96	0.97
15	1.12	1.11
20	1.32	1.21
25	1.46	1.36
30	1.66	1.58
35	1.79	1.72
40	1.91	1.90
45	2.11	2.11
50	2.27	2.24

Preguntas para responder:

1. Supongamos que es razonable suponer que la temperatura de la lámina roja varía con el tiempo transcurrido después de encender la bombilla de forma exponencial:

   $$T(t) = T(0).e^{\alpha t}$$

   Utilice el método de máxima verosimilitud para encontrar las fórmulas que definen los parámetros $T(0)$ y α en la expresión anterior mediante un ajuste a una función exponencial. Usando las expresiones que ha encontrado de un valor estimado de esos parámetros para la lámina de color rojo.

2. Haga una representación de los datos que se le han proporcionado para la lámina de color negro de tal forma que la dependencia ente T y t sea lineal. A partir de un ajuste por mínimos cuadrados obtenga, de nuevo, los valores de $T(0)$ y α.

3. En la tabla 2 se recogen 10 medidas del incremento de la temperatura que una lámpara provoca en una lámina negra y en otra roja. Usando un citerio de decisiones basado en que ambas series de medidas se ajustan a una distribución gaussiana y estableciendo una cota de confianza del 95 % ($z_c = 1{,}96$) ¿podría indicar si las láminas se han calentado lo mismo en ese intervalo de tiempo? Justifique su respuesta.

Tabla 2. Incremento de temperatura a los 10 segundos de encender la lámpara.										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Negra	0.96	0.97	0.92	1.02	0.96	0.95	0.93	0.95	0.96	0.94
Roja	0.98	0.99	0.99	0.94	0.90	0.92	1.07	1.02	1.00	0.93

Solución Apartado 1.

En este primer apartado se pregunta cómo debería usarse el método de máxima verosimilitud para poder estimar los valores de T_0 y α suponiendo que se quisiese hacer un ajuste a una función exponencial del tipo:

$$T(t) = T_0 e^{\alpha t}$$

Tabla3. Medidas de ΔT.		
t(s)	L.Negra	L.Roja
5	0.87	0.82
10	0.96	0.97
15	1.12	1.11
20	1.32	1.21
25	1.46	1.36
30	1.66	1.58
35	1.79	1.72
40	1.91	1.90
45	2.11	2.11
50	2.27	2.24

Un ajuste por una función que no es lineal lo más conveniente siempre es linealizar la función de ajuste. En este caso esto puede hacer tomando logaritmos neperianos a ambos lados de la igualdada anterior:

$$Ln\left[T(t)\right] = Ln\left[T_0\right] + \alpha t$$

Una vez hecho esto hay una dependencia lineal entre las variables por lo que se puede usar sin problemas el método de máxima verosimilitud. Una vez decidido el modo de representación de los datos, hacemos una tabla de valores nueva con los datos que nos interesan.

Usamos, ahora, la misma expresión que en los apuntes sin más que hacer las asignaciones: $y = Ln(t)$, $x = t$, $\lambda_1 = \alpha$ y $\lambda_2 = Ln(t_0)$. Como se indica en los apuntes del curso tendremos en este caso dos parámetros ($n = 2$) y las asignaciones: $f(x, \lambda) = y$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1$. El uso del método de máxima

Tabla 4. Medidas de $Ln(T)$ frente a t para la lámina roja.	
t(s)	L.Roja
5	5.6834
10	5.6839
15	5.6841
20	5.6844
25	5.6849
30	5.6857
35	5.6862
40	5.6871
45	5.6878
50	5.6883

verosimilitud, tal y como aparece en los apuntes del curso conllevará hacer operaciones con matrices de tamaño 2×2. Para usar el método tenemos que calcular la siguiente matriz **M**

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sum x_i x_i/\sigma_i^2 & \sum x_i/\sigma_i^2 \\ \sum x_i/\sigma_i^2 & \sum x_i x_i/\sigma_i^2 \end{pmatrix}$$

y, siguiendo la notación del curso y las asignaciones hechas en los párrafos anteriores, el vector Y toma la forma:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i/\sigma_i^2 & \sum y_i/\sigma_i^2 \end{pmatrix}$$

donde, $\sigma_i^2 = 0{,}01$ (el valor se toma de acuerdo con las cifras significativas que se han proporcionado en el enunciado).

Sustituyendo los valores del caso que nos ocupa obtenemos los valores numéricos de los elementos de la matriz M y del vector Y.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 9625 & 275 \\ 275 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1558{,}316 \\ 58{,}856 \end{pmatrix}$$

A continuación calculamos la inversa de la matrix **M**,

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}00048 & -0{,}01321 \\ -0{,}01321 & -0{,}46235 \end{pmatrix}$$

y aplicamos la fórmula $\lambda = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Y}$;

$$\lambda = \begin{pmatrix} -0{,}0172 \\ 6{,}815 \end{pmatrix}$$

de los elementos de la diagonal de la matrix $\mathbf{M}^{-1}$ podemos obtener los valores de los errores que cometemos en la estimación de los parámetros. Calculamos los valores de los elementos de las matrices teniendo en cuenta que hay que asignar un error a cada uno de los datos del problema. Puesto que en el enunciado no se dice nada suponemos que es una unidad dentro de la precisión del aparato de medida; es decir, que asignamos $\sigma_i^2 = 0{,}01$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{M_{11}^{-1}} \\ \sqrt{M_{22}^{-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0002 \\ 0{,}007 \end{pmatrix}$$

Apartado 2.

Se nos pide en este apartado que hagamos una transformación de los datos de forma que entre ellos exista una dependencia de forma lineal. Como ya hemos visto en el apartado anterior esto se puede conseguir sin más que tomando el logaritmo neperiano de la temperatura y representando en función del tiempo. A continuación podemos hacer un ajuste por medio de un regresión lineal. Recordamos aquí las fórmulas que se usan para estimar los parámetros de la recta, que son pendiente y ordenada en el origen como función de los datos $\{x_i, y_i\}$ de la tabla.

Tabla1. Medidas de $Ln(T)$ frente a t para la lámina negra.	
t(s)	L.Roja
5	5.6836
10	5.6839
15	5.6845
20	5.6852
25	5.6856
30	5.6863
35	5.6868
40	5.6872
45	5.6879
50	5.6884

$$a = \frac{n\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{n\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_i y_i - a\sum_i x_i}{n}$$

Además, podremos estimar los errores en los valores de a y b mediante las expresiones:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i \left(y_i - a x_i - b\right)^2}{n-2}}$$

$$\Delta a = \frac{\sqrt{n}\sigma}{\sqrt{n\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}}$$

$$\Delta b = \Delta a\sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n}}$$

Y podremos calcular el coeficiente de regresión de la recta con la expresión:

$$r = \frac{(\sum_i x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i x_i - \bar{x}}\sqrt{\sum_i y_i - \bar{y}}}$$

Donde $\bar{x}$ y $\bar{y}$ representan los valores medios de cada una de las variables. Haciendo el ajuste obtenemos los siguientes valores:

$$a = (113 \pm 6) \times 10^{-6}$$

$$b = 5{,}6827 \pm 0{,}0007$$

Apartado 3.

Tomamos ahora los valores de la tabla 2 que nos dan en el enunciado. Denominamos x_i a los valores dados para la lámina negra (cuyo valor medio será $\bar{x}$) e y_i (valor medio $\bar{y}$) los que nos han dado para la lámina roja. Usando los datos de la tabla obtenemos:

$$\bar{x} = 0{,}956 \qquad \bar{y} = 0{,}974$$

Para la covarianza se cumple:

$$s^2(\bar{x} - \bar{y}) = s^2(\bar{x}) - s^2(\bar{y}) = \frac{s^2(x)}{n_x} - \frac{s^2(y)}{n_y} \qquad s(\bar{x} - \bar{y}) = 0{,}037$$

Para que las dos láminas se hayan calentado por igual se debe cumplir: $|\bar{x} - \bar{y}| \leq Z_c s(\bar{x} - \bar{y})$. Si esto no se cumple no se habrán calentado por igual.

operando obtenemos:

$$|\bar{x} - \bar{y}| = 0{,}018 \qquad Z_c s(\bar{x} - \bar{y}) = 0{,}073$$

Es decir que,

$$|\bar{x} - \bar{y}| < Z_c s(\bar{x} - \bar{y})$$

Por tanto la conclusión es que las láminas se han calentado por igual.