Anexo I

El magnetismo en la materia

De la misma forma que un campo eléctrico intenso tiende a alinear los momentos dipolares eléctricos de un material situado en su interior, cuando se sitúa un material dentro de un campo magnético intenso, como el de un solenoide, el campo de éste tiende a alinear los momentos dipolares magnéticos en el interior del material (la posición de mínima energía potencial), el cual se magnetiza. Este proceso se cuantifica por la **imanación** del material ($\vec{M}$), definido mediante el **momento dipolar magnético neto** ($d\vec{\mu}$) por unidad de volumen de material (dV), por lo que si queremos propiedades puntuales tan sólo debemos hacer tender a cero los elementos de volumen:

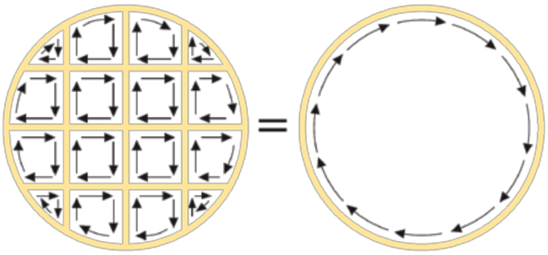
$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\vec{\mu}}{\Delta V} = \frac{d\vec{\mu}}{dV} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mu}_i$$

Donde:

- $\Delta\vec{\mu}$: suma vectorial de los momentos magnéticos de los átomos contenidos en un elemento de volumen ΔV.
- $d\vec{\mu}$: momento magnético elemental contenido en un volumen elemental dV.

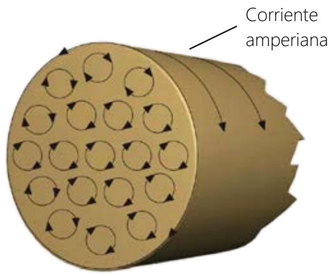
Si $\vec{\mu}_i$ es el momento magnético de cada átomo o dipolo magnético y $n = N/V$ es el número de átomos o dipolos magnéticos por unidad de volumen, la expresión anterior toma la forma:

$$\vec{M} = n \cdot \vec{\mu}_i$$



Mucho antes de conocerse la estructura atómica o molecular, Ampere propuso un modelo del magnetismo en el cual la imanación de los materiales era debida a corrientes circulares microscópicas dentro del material imanado. Actualmente, se sabe que estas corrientes circulares constituyen un modelo clásico para el movimiento orbital y el espín de electrones.

Consideremos un cilindro de un material imanado de manera uniforme. La figura muestra las **corrientes atómicas circulares** en el cilindro con sus momentos magnéticos alineados a lo largo del eje del cilindro. Debido a la cancelación de las corrientes circulares vecinas, la corriente neta en cualquier punto interior del material es cero y el único resultado es una **corriente neta sobre la superficie** del mismo. Esta corriente superficial, llamada **corriente de imanación** (I_m), es semejante a la corriente real de los arrollamientos del solenoide.

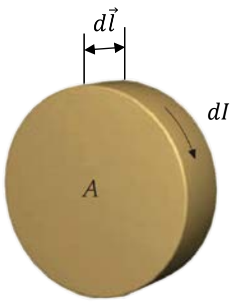


Tomemos una pequeña sección en forma de **disco** de área transversal A, longitud dl y volumen $dV = A \cdot dl$. Sea dI la **corriente de imanación sobre la superficie** del **disco**. El módulo del momento dipolar magnético del disco es el mismo que el de una corriente circular de área A que transporta una corriente dI:

$$d\mu = A \cdot dI$$

El módulo de la imanación M del **disco** es el momento magnético por unidad de volumen:

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\mu}{dV} = \frac{A \cdot dI}{A \cdot dl} = \frac{\boldsymbol{dI}}{\boldsymbol{dl}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{M}} = \frac{\boldsymbol{dI}}{\boldsymbol{d\vec{l}}}$$



De lo que se deduce que el vector magnetización ($\vec{M}$) es igual a la corriente de imanación (dI) por unidad de longitud ($d\vec{l}$), a lo largo de la superficie del material imanado. Sus unidades en el SI son: A/m. Si expresamos M mediante la contribución de cada dipolo magnético:

$$M = \frac{dI}{dl} = \frac{n \cdot dI_i \cdot A}{dl \cdot A} = \frac{n \cdot d\mu_i}{dV} = \frac{d\mu}{dV}$$

Si considerásemos todo el cilindro el momento dipolar magnético neto sería $\mu = A \cdot I$. El vector de imanación ($\vec{M}$) y el diferencial $d\vec{l}$ son paralelos, por lo que la corriente de imanación por unidad de longitud sería:

$$\int_0^l \vec{M} \cdot d\vec{l} = \int_0^l M \cdot dl = I$$

Como se considera que el núcleo de la espira es homogéneo y de la misma sección a lo largo de toda su longitud, el módulo de la imanación es constante:

$$M \int_0^l dl = I \quad \Rightarrow \quad M \cdot l = I \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M = \frac{I}{l}}$$

Intensidad de campo magnético y susceptibilidad magnética

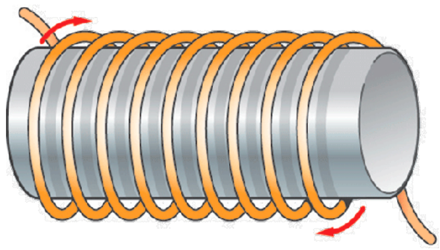
Sea un solenoide largo por el que circula una corriente eléctrica que produce en su interior un campo magnético uniforme de magnitud:

$$B_0 = \mu_0 \cdot nI_e = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I_e \qquad \Rightarrow$$

N: número de vueltas del solenoide

l: longitud del solenoide

Supongamos que se introduce en su interior un cilindro de un material que se imana por la influencia del campo magnético del solenoide, adquiriendo una imanación $\vec{M}$ paralelo al eje del solenoide.



El efecto de la magnetización es el mismo que si el cilindro transportara una corriente superficial por unidad de longitud de módulo M. Esta corriente es semejante a la transportada por un solenoide enrollado de forma compacta.

Para un solenoide, la corriente por unidad de longitud es nI_e, siendo $n = N/l$ el número de vueltas por unidad de longitud e I_e la corriente en cada vuelta. El módulo del campo magnético dentro del cilindro y lejos de los extremos, viene dado por la Ley de Ampère de manera que:

$$\oint \vec{B}_m \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I$$

En donde I es la corriente total a través del área limitada por la trayectoria de integración en el material, por lo que, haciendo una correlación con el solenoide, se verifica que $I = N \cdot I_m$. Conocemos que el campo magnético ($\vec{B}$) y el diferencial $d\vec{l}$ son paralelos, por lo que si integramos:

$$B_m \cdot l = \mu_0 \cdot I \quad \Rightarrow \quad B_m = \mu_0 \cdot \frac{I}{l} = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I_m}{l}$$

Podemos ver la correlación que existe con la expresión del solenoide, y con la definición del vector de imanación:

$$\frac{I}{l} = M = nI_e = nI_m$$

Por lo tanto, el campo magnético generado por el cilindro imanado es:

$$B_m = \mu_0 \cdot M \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_m = \mu_0 \cdot \vec{M}$$

El campo magnético aplicado por el solenoide ($B_0 = \mu_0 nI$) imana el material, de modo que éste adquiere una imanación $\vec{M}$. El campo magnético resultante en un punto interior del solenoide y lejos de los extremos, debido a la corriente en el solenoide más la del material imanado, es:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \vec{B}_0 + \mu_0 \cdot \vec{M}$$

En los materiales paramagnéticos y ferromagnéticos, $\vec{M}$ posee la misma dirección y sentido que $\vec{B}_0$. En los materiales diamagnéticos, $\vec{M}$ se opone a $\vec{B}_0$. Por lo tanto, en los primeros la imanación es proporcional al campo magnético externo $\vec{B}_0$, lo que hace que se alineen sus momentos dipolares magnéticos, de manera que se verifica:

$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

Donde:

- χ_m: es un número adimensional llamado susceptibilidad magnética.

Por lo tanto, la expresión del campo magnético neto en el interior del solenoide quedaría:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \cdot \chi_m \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \vec{B}_0 + \chi_m \vec{B}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \cdot (1 + \chi_m)$$

Otra forma de medir el campo magnético es mediante la denominada intensidad de campo magnético ($\vec{H}$), que se define como:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

La unidad de la intensidad de campo es el Amperio por metro (A/m), recordemos que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ N/A^2$. Esta relación lineal es válida de forma general excepto para los materiales ferromagnéticos.

En los casos de un solenoide y toroide, siendo $\boldsymbol{n}$ el número de vueltas por unidad de longitud, el módulo de la intensidad del campo magnético es:

$$\begin{cases} B_0 = \mu_0 \cdot nI \\ H = \dfrac{B_0}{\mu_0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H = nI \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = nI \cdot \vec{u}_l$$

La imanación ($\vec{M}$) también puede expresarse en función de la intensidad de campo magnético ($\vec{H}$):

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$$

Por lo tanto, la expresión para el campo magnético neto ($\vec{B}$) en el interior del solenoide con un núcleo cilíndrico, expresada en función de la intensidad de campo magnético ($\vec{H}$) sería:

$$\begin{cases} B = B_0 \cdot (1 + \chi_m) \\ H = \dfrac{B_0}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad B_0 = \mu_0 \cdot H \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot H} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot \vec{H}$$

A partir de la expresión del campo magnético neto, definimos una nueva constante denominada **permeabilidad** del **medio** (μ) que es directamente proporcional a la permeabilidad en el vacío (μ_0) y a la susceptibilidad magnética (χ_m) del medio material:

$$\begin{cases} B = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot H \\ \\ \mu = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \end{cases} \Rightarrow \quad \boldsymbol{B = \mu \cdot H} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

Sin embargo, el parámetro usualmente más usado está definido como la relación de ambas permeabilidades, siendo denominada **permeabilidad relativa** (k_m):

$$\begin{cases} k_m = \dfrac{\mu}{\mu_0} = (1 + \chi_m) \\ \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \cdot (1 + \chi_m) \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \cdot k_m \quad \Rightarrow \quad k_m = \frac{\vec{B}}{\vec{B}_0}$$

Mediante el valor de la susceptibilidad magnética (χ_m) podemos clasificar los materiales entre tres grandes grupos:

$$\mu = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m)$$

1. **Materiales paramagnéticos**. ($\mu > \mu_0$)

   La susceptibilidad magnética (χ_m) será positiva y, por tanto, la permeabilidad del medio (μ) será mayor que la permeabilidad del vacío (μ_0). En ellos, los dipolos magnéticos moleculares tienen momentos magnéticos permanentes orientados al azar y no interaccionan entre sí para ser considerados.

   En presencia de un campo magnético externo, los dipolos se orientan en sentido de la dirección del campo magnético, produciendo un leve incremento del mismo, ya que la agitación térmica tiende a desordenar esa orientación.

2. **Materiales diamagnéticos**. ($\mu < \mu_0$)

   La susceptibilidad magnética (χ_m) será negativa y, por tanto, la permeabilidad del medio (μ) será menor que la permeabilidad del vacío (μ_0). En ellos, los dipolos magnéticos moleculares NO tienen momentos magnéticos permanentes.

   En presencia de un campo magnético externo, los dipolos se orientan en sentido contrario de la dirección del campo magnético, produciendo decremento del mismo.

3. **Materiales ferromagnéticos**. ($\mu \gg \mu_0$)

   La susceptibilidad magnética (χ_m) será positiva y, por tanto, la permeabilidad del medio (μ) será mucho mayor que la permeabilidad del vacío (μ_0), por lo que $k_m > 1$. En ellos, los dipolos magnéticos moleculares tienen momentos magnéticos permanentes.

   En presencia de un campo magnético externo, los dipolos se orientan en sentido de la dirección del campo magnético, produciendo un gran incremento del mismo, debido al alto grade de alineación que se produce en los dipolos magnéticos, incluso en presencia de campos magnéticos débiles.

   La susceptibilidad magnética ya no será un valor característico del material, sino que dependerá de otros factores como su estado previo de imanación, por lo que en estos materiales no siempre se verifica la expresión:

$$\vec{H} \neq \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$