Problema - Hidrogeno y emisión Estimulada

Eliot Hijano Cubelos

1. Enunciado

Un recirto que constiene átomos de Hidrógeno se encuentra a la temperatura $T = 300K$ y es atravesado por radiación ultravioleta en una dirección dada. Suponiendo que sólo se producen procesos de absorción y emisión inducidas, pero que dominan los primeros, demostrar que el ensanchamiento de las líneas de absorción debido al efecto Dopler tiene un perfil Gaussiano y calcular las anchuras de las líneas α de la serie de Lyman, Balmer, y Paschen.

2. Perfil Gaussiano

Evaluemos para empezar el numero de emisiones absorbidas y emitidas;

$$\begin{aligned}\frac{Emitidas}{tiempo \times Volumen} &= Bu_v \Delta N_2 \\ \frac{Absorbidas}{tiempo \times Volumen} &= Bu_v \Delta N_1\end{aligned}$$

Donde B es el coeficiente de Eistein. Por cada emisión se pierde una cantidad de energía $h\nu$ y se gana dicha cantidad si en vez de producirse emisión se produce absorción. El balance energético es por tanto:

$$\frac{energía}{tiempo \times Volumen} = Bu_v \left(\Delta N_2 - \Delta N_1\right) h\nu$$

Es decir, la densidad de energía de radiación en el intervalo ν, $\nu + \Delta\nu$ variará en el tiempo según se produzcan las absorciones y emisiones. En concreto, para un paso diferencial de tiempo tendremos:

$$\begin{aligned}d\left(\frac{energía}{Volumen}\right) &= d\left(u_v \Delta\nu\right) = \left[Bu_v \left(\Delta N_2 - \Delta N_1\right) h\nu\right] dt \\ \frac{du_v}{u_v} &= \left[B\frac{\Delta N_2 - \Delta N_1}{\Delta\nu} h\nu\right] dt\end{aligned}$$

Sabemos también que $I \propto u_v$ de manera que:

$$\frac{dI}{I} = \left[Bh\nu \frac{\Delta N_2 - \Delta N_1}{\Delta \nu} \right] dt$$

Suponiendo que la radiación ha sido dirigida en el eje Z, las ondas electromagnéticas recorrerán una distancia $dz = c\ dt$ por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{I} &= \left[\frac{Bh\nu}{c} \frac{\Delta N_2 - \Delta N_1}{\Delta \nu} \right] dz \\ I &= I\left(z=0\right) e^{Az} \end{aligned}$$

Donde, A, es $\frac{Bh\nu}{c} \frac{\Delta N_2 - \Delta N_1}{\Delta \nu}$ y se le llama factor de ganancia. Utilizando la distribución de velocidades de Maxwell, el número de partículas por nivel con una determinada velocidad en el eje Z comprendida entre los valores v_z y $v_z + \Delta v_z$.

$$\begin{aligned} \Delta N &= N \cdot \frac{\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2} m\ dv_x \right) \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{1}{2} m v_y^2} m\ dv_y \right) \left(\int\limits_{v_z}^{v_z + \Delta v_z} e^{-\beta \frac{1}{2} m v_z^2} m\ dv_z \right)}{\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2} m\ dv_x \right) \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{1}{2} m v_y^2} m\ dv_y \right) \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{1}{2} m v_z^2} m\ dv_z \right)} = \\ &= N \cdot \frac{\left(\int\limits_{v_z}^{v_z + \Delta v_z} e^{-\beta \frac{1}{2} m v_z^2}\ dv_z \right)}{\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{1}{2} m v_z^2}\ dv_z \right)} = N \cdot \frac{e^{-\beta \frac{1}{2} m v_z^2} \Delta v_z}{\sqrt{\frac{\pi}{\beta \frac{1}{2} m}}} = N \cdot \frac{e^{-\beta \frac{1}{2} m v_z^2}}{\sqrt{\frac{2\pi KT}{m}}} \Delta v_z = \\ &= N \cdot \sqrt{\frac{m}{2\pi KT}} e^{-\beta \frac{1}{2} m v_z^2} \Delta v_z \end{aligned}$$

Siendo $N = N_i$. Por el estudio del efecto Doppler, sabemos que:

$$\begin{aligned} \nu &= \nu_0 \left(1 + \frac{v_z}{c} \right) \Rightarrow v_z = c \left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1 \right) \\ \Delta v_z &= \frac{c}{\nu_0} \Delta \nu \end{aligned}$$

Siendo ν_0 la frecuencia de emisión de la radiación en el sistema de referencia del laboratorio para átomos estáticos.

Sustitullendo;

$$
\begin{aligned}
\Delta N &= N\sqrt{\frac{m}{2\pi KT}}e^{-\beta\frac{1}{2}mv_z^2}\frac{c}{\nu_0}\Delta\nu = \\
&= N\sqrt{\frac{m}{2\pi KT}}\frac{c}{\nu_0}e^{-\beta\frac{1}{2}mc^2\left(\frac{\nu}{\nu_0}-1\right)^2}\Delta\nu = \\
&= N\sqrt{\frac{m}{2\pi KT}}\frac{c}{\nu_0}e^{-\beta\frac{mc^2}{2\nu_o^2}(\nu-\nu_0)^2}\Delta\nu
\end{aligned}
$$

Y finalmente;

$$
\begin{aligned}
I &= I\left(z=0\right)e^{\frac{Bh\nu}{c}\frac{\Delta N_2-\Delta N_1}{\Delta\nu}z} = \\
&= I\left(z=0\right)e^{\frac{Bh\nu}{\nu_0}\sqrt{\frac{m}{2\pi KT}}(N_2-N_1)e^{-\beta\frac{mc^2}{2\nu_o^2}(\nu-\nu_0)^2}z}
\end{aligned}
$$

O escrito de una manera más sencilla:

$$
\begin{aligned}
I &= I\left(z=0\right)e^{Az} = \\
A &= \frac{Bh\nu}{\nu_0}\sqrt{\frac{m}{2\pi KT}}\left(N_2-N_1\right)e^{-\beta\frac{mc^2}{2\nu_o^2}(\nu-\nu_0)^2}
\end{aligned}
$$

Es decir, hemos demostrado que el ensanchamiento de las líneas espectrales por efecto Doppler tiene un perfil gaussiano para ν en torno a ν_0. En la figura adjunta, se muestra el aspecto aproximado de el factor de ganancia.

3. Series alfa de Lyman, Balmer y Paschen - Anchuras espectrales

A mitad de altura, la anchura de la taya espectral se calcula del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
A\left(\nu_0\right) &= \frac{Bh\nu}{\nu_0}\sqrt{\frac{m}{2\pi KT}}\left(N_2-N_1\right) \\
\frac{1}{2}\frac{Bh\nu}{\nu_0}\sqrt{\frac{m}{2\pi KT}}\left(N_2-N_1\right) &= \frac{Bh\nu}{\nu_0}\sqrt{\frac{m}{2\pi KT}}\left(N_2-N_1\right)e^{-\beta\frac{mc^2}{2\nu_o^2}\left(\nu_0+\frac{\Delta\nu}{2}-\nu_0\right)^2} \\
\frac{1}{2} &= e^{-\beta\frac{mc^2}{2\nu_o^2}\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2} \\
\beta\frac{mc^2}{2\nu_o^2}\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2 &= \ln\left(2\right) \\
\Delta\nu &= 2\frac{\nu_o}{c}\sqrt{\frac{2KT}{m}\ln\left(2\right)}
\end{aligned}
$$

La frecuencia ν_o se calcula, para la serie de Lyman, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} E_n - E_{n'} &= \left[\frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{(n)^2}\right] \frac{Z^2 e^4 \mu}{2\,(4\pi\varepsilon_o)^2\,\hbar^2} = -h\nu_o \\ \nu_o &= -\frac{Z^2 e^4 \mu}{4\pi\,(4\pi\varepsilon_o)^2\,\hbar^3}\left[\frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{(n)^2}\right] \end{aligned}$$

En el caso de átomos de Hidrógeno a $300K$ tendremos:

$$\begin{aligned} \nu_o &\approx -\frac{e^4 m_e}{4\pi\,(4\pi\varepsilon_o)^2\,\hbar^3}\left[\frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{(n)^2}\right] \approx -3{,}288953357\cdot 10^{15}\left[\frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{(n)^2}\right] \quad Hz \\ \Delta\nu &= 2\frac{\nu_o}{c}\sqrt{\frac{2KT}{m}\ln(2)} \approx -0{,}000040625\cdot 10^{15}\left[\frac{1}{(n')^2} - \frac{1}{(n)^2}\right] \quad Hz \end{aligned}$$

La tabla de resultados correspondiente es:

Linea	$\Delta\nu$ (GHz)
α $LYMAN$	30,4685
α $BALMER$	5,64236
α $PASCHEN$	1,974826