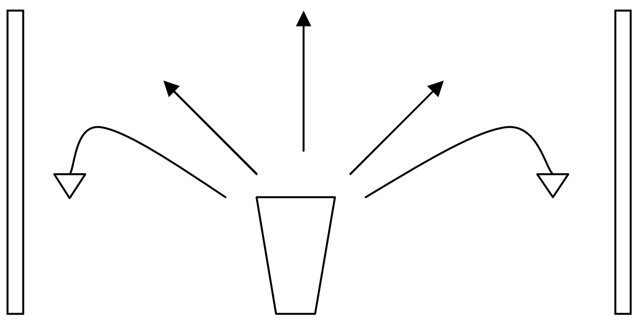
Mecánica newtoniana
Desarrollo I [15%]

1. Un recipiente de material radioactivo de altura 1 metro expulsa partículas α *cargadas con carga positiva constantemente con cierta velocidad inicial, dichas partículas siguen una trayectoria dependiente de dos barras paralelas de cobre de una altura de 5 metros cargadas eléctricamente, la de la izquierda con carga negativa y la de la derecha con carga positiva, la distancia entre el barril a las barras viene dada por las expresión* $\vec{\gamma} = -1[\hat{u}_i]$ *y* $\vec{\gamma}' = 1[\hat{u}_i]$. *Considerando la base cartesiana ortonormal* $\{\hat{U}_i;\hat{U}_j\}$ *donde el eje* $\hat{U}_j$ *esta situado en un extremo arbitrario de el recipiente y suponiendo que la presión con la que el fluido radioactivo expulsa las partículas y el ancho del recipiente, son ambos despreciables diga que dirección deben tomar necesariamente las partículas al salir disparadas del recipiente, si chocan o no con alguna barra (justifique) y los valores máximos y mínimos para* θ *para que las partículas choquen con alguna barra, considerando a* θ *un ángulo contado desde el eje* $\hat{U}_i$ *positivo. Use* $g = -9{,}8\, {}^{m}\!/_{s^2}\, \hat{U}_j$.



1. a

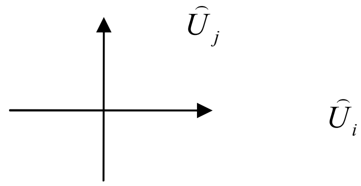
1) *las partículas* α *tomaran dirección noroeste, con un ángulo* θ *de* 37°
2) *las partículas* α *chocan con la barra de la izquierda*
3) θ *debe cumplir con la desigualdad* $217^\circ \geq \theta \geq 143^\circ$

Solución

Considerando la suposición propuesta en el enunciado referente a despreciar la presión podemos afirmar que no existen fuerzas no conservativas actuando bajo nuestro sistema por lo tanto

$$\Delta Em = 0$$
$$Ec - Ep = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (1)}$$
$$Ec = Ep$$

Despreciando entonces también el ancho del barril armamos el siguiente sistema de coordenadas cartesianas ortonormales



Donde $\hat{U}_i$ *comprende el intervalo cerrado* $[-1,1]$ *y* $\hat{U}_j$ $[-1,4]$

Ahora que tenemos un sistema de referencia en donde expresar nuestro movimiento, podemos iniciar a calcular nuestras incógnitas; empecemos con el principio de conversación de energía, planteado antes en …. (1).

$$Ec = \frac{1}{2} m V^2 \quad \ldots. \text{ (2)} \qquad Ep = mgh \quad \ldots.. \text{ (3)}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) obtenemos entonces la expresión de donde obtendremos el valor escalar de nuestra velocidad inicial V_o *es decir* $\left|\vec{V}\right| = V_o$

$$\frac{1}{2} m V^2 = mgh \quad \ldots.. \text{ Despejamos } V^2$$

$$V^2 = 2gh \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$
$$V = 4{,}42 \frac{m}{s}$$

Así obtenemos el valor de nuestra velocidad inicial en unidades de m/s *y diremos que*

$$V = 4{,}42\,\frac{m}{s} \approx 4{,}5\,\frac{m}{s} \quad \therefore \quad \left|\vec{V}\right| = 4{,}5\frac{m}{s}$$

Detengámonos un momento para meditar sobre nuestro resultado; sabemos que la distancia entre el barril y cualquiera de las barras de cobre es de apenas 1m. Algo bastante pequeño realmente. Al comprar dicha longitud con nuestro resultado de velocidad inicial podremos notar una cuestión interesante; la $\left|\vec{V}\right|$ *siendo* $4{,}42\frac{m}{s}$ *nos dice que nuestra partícula* α *recorre en 4,42 metros por un segundo. Entonces, si la distancia salida-llegada de la partícula para que choque con una de las barras, debe ser de 1m en el eje cartesiano* $\hat{U}_i$ *es propio decir que nuestra partícula necesariamente debe chocar con una de las barras, en un* ΔT *sumamente pequeño. Podemos comprobar esto, realizando varios cálculos con las ecuaciones de movimiento parabólico.*

$$S = S_o + V_o(\Delta t) - \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \qquad \ldots. (4)$$

Haremos 0 nuestra posición, para así calcular el tiempo de vuelo

$-V_o(\Delta t) + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 = 0$ *Resolviendo la ecuación de segundo grado*

$\Delta t = 0{,}91s$ *De hecho entonces el viaje de la partícula es sumamente corto*

Ahora, para comprobar que realmente si choca nuestra partícula partiremos de la coordenada $\hat{U}_i = 1m$ *es decir, la distancia en el piso entre un borde arbitrario del barril (en este caso el referente a la dirección de nuestra partícula) y la barra situada a la izquierda. Esto por la diferencia de cargas, siendo la carga de la partícula* α *esta necesariamente tomara rumbo hacia la barra cargada negativamente. Partiendo de dicho punto podremos obtener varios valores esenciales para terminar de definir nuestro movimiento. Entonces continuando con los cálculos*

$$S = S_o + V_o(\Delta t) - \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$

Partiendo de (4) dividiremos nuestra ecuación en un sistema de dos ecuaciones para cada eje cartesiano $\{\hat{U}_i;\hat{U}_j\}$

$$\begin{cases} U_i(t) = U_{io} + V_{io}(\Delta t) \\ U_j(t) = U_{jo} + V_{jo}(\Delta t)\frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \end{cases}$$

Entonces podremos calcular el tiempo en el que $\widehat{U}_i = 1m$ *despejando al miembro* (Δt)

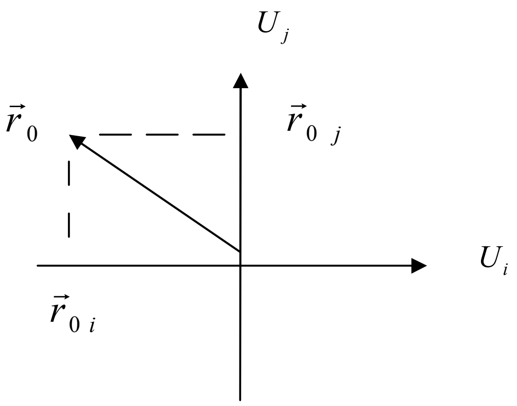
$$\frac{U}{V_{io}} = (\Delta t)$$

Efectuando los cálculos obtendremos entonces que $(\Delta t) = 0{,}22s$ *siendo este entonces el instante en el que* $\widehat{U}_i = 1m$ *; ahora entonces usemos ese tiempo para calcular el la coordenada* $\widehat{U}_j$ *justo en ese instante* (Δt)

$U_j = U_{jo} + V_{jo}(\Delta t)\frac{1}{2}a(\Delta t)$ *Calculamos sabiendo que la posición inicial es 0 obteniendo así*

$U_j = 0{,}76m$

Ya con ambas coordenadas podemos calcular θ *y así definir con mayor exactitud la dirección de la partícula; consideremos el siguiente diagrama*



Tómese en cuenta que existen las relaciones (en función a nuestros cálculos)

$\vec{r}_{oi} = 1[m]\ i$
$\vec{r}_{oj} = 0{,}76[m]\ j$

Entonces θ *será* $Tang\theta = \frac{\vec{r}_{oj}}{\vec{r}_{oi}} \therefore Tang^{-1} = \theta$ *entonces* $\theta = 37{,}23^\circ$ *o sea* $\theta \approx 37^\circ$

Ya con esto completamos las dos primeras incógnitas de nuestro problema. Para poder encontrar los valores máximos y mínimos de θ *solo debemos tomar en cuenta la primera inferencia que hicimos en relación a* $|\vec{V}|$. *En función a eso siguiendo mas o menos el mismo procedimiento para calcular a* θ *de* $\vec{r}_0$ *se llega a la desigualdad de que* $217^\circ \geq \theta \geq 143^\circ$ *para que choque con la barra, siendo los valores* $\theta \leq 217$ *máx. y* $\theta \geq 143^\circ$ *min.*