Mecánica I

CURSO 2013-14

UNIVERSIDAD DE MURCIA

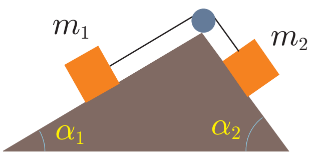
Departamento de Física

Relación 3: Mecánica analítica

Trabajos virtuales

1. Dos partículas de masas m_1 y m_2 están colocadas sobre un plano inclinado doble sin rozamiento y están unidas por una cuerda inextensible de masa despreciable que pasa por una polea ideal, como se muestra en la figura. Mediante el principio de los trabajos virtuales demuestre que en el equilibrio se debe cumplir que:

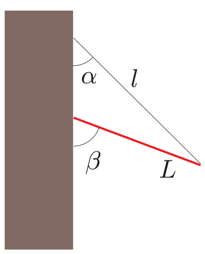
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{m_2}{m_1}$$



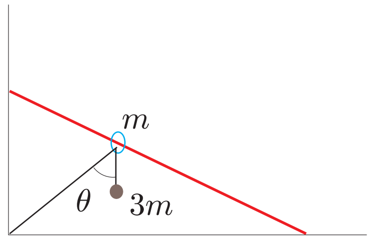
2. Una varilla uniforme de masa m y longitud L tiene un extremo apoyado sobre una pared lisa y el otro sostenido mediante una cuerda indeformable de longitud l tal como se muestra en la figura. Considerando que el plano formado por la varilla y la cuerda es vertical y perpendicular a la pared, demuestre que en equilibrio se cumple que:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{4L^2 - l^2}}{l\sqrt{3}}$$

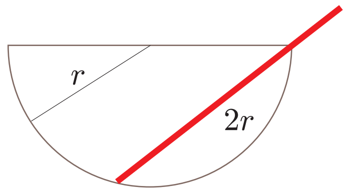
$$\sin\beta = \frac{\sqrt{4L^2 - l^2}}{L\sqrt{3}}$$



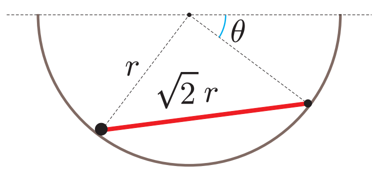
3. Una varilla forma un ángulo de 30 grados con el suelo. Una pequeña anilla de masa m puede deslizar sobre la varilla y es atravesada por un hilo que tiene uno de sus extremos unido al suelo y del otro cuelga una partícula de masa $3m$ (ver figura). Utilizando el principio de los trabajos virtuales determine el ángulo θ que forman los dos segmentos de la cuerda en la posición de equilibrio estático. Suponga que la cuerda y la varilla están en el mismo plano.



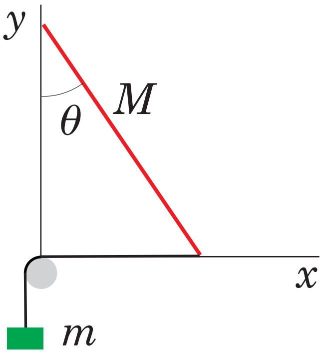
4. Una varilla uniforme de masa m y de longitud $2r$ descansa sobre un cuenco semiesférico liso de radio r, tal como se muestra en la figura. Asumiendo que el cuenco se encuentra fijo y su borde es horizontal, determine la longitud de la porción de varilla que permanece fuera del cuenco en la posición de equilibrio estático.



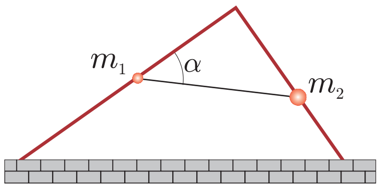
5. Dos partículas de masas m y $2m$ están conectadas por una varilla de masa despreciable. El sistema puede deslizar sin fricción por un cuenco semiesférico de radio r, como se muestra en la figura. Utilice el método de los trabajos virtuales para determinar el valor del ángulo θ en la posición de equilibrio estático.



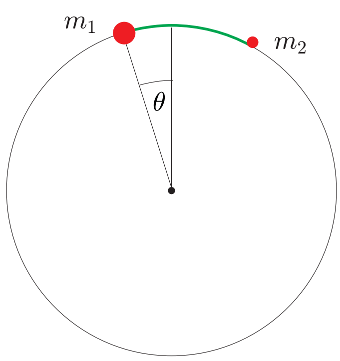
6. Una barra de peso de masa M está obligada a deslizar sus extremos por dos rectas tal como se indica en la figura. Determine la posición de equilibrio mediante el método de los trabajos virtuales sabiendo que de la polea O cuelga una masa m que arrastra el extremo inferior de la barra hacia el origen O.



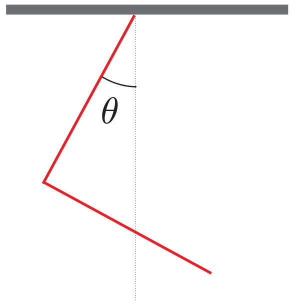
7. Un marco de alambre en forma de triángulo rectángulo se coloca en un plano vertical como se indica en la figura. Dos partículas de masas $m_1 = 0,1$ kg y $m_2 = 0,3$ kg, unidas por un hilo inextensible, se deslizan sin rozamiento por el alambre. Mediante el método de los trabajos virtuales, determine el ángulo α en la posición de equilibrio.



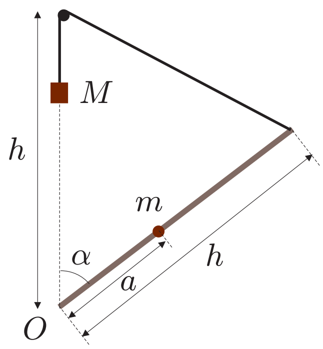
8. Dos masas m_1 y m_2 unidas por un hilo inextensible de masa despreciable y longitud ℓ se encuentran en equilibrio situadas en lo alto de una esfera de radio R. En ausencia de rozamiento, si la posición de la masa m_1 forma un ángulo θ con la vertical, determine el valor de m_2. Utilice el método de los trabajos virtuales.



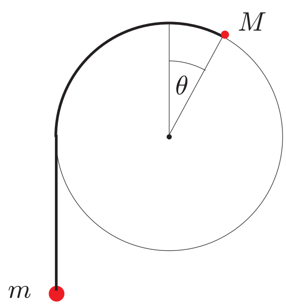
9. Una varilla de longitud L se dobla por la mitad en ángulo recto y se cuelga de uno de sus extremos, tal como se muestra en la figura. Mediante el método de los trabajos virtuales determinar el valor de θ cuando la varilla se encuentra en equilibrio.



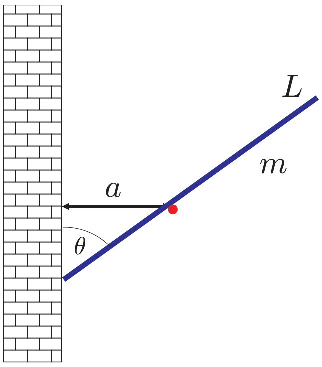
10. En el sistema de la figura, una varilla de masa despreciable y longitud h lleva adherida una masa m a una distancia a de su extremo O. La varilla puede girar alrededor de este punto, mientras que al otro extremo se le fija un hilo inextensible que se hace pasar por una pequeña polea y de cuyo extremo cuelga una masa M. La polea se encuentra a una altura h del origen O. Mediante el principio de los trabajos virtuales, determine el ángulo de equilibrio α entre la varilla y la vertical en función de los parámetros dados.



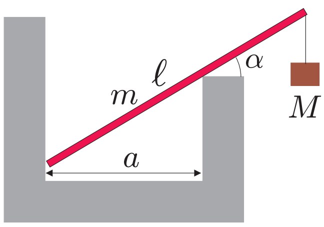
11. Dos partículas de masas M_1 y M_2 están unidas por una cuerda inextensible de masa despreciable. El sistema reposa sobre una superficie cilíndrica lisa (se desprecia el rozamiento) tal como se muestra en la figura. Mediante el método de los trabajos virtuales, determine el ángulo θ para el que el sistema está en equilibrio.



12. Una varilla de longitud L y masa m se encuentra apoyada por uno de sus extremos sobre una pared vertical sin rozamiento, tal como se muestra en la figura. La varilla está apoyada sobre un clavo que está situado a una distancia a de la pared. Determine por el método de los trabajos virtuales el ángulo θ para el que el sistema se encuentra en equilibrio.



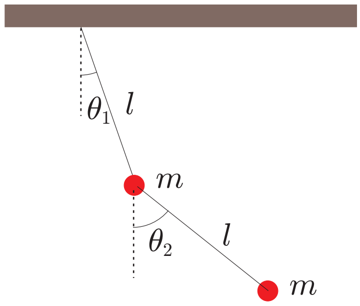
13. Una varilla homogénea de longitud ℓ y masa m es colocada como se indica en la figura. Si de su extremo superior se suspende una masa M, determine la posición de equilibrio de la barra, dada por el ángulo α que forma con la horizontal. Se considera que el rozamiento es nulo en todos los contactos entre la barra y los puntos de apoyo.



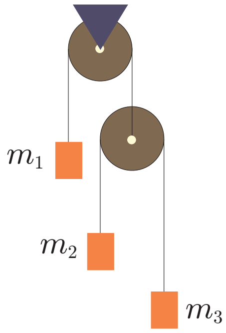
Formulación de Lagrange

14. Una partícula se mueve en un plano bajo la acción de una fuerza $f = -Ar^{\alpha-1}$ dirigida hacia el origen. A y α son constantes. Elija unas coordenadas generalizadas adecuadas y suponga que el cero de potencial se toma en el origen. Determine las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Diga si se conserva el momento angular y la energía total.

15. En la figura se muestra un péndulo doble. Las masas de las lentejas son iguales iguales a m y las longitudes de las cuerdas son iguales a l. Si las oscilaciones tienen lugar en un plano vertical: (a) Escriba la lagrangiana del sistema. (b) Obtenga las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

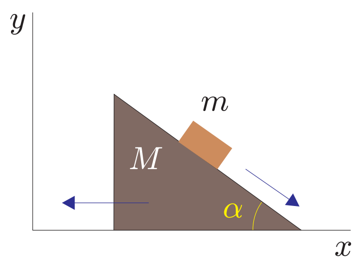


16. En la figura se muestra una máquina de Atwood doble. Suponiendo que las masas de las poleas son despreciables: (a) Elija un sistema de coordenados adecuado y escriba las ecuaciones de Lagrange. (b) Determine las aceleraciones de las masas. (c) Plantee el problema mediante los multiplicadores de Lagrange y determine las tensiones en las cuerdas.

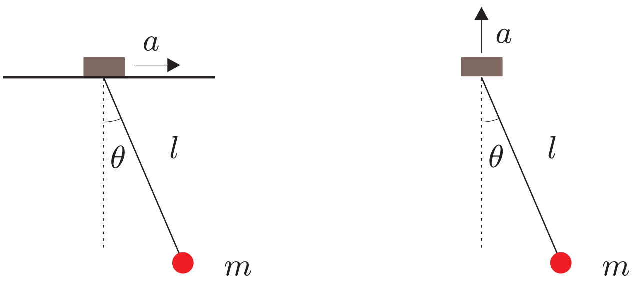


17. Una partícula de masa m se desliza hacia abajo por un plano inclinado un ángulo α, sin rozamiento, de masa M y de longitud L, el cual se encuentra sobre una superficie horizontal sin rozamiento como se indica en la figura. Si la partícula parte de lo alto del plano, demuestre que el tiempo para que alcance el punto más bajo del plano es:

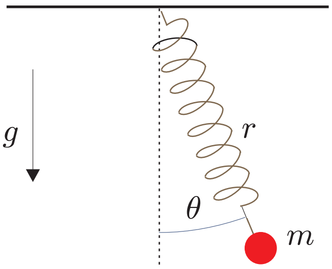
$$t = \sqrt{\frac{2L\left(M + m\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)}{\left(m + M\right) g\,\mathrm{sen}\,\alpha}}$$



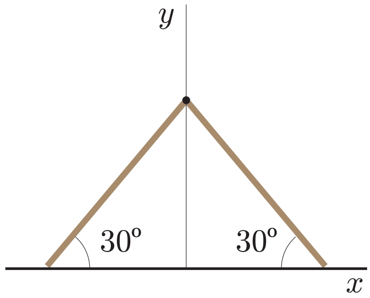
18. Un péndulo simple de masa m y longitud l tiene su punto de suspensión sobre un soporte sin masa que se mueve con aceleración a. Obtenga las ecuaciones de movimiento y el período de las pequeñas oscilaciones alrededor de las posiciones de equilibrio si: (a) el soporte se mueve horizontalmente, (b) se mueve verticalmente.



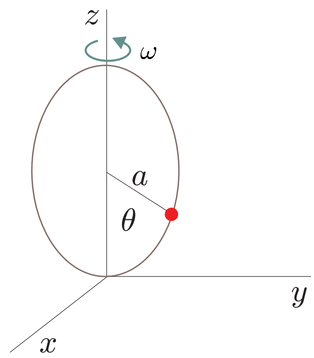
19. Un muelle sin masa de longitud en reposo l_0 tiene una masa puntual m conectada a uno de sus extremos y el otro permanece fijo de manera que el muelle se encuentra colgando bajo el efecto del campo gravitatorio, como se indica en la figura. Si el movimiento del sistema tiene lugar en un plano vertical: (a) Escriba la lagrangiana del sistema. (b) Encuentre las ecuaciones de movimiento de Lagrange usando como variables θ y $\lambda = (r - r_0)/r_0$, en donde r_0 es la longitud en reposo cuando del muelle cuelga la masa m; use $\omega_s^2 = k/m$ y $\omega_p^2 = g/r_0$. (c) Discuta la aproximación de primer orden al movimiento cuando λ y θ son pequeños con las condiciones iniciales $\theta = 0$, $\dot{\lambda} = 0$, $\lambda = A$, $\dot{\theta} = \omega_p B$ en $t = 0$, siendo A y B constantes.



20. Dos varillas de masa m y longitud l están conectadas mediante una bisagra sin rozamiento y un hilo, como se muestra en la figura. El sistema permanece en reposo sobre una superficie sin fricción. En el instante inicial $t = 0$ se corta el hilo. Despreciando la masa de la bisagra y del hilo: (a) Encuentre la velocidad de la bisagra cuando golpea el suelo. (b) Calcule el tiempo que tarda la bisagra en llegar al suelo.



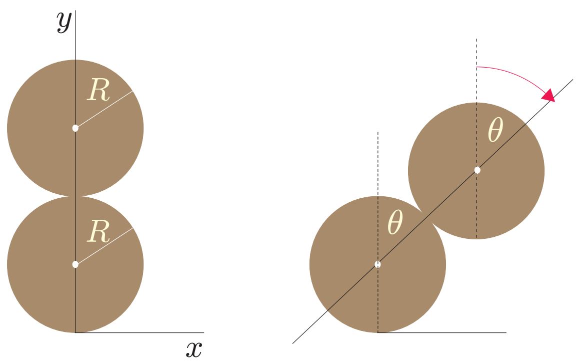
21. Una cuenta de masa m desliza sin rozamiento sobre un aro metálico de radio a que gira con velocidad angular ω alrededor de un diámetro vertical, como se muestra en la figura: (a) Escriba la lagrangiana del sistema. (b) Escriba la ecuación de Lagrange. (c) Determine las posiciones de equilibrio de la cuenta. (d) Calcule las frecuencias de las oscilaciones de pequeña amplitud alrededor de las posiciones de equilibrio.



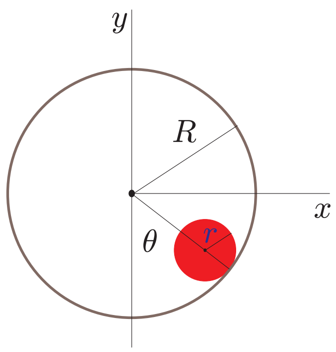
22. Un cilindro sólido de radio R y masa M descansa sobre una superficie horizontal. Sobre él se apoya un cilindro idéntico, como se muestra en la figura. Si se desplaza ligeramente el sistema de su posición de equilibrio, ambos cilindros ruedan sin deslizar. (a) Escriba la lagrangiana del sistema. (b) Determine las constantes del movimiento. Muestre que hasta que los dos cilindros se mantienen en contacto:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{12g\,(1 - \cos\theta)}{R\,(17 + 4\cos\theta - 4\cos^2\theta)}$$

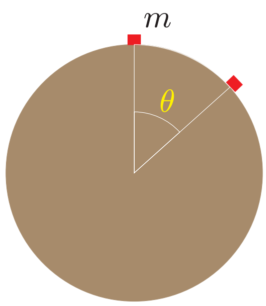
en donde θ es el ángulo que forma el plano que contiene los ejes con la vertical.



23. Un cilindro sólido homogéneo de radio r y masa m rueda sin deslizar en el interior de otro cilindro de radio R que se encuentra en reposo, como se muestra en la figura. (a) Determine la lagrangiana del sistema. (b) Encuentre el período de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable. (c) Si el cilindro pequeño se deja suelta desde el reposo desde una ángulo θ_0 desde la vertical, determine la fuerza total que ejercerá sobre el cilindro grande cuando pasa por el punto mas bajo de la trayectoria.

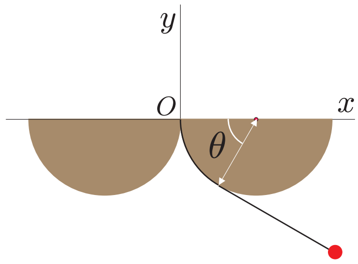


24. Un masa pequeña m se desliza sin rozamiento por la superficie de una esfera, partiendo del reposo desde el punto más alto de la misma. Demuestre que el objeto se separa de la esfera cuando ha descrito un ángulo $\cos\theta = \frac{2}{3}$.

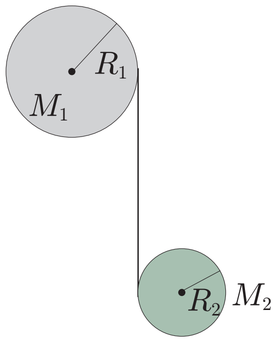


25. Un péndulo consiste en una partícula de masa m y una cuerda ideal sin masa de longitud $2R$. Conforme aumenta el ángulo θ, la cuerda se enrolla en uno de los cilindros de radio R adyacentes al punto O de suspensión, tal como se muestra en la figura:

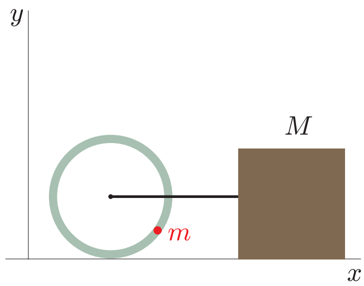
a) Obtenga la ecuación diferencial para θ.
b) Suponiendo que las condiciones iniciales son: $\theta(0) = 0$ y $\dot{\theta}(0) = (g/2R)^{1/2}$, encuentre el valor máximo del ángulo $\theta_{\max}$.



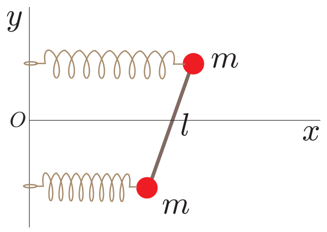
26. Dos discos uniformes de masas M_1 y M_2 y radios R_1 y R_2, respectivamente, están situados en un plano vertical unidos por una cuerda alrededor de sus circunferencias, tal como se indica en la figura.
El primer disco gira sin fricción alrededor un eje de rotación horizontal que pasa por su centro. Utilice el formalismo de Lagrange para establecer las ecuaciones del movimiento y determine la aceleración del centro de masa del segundo disco si éste cae libremente.



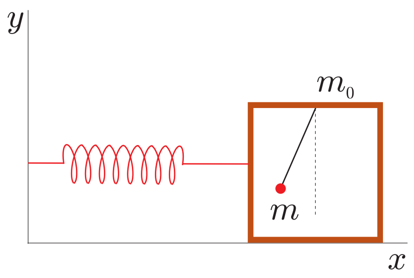
27. Un bloque de masa M está rígidamente unido a un tubo hueco de masa despreciable que tiene forma circular de radio a, como se muestra en la figura. Una partícula de masa m está confinada a moverse dentro del tubo. Determine las ecuaciones del movimiento y encuentre una solución para separaciones pequeñas de la partícula de su posición más baja.



28. Encuentre, utilizando el formalismo de Lagrange, las ecuaciones del movimiento de una varilla situada en un plano horizontal como se muestra en la figura. La masa de la varilla es despreciable, su longitud es l, su punto central no puede abandonar el eje OX y lleva adosada a sus extremos dos masas iguales m. Los muelles que mantienen unidas las masas al eje OY se mantienen en todo momento paralelos al eje OX y su constante elástica es k.(Suponga que la longitud de los muelles en reposo es nula.)



29. Una caja de masa m_0 soporta un péndulo simple de masa m y longitud l, como se indica en la figura La caja puede deslizar sobre una superficie sin rozamiento y se encuentra sujeta a una pared mediante un muelle de constante elástica k. Determine las ecuaciones del movimiento del sistema. Encuentre las ecuaciones linealizadas para el caso de desplazamientos de la caja y del péndulo pequeños respecto de su posición de equilibrio.



30. Una partícula de masa m y carga eléctrica q se encuentra suspendida de un hilo ideal e inextensible de masa despreciable. El sistema se encuentra entre las placas de un condensador de placas paralelas cargado a un potencial V. Determine el período de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio en función de la distancia d entre las placas del condensador.

31. Una partícula de masa m puede deslizar sin fricción dentro de un tubo hueco rígido que se encuentra unido con un eje vertical formando un ángulo de $\theta = 60^o$. El sistema se encuentra girando a una velocidad angular constante $\omega = \sqrt{2g/r_0}$. Determine la ecuación diferencial del movimiento. Si las condiciones iniciales son $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = -\sqrt{gr_0/2}$, determine la distancia mínima a la que puede encontrarse la partícula, r_{min}.

32. Una pequeña cuenta desliza sin fricción por un alambre parabólico de forma $y = ax^2$. Utilizando el formalismo de Lagrange determine la ecuación del movimiento de la cuenta. Repita el problema utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange y determine las fuerzas generalizadas de ligadura Q_x y Q_y.

33. Una partícula de masa m está obligada a moverse bajo la acción de la gravedad sin rozamiento en el interior de un paraboloide de revolución cuyo eje es vertical.

(a) Encuentre las ecuaciones del movimiento.

(b) Determine la condición para que se tenga una órbita circular estable.

(c) Halle el período de las pequeñas oscilaciones respecto a este movimiento circular.

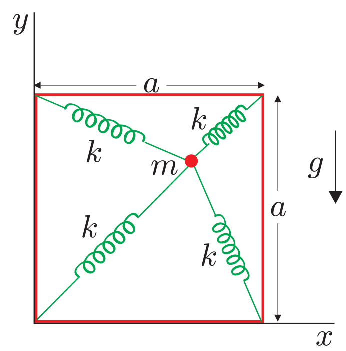
34. Una partícula de masa m se mueve sin rozamiento por la superficie de un tablero cuadrado de laso a, colocado verticalmente, bajo la acción de cuatro muelles de constante elástica k y longitud natural en reposo despreciable.

(a) Escriba la lagrangiana del sistema.

(b) Determine las constantes de movimiento.

(c) Encuentre las ecuaciones del movimiento.

(d) Resuelva las ecuaciones de movimiento si en el instante inicial la partícula se suelta, sin velocidad inicial, desde el vértice superior derecho.

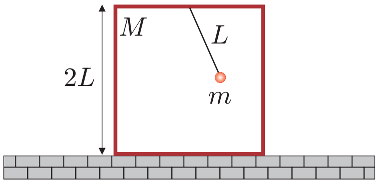


35. Una caja hueca de masa M y de altura $2L$ puede deslizarse sin fricción a lo largo de un plano horizontal. En el punto medio del techo de la caja se cuelga un péndulo de masa m y longitud L:

(a) Determine el lagrangiano del sistema y discuta las cantidades que se conservan.

(b) Encuentre las ecuaciones del movimiento.

(c) Resuelva las ecuaciones del movimiento si inicialmente la caja lleva inicialmente una velocidad v_0 y si el péndulo inicia su movimiento desde una posición de amplitud máxima α que supondremos pequeña.

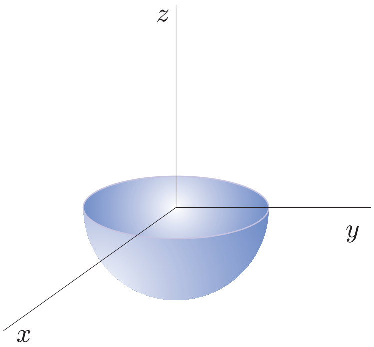


36. Una semiesfera homogénea y maciza de radio R y masa M es apoyada por su lado curvo sobre un plano horizontal. La esfera rueda sin deslizar por el plano.

(a) Obtener el Lagrangiano de este sistema.

(b) Calcular el periodo de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio.

DATOS: Los momentos de inercia de la semiesfera respecto de los ejes mostrados en la figura son $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = 2MR^2/5$.



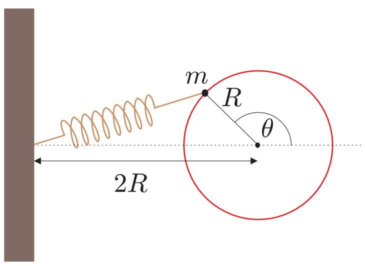
37. Una masa m se encuentra unida a un muelle de constante elástica k, tal como se muestra en la figura. La masa puede deslizar por una circunferencia vertical de radio R. Si la longitud natural del muelle es despreciable y la distancia entre el extremo del muelle que está fijo a la pared y el centro de la circunferencia es $2R$:

(a) Obtener el Lagrangiano de este sistema y estudiar las cantidades que se conservan.

(b) Obtener la ecuación del movimiento.

(c) Encontrar la solución a la ecuación del movimiento alrededor del punto $\theta = 0^{\circ}$.

(d) Encontrar la solución a la ecuación del movimiento alrededor del punto $\theta = 180^{\circ}$.

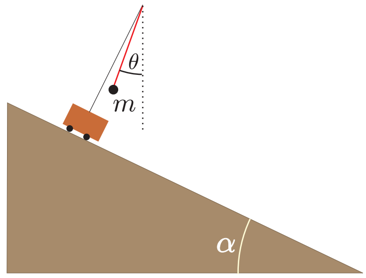


38. Un carrito desciende con una aceleración constante a por un plano inclinado un ángulo α con respecto a la horizontal. El carrito dispone de un mástil al que se sujeta un péndulo formado por un hilo inextensible de longitud ℓ y una masa m, como se muestra en la figura:

(a) Determinar la lagrangiana del sistema.

(b) Encontrar las ecuaciones de movimiento.

(c) Hallar la posición de equilibrio del péndulo y el período de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio.



39. Una varilla de longitud 2ℓ se sujeta por uno de sus extremos a un muelle de constante elástica k que cuelga verticalmente. Suponiendo que el movimiento tiene lugar en un plano vertical y que el muelle no se mueve lateralmente, determine la ecuación del movimiento de la varilla.

40. Un sistema con dos grados de libertad se describe mediante dos coordenadas generalizadas q_1 y q_2. El lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + q_2\dot{q}_2^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_1 q_2 + 2q_1 - q_2$$

(a) Determine el punto de equilibrio del sistema.

(b) En el caso de oscilaciones pequeñas alrededor de la posición de equilibrio, calcule las frecuencias características del sistema.

(c) Encuentre los modos normales de vibración.

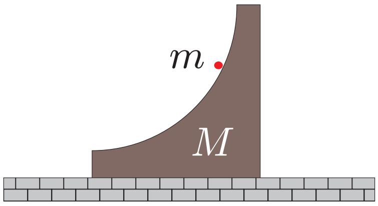
41. Una partícula de masa m se mueve sin rozamiento por la superficie de una cuña circular de masa M. La cuña se encuentra sobre una mesa horizontal, siendo nulo el rozamiento entre la cuña y la mesa.

(a) Determine el lagrangiano del sistema.

(b) Estudie las cantidades conservadas.

(c) Encuentre las ecuaciones del movimiento.

(d) Determine la velocidad de la masa m al abandonar la cuña, si inicialmente las dos masas se encuentran en reposo y la masa m se encuentra en la parte más alta de la cuña.

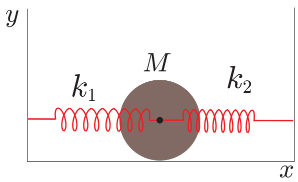


42. Una varilla de longitud ℓ se encuentra apoyada sobre una pared formando un ángulo un ángulo θ_0 con la horizontal. En un determinado momento se suelta, de manera que comienza a caer. Si no hay rozamiento entre la varilla y la pared, ni tampoco entre la varilla y el plano horizontal:

(a) Determine el tiempo que transcurre hasta que la la varilla forma un ángulo θ con la horizontal (dejar como una integral). (b) Determine el ángulo θ para el cual, la varilla pierde contacto con la pared.

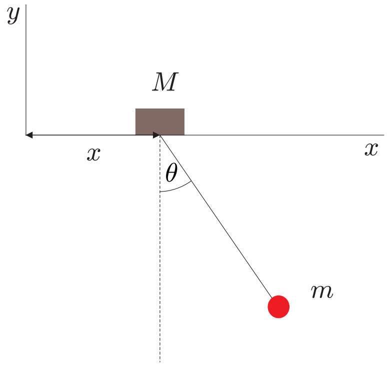
43. Un disco de masa M y radio R se encuentra sujeto mediante dos muelles de constantes k_1 y k_2 a dos paredes, tal como se muestra en la figura. Si el disco rueda sin deslizar sobre el plano horizontal:

(a) Determine la lagrangiana del sistema.
(b) Encuentre y resuelva la ecuación del movimiento del disco.



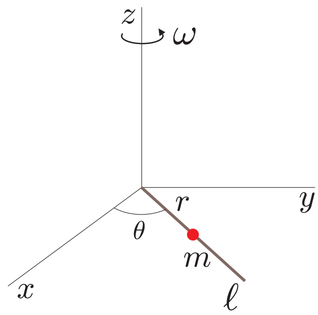
44. Una masa m está unida mediante una varilla de masa despreciable y longitud l a un bloque de masa M, tal como se muestra en la figura. El bloque puede deslizar sin fricción por el plano horizontal. Asumiendo que el movimiento tiene lugar en el plano xy,

(a) Escriba la Lagrangiana del sistema.
(b) Determine las ecuaciones de movimiento.
(c) Escriba las ecuaciones de movimiento en el caso de pequeñas oscilaciones del péndulo alrededor de la posición de equilibrio.
(d) Resuelva en este caso las ecuaciones de movimiento y determine $x(t)$ y $\theta(t)$ si las condiciones iniciales son $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $\theta(0) = \theta_0$ y $\dot{\theta} = \Omega$.



45. Una varilla lisa de longitud ℓ gira en un plano horizontal con un velocidad angular ω constante alrededor de un eje perpendicular a la varilla que pasa por uno de sus extremos. Una cuenta de masa m se encuentra situada en el origen y se le imprime una velocidad inicial $\omega\ell$ a lo largo de la varilla.

(a) Determine el tiempo que tarda en alcanzar la cuenta el extremo de la varilla.
(b) Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange determine la fuerza ejercida por la varilla sobre la cuenta.



46. Sobre un cilindro de radio R se coloca una plancha homogénea de espesor a.

(a) Demuestre que la condición de equilibrio estable de la plancha, bajo la hipótesis de que no hay rozamiento, es $R > a/2$.
(b) Determine la pulsación de las pequeñas oscilaciones.
(c) Demuestre que para $\theta = 0$ hay un mínimo de la energía potencial si $R > a/2$ pero no si $R < a/2$.

47. Consideremos un disco delgado formado por dos mitades homogéneas unidas a lo largo de un diámetro del disco. Si la densidad de una de las mitades del disco es ρ y la de la otra 2ρ, determine la lagrangiana del sistema cuando el disco rueda sin deslizar a lo largo de una superficie horizontal.

48. Una varilla uniforme de masa m y longitud ℓ puede deslizar sin fricción sobre un plano horizontal. Utilizando como coordenadas generalizadas los ángulos θ (ángulo que forma la varilla con la vertical) y ϕ

(ángulo girado por la varilla alrededor del eje vertical), determine:

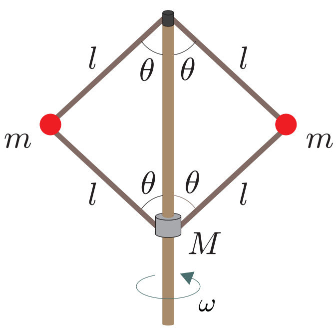
(a) Las ecuaciones diferenciales para θ y ϕ.

(b) La fuerza que el plano ejerce sobre la varilla en el instante inicial, si las condiciones iniciales son: $\theta(0) = \pi/4$, $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, con $\omega_0 < 4\sqrt{2}g/\ell$.

Formulación de Hamilton

49. Una partícula bajo la acción de la gravedad desliza sobre un paraboloide de revolución liso cuyo eje es vertical. Utilizando la distancia al eje r y el ángulo acimutal φ como coordenadas generalizadas: (a) Escriba la lagrangiana del sistema. (b) Encuentre los momentos generalizados y la correspondiente hamiltoniana. (c) La ecuación del movimiento para la coordenada r como función del tiempo. (d) Si $\dot{\varphi} = 0$ muestre que la partícula puede realizar oscilaciones pequeñas alrededor del punto más bajo del paraboloide y encuentre la frecuencia de esas oscilaciones.

50. Un regulador de bolas es un dispositivo que consiste en dos masas m conectadas por brazos de longitud l y una masa M, tal como se muestra en la figura. El dispositivo gira alrededor de un eje sobre el que la masa M puede deslizar sin fricción hacia arriba y hacia abajo. Despreciando la masa de los brazos, la resistencia del aire y asumiendo que el diámetro de la masa M es despreciable: (a) Escriba la lagrangiana y la hamiltoniana del sistema. (b) Calcule la posición de equilibrio de la masa M. (c) Determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio.



51. Dos partículas de masas m_1 y m_2 están unidas por una cuerda de longitud l. La partícula de masa m_1 está obligada a moverse sobre la superficie exterior de un cono, siendo α el ángulo que la pared del cono forma con la vertical. La cuerda pasa a través de un orificio situado en el pico del cono, de manera que la masa m_2 cuelga libremente dentro del cono. Despreciando el rozamiento:

a) Escriba la lagrangiana del sistema y las ecuaciones de movimiento para cada una de las coordenadas generalizadas.

b) Determine el hamiltoniano del sistema.

52. Un péndulo está formado por una masa m que cuelga de un hilo elástico de longitud en reposo l y de constante elástica k. El punto de sujeción del péndulo se mueve verticalmente hacia arriba con aceleración constante a. Determine:

a) La lagrangiana del sistema.

b) El hamiltoniano.

c) La ecuaciones de movimiento.

d) El período de las pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio.

53. Una corteza cilíndrica de radio r y masa M puede rodar sin deslizar sobre una superficie horizontal. Dentro del cilindro se coloca una pequeña masa m que puede deslizar sin fricción dentro del cilindro.

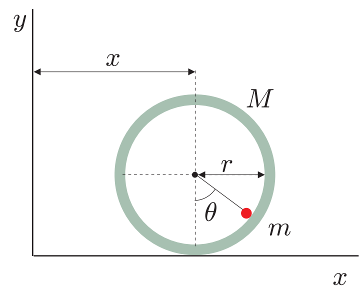
(a) Escriba la lagrangiana del sistema utilizando las variables x y θ.

(b) Determine el hamiltoniano del sistema.

(c) Especifique las constantes de movimiento.

(d) En el instante $t = 0$ el cilindro se encuentra en reposo con $x = 0$. La masa m se coloca en $\theta = \theta_0$ y se suelta. Determine los valores de las constantes de movimiento.

(e) Para las condiciones dadas en el apartado anterior, y suponiendo ángulos pequeños, determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones.

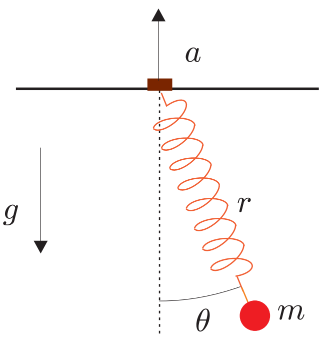


54. Un péndulo consiste en una masa m unida a un muelle de longitud en reposo ℓ_0 y de constante elástica k, tal como se muestra en la figura. El punto de suspensión del péndulo asciende verticalmente con aceleración constante a:

(a) Obtener las ecuación del movimiento.

(b) Determine el Hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton del movimiento. ¿Coincide el Hamiltoniano con la energía total del sistema?

(c) Calcule el período de las pequeñas oscilaciones.



55. El punto de suspensión de un péndulo plano gira con velocidad angular constante ω, en sentido horario, en una circunferencia vertical de radio R.

(a) Obtener el Lagrangiano de este sistema y estudiar las cantidades conservadas.

(b) A partir del Lagrangiano, calcular la ecuación o ecuaciones del movimiento.

(c) Resolver esta ecuación o ecuaciones en el supuesto de oscilaciones pequeñas y una rotación ŞlentaŤ del punto de suspensión del péndulo plano ($R\omega^2 \ll g$).

(d) Obtener el Hamiltoniano de este sistema.

56. El hamiltoniano de un sistema con un grado de libertad tiene la forma:

$$H(q,p,t) = \frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{2} - qpe^{-t} + \frac{q^2}{2}e^{-t}(1+e^{-t})$$

(a) Determinar las ecuaciones de Hamilton de movimiento y encontrar el movimiento del sistema si las condiciones iniciales son $q(0) = p(0) = 0$.

(b) Encontrar la lagrangiana del sistema.

(c) Resuelva la ecuación del movimiento si las condiciones iniciales son $q(0) = 1$ y $\dot{q}(0) = 0$.

(d) Demostrar que la lagrangiana puede escribirse como:

$$L(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q}) + \frac{\mathrm{d}G(q,t)}{\mathrm{d}t}$$

donde la lagrangiana independiente del tiempo es la de un oscilador armónico:

$$L(q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2}$$

Determinar la función $G(q,t)$.

57. Un péndulo simple se compone de una masa m en el extremo de una cuerda de longitud r. Durante el movimiento, la longitud de la cuerda cambia de manera que $\dot{r} = v_0$ es constante.

(a) Determinar el hamiltoniano del sistema.

(b) Diga si la energía mecánica coincide o no con el hamiltoniano y explique si la energía mecánica y/o el hamiltoniano se conservan.

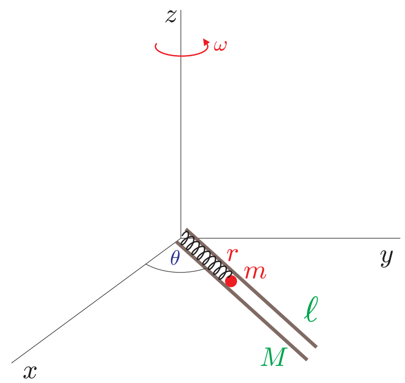
58. Una barra hueca de longitud ℓ y masa M se encuentra unida a un punto fijo situado en el origen. Por la barra puede moverse una cuenta de masa m que se encuentra sujeta al origen mediante un muelle de constante elástica k, como se muestra en la figura. Se hace girar el sistema con velocidad angular constante ω alrededor del eje vertical.

(a) Escriba la Lagrangiana del sistema.

(b) Encuentre el Hamiltoniano del sistema.

(c) Encuentre las ecuaciones de Hamilton.

(d) Discuta si el hamiltoniano es igual a la energía y si es una constante de movimiento.



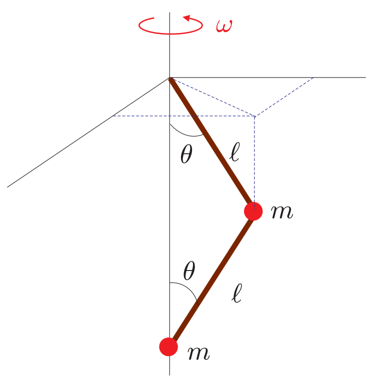
59. Una masa m se encuentra unida mediante dos varillas sin masa de longitud ℓ un punto fijo situado en el origen y a una cuenta de masa m que puede deslizar a lo largo del eje vertical, como se muestra en la figura. Se hace girar el sistema con velocidad angular constante ω alrededor del eje vertical.

(a) Utilice como coordenada generalizada el ángulo θ que forma la varilla con la vertical y escriba la Lagrangiana del sistema.

(b) Determine las posiciones de equilibrio para rotaciones lentas y rápidas y discuta la naturaleza de estas posiciones de equilibrio.

(c) Encuentre el Hamiltoniano del sistema.

(d) Discuta si el hamiltoniano es igual a la energía y si es una constante de movimiento.



60. Una masa m se mueve sobre una superficie cilíndrica de radio R. La masa se encuentra sujeta a un muelle de constante elástica k sujeto por el otro extremo al centro del cilindro.

(a) Determine la lagrangiana del sistema.
(b) Determine el hamiltoniano del sistema.
(c) A partir del Hamiltoniano, encuentre las ecuaciones de movimiento.
(d) Determine las constantes de movimiento.