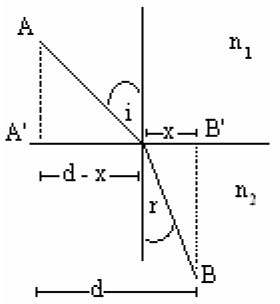
Tarea Nº1:
Demostración de la refracción según Fermat



El camino óptico está dado por:

$$\left[AXB\right] = n_1\sqrt{(AA')^2 + (d-x)^2} + n_2\sqrt{(BB')^2 + (x)^2}$$

El cual depende de x, así que podemos derivar:

$$\frac{d\left[AXB\right]}{dx} = \left[\frac{(-1)n_1 2(d-x)}{\sqrt{(AA')^2 + (d-x)^2}}\right] + \left[\frac{n_2 2x}{\sqrt{(BB')^2 + (x)^2}}\right]$$

Para que el camino óptico sea mínimo igualamos la derivada a cero:

$$\left[\frac{(-1)n_1 2(d-x)}{\sqrt{(AA')^2 + (d-x)^2}}\right] + \left[\frac{n_2 2x}{\sqrt{(BB')^2 + (x)^2}}\right] = 0$$

Obtenemos la ley de Snell
$$\underbrace{\frac{n_1(d-x)}{\sqrt{(AA')^2 + (d-x)^2}} = \frac{n_2 x}{\sqrt{(BB')^2 + (x)^2}}}_{n_1 seni = n_2 senr}$$

Pero existe una condición para que el camino óptico sea el mínimo:

Si $\frac{d\left[AXB\right]}{dx} = 0$ y además $\frac{d^2\left[AXB\right]}{dx^2} > 0$, $\left[AXB\right]$ tiene un mínimo relativo

Entonces lo que falta es asegurar la segunda condición, reordenando:

$$\frac{d\left[AXB\right]}{dx} = \left[\frac{(-1)n_1 2(d-x)}{\sqrt{(AA')^2 + (d-x)^2}}\right] + \left[\frac{n_2 2x}{\sqrt{(BB')^2 + (x)^2}}\right]$$

$$= -2n_1\left[(d-x)\frac{1}{\sqrt{(AA')^2 + (d-x)^2}}\right] + 2n_2\left[x\frac{1}{\sqrt{(BB')^2 + (x)^2}}\right]$$

Ahora la segunda derivada es:

$$\frac{d^2\left[AXB\right]}{dx^2} = -2n_1\left[\frac{-1}{\sqrt{(AA')^2 + (d-x)^2}} - (d-x)\frac{-2(d-x)}{2\sqrt{\left((AA')^2 + (d-x)^2\right)^3}}\right] + 2n_2\left[\frac{1}{\sqrt{(BB')^2 + (x)^2}} + x\frac{-1(2x)}{2\sqrt{\left((BB')^2 + (x)^2\right)^3}}\right]$$

$$= -2n_1\left[\frac{(d-x)^2}{\sqrt{\left((AA')^2 + (d-x)^2\right)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(AA')^2 + (d-x)^2}}\right] + 2n_2\left[\frac{1}{\sqrt{(BB')^2 + (x)^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{\left((BB')^2 + (x)^2\right)^3}}\right]$$

Aplicando la condición:

$$0 < -2n_1\left[\frac{(d-x)^2}{\sqrt{\left((AA')^2 + (d-x)^2\right)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(AA')^2 + (d-x)^2}}\right] + 2n_2\left[\frac{1}{\sqrt{(BB')^2 + (x)^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{\left((BB')^2 + (x)^2\right)^3}}\right]$$

Nos queda:

$$2n_1\left[\frac{(d-x)^2}{\sqrt{\left((AA')^2+(d-x)^2\right)^3}}-\frac{1}{\sqrt{(AA')^2+(d-x)^2}}\right]<2n_2\left[\frac{1}{\sqrt{(BB')^2+(x)^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{\left((BB')^2+(x)^2\right)^3}}\right]$$

Reordenando:

$$n_1\left[\frac{(d-x)^2}{\sqrt{\left((AA')^2+(d-x)^2\right)^3}}-\frac{1}{\sqrt{(AA')^2+(d-x)^2}}\right]<n_2\left[\frac{1}{\sqrt{(BB')^2+(x)^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{\left((BB')^2+(x)^2\right)^3}}\right]$$

Y esa es la condición que se debe cumplir.

Para asegurarnos que esa condición se cumple tenemos:

$$n_1\left[\left(\frac{(d-x)}{\sqrt{\left((AA')^2+(d-x)^2\right)}}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{\left((AA')^2+(d-x)^2\right)}}\right)-\frac{1}{\sqrt{(AA')^2+(d-x)^2}}\right]<n_2\left[\frac{1}{\sqrt{(BB')^2+(x)^2}}-\left(\frac{1}{\sqrt{\left((BB')^2+(x)^2\right)}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{\left((BB')^2+(x)^2\right)}}\right)^2\right]$$

Sustituyendo:

$$n_1\left[\frac{sen^2 i}{\sqrt{\left((AA')^2+(d-x)^2\right)}}-\frac{1}{\sqrt{(AA')^2+(d-x)^2}}\right]<n_2\left[\frac{1}{\sqrt{(BB')^2+(x)^2}}-\frac{sen^2 r}{\sqrt{\left((BB')^2+(x)^2\right)}}\right]$$

Reordenando

$$n_1\left[\frac{sen^2 i-1}{\sqrt{\left((AA')^2+(d-x)^2\right)}}\right]<n_2\left[\frac{1-sen^2 r}{\sqrt{\left((BB')^2+(x)^2\right)}}\right]$$

Como $\sqrt{\left((AA')^2+(d-x)^2\right)}$ y $\sqrt{\left((BB')^2+(x)^2\right)}$ son siempre positivos

La desigualdad nos queda:

$$n_1(sen^2 i-1)<n_2(1-sen^2 r)$$

Que es lo mismo que $-n_1(\cos^2 i)<n_2(\cos^2 r)$ y como los cosenos al cuadrado son siempre positivos.

Siempre se cumple que $-n_1<n_2$ o que $n_2>-n_1$