Mecánica Cuántica, grupos A y C — Febrero 2009

P1-4 puntos Un observador O1 recibe un gran número de copias de una partícula de espín 1/2 en un estado dado desconocido. Sobre parte de ellas mide la componente de espín en una dirección $\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, sobre otro subconjunto mide la componente en una dirección $\vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$, y sobre un tercer subconjunto la componente en la dirección $\vec{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$. Según dicho observador, los promedios de resultados que obtiene son

$$\bar{S}_{\vec{n}_1} = \frac{\hbar}{4} \quad , \quad \bar{S}_{\vec{n}_2} = \frac{1+\sqrt{2}}{4}\hbar \quad , \quad \bar{S}_{\vec{n}_3} = \frac{1+\sqrt{2}}{4}\hbar \quad .$$

Un segundo observador O2 recibe otro gran número de copias en el mismo estado anterior, sobre las que mide, en distintos subconjuntos, las componentes *x, y, z* de espín, obteniendo

$$\bar{S}_x = \frac{\hbar}{4\sqrt{2}} \quad , \quad \bar{S}_y = \frac{\hbar}{4\sqrt{2}} \quad , \quad \bar{S}_z = \frac{\hbar}{8} \quad .$$

i) **1 punto** Comprobar si son compatibles ambos conjuntos de promedios de resultados para el mismo estado, utilizando el caracter vectorial del espín y la linealidad de los valores esperados.

ii) **1 punto** Comprobar si, de acuerdo con la Mecánica Cuántica, los resultados de O1 son aceptables en principio.

iii)**1 punto** Idem con los resultados de O2.

iv)**0.5 puntos** Como test de sus resultados, cada uno de los observadores O1, O2 mide ahora la componente de espín en una dirección $n_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, en sendos conjuntos de sistemas en el mismo estado anterior. Ambos observadores obtienen el mismo promedio de resultados, $\bar{S}_{\vec{n}_4} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}$. ¿Que implica este nuevo resultado en relación con los previos?

v)**0.5 puntos** Un tercer observador O3, sobre otros conjuntos de sistemas en el mismo estado anterior, afirma obtener

$$\bar{S}_x = \frac{\hbar}{4\sqrt{2}} \quad , \quad \bar{S}_y = \frac{\hbar}{4\sqrt{2}} \quad , \quad \bar{S}_z = \frac{\hbar}{2} \quad .$$

¿Es ello posible?

Mecánica Cuántica, grupos A y C — Febrero 2009

P2-3 puntos Considérese el Hamiltoniano $H = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

i) **2 puntos** Dentro de los estados con un valor medio $\overline{E}$ de la energía dado, determinar el de máxima entropía, y el valor máximo de ésta.

ii) **1 punto** Si se define una temperatura $T := \dfrac{1}{k\beta}$, donde k es la constante de Boltzman y β el multiplicador de Lagrange introducido para garantizar que $\langle H \rangle = \overline{E}$, ¿Hay temperaturas T negativas?

P3-3 puntos Sea el Hamiltoniano en una dimensión espacial $H = p^2 + |q|$, con p, q operadores sin dimensiones físicas con conmutador $[q, p] = i\mathbf{1}$.

i) **1.5 puntos** Calcular la mejor cota superior posible a la energía fundamental utilizando funciones prueba variacionales de tipo gaussiano.

ii) **1.5 puntos** Idem a la energía más baja dentro de los estados impares.

Ayuda: $\displaystyle\int_0^\infty dx\, e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\displaystyle\int_0^\infty dx\, x^{2n} e^{-x^2} = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$, $n \geq 1$