3.2) Sea $M = M(q_i, t) \quad i = 1, .., n$ una función de las coordenadas generalizadas y del tiempo. **3.2.1)** Demostrar que

$$\frac{\partial M}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{M}}{\partial \dot{q}_i} \tag{1}$$

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ la función lagrangiana de un sistema conservativo. Si se efectúa un cambio de coordenadas dado por las funciones $q'_j = q'_j(q_1, q_2, ...q_n) \quad j = 1, ..., n$, la nueva lagrangiana será $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(q'_i, \dot{q'}_i, t)$, que es una función diferente a la anterior. Por tanto, al efectuar los cálculos en las ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q'}_i} - \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}'}{\partial q'_i} = 0 \tag{2}$$

se obtendrán unas ecuaciones de movimientos distintas a las que se hallarían utilizando $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ en

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \dot{\mathcal{L}}}{\partial q_i} = 0 \tag{3}$$

3.2.2) Demostrar que si al cambiar de coordenadas se obtiene una lagrangiana que está relacionada con la antigua función mediante la expresión

$$\mathcal{L}'(q'_i, \dot{q'}_i, t) = \mathcal{L}(q'_i, \dot{q'}_i, t) + \frac{dM(q'_i, t)}{dt} \tag{4}$$

las ecuaciones de movimiento permanecen invariantes frente al cambio de coordenadas. Es decir, mantienen su forma matemática sin más que sustituir las q_i por las q'_i.