Demostración de la contracción del espacio en las tres direcciones.

Para poder demostrar la contracción del espacio en sus tres dimensiones vamos a recurrir al sistema mas básico que es un haz de luz entre dos espejos. El ejemplo clásico que se usa para demostrar la dilatación del tiempo y contracción del espacio aplicando únicamente el teorema de Pitágoras. La demostración la haré de dos maneras matemáticamente y geométricamente.

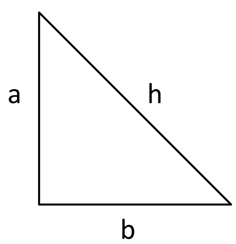
Para no complicar la demostración trabajaremos en dos dimensiones para demostrar que además de contraerse en la dirección del movimiento también se contrae en la dirección perpendicular al movimiento, y una vez obtenida la demostración en una dirección perpendicular al movimiento es fácil de demostrar que ha de cumplirse en la otra dirección quedando entonces demostrado para ambas direcciones normales al movimiento.

Antes de empezar debemos repasar unas propiedades de los triángulos y del teorema de Pitágoras.

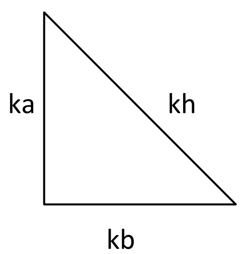
$h=\sqrt{a^2+b^2}$ teorema de Pitágoras

Podemos construir un triangulo proporcional a otro, simplemente multiplicando los tres lados por el mismo numero que llamaremos “k”. de esta manera tendremos un triangulo semejante y donde se cumple :

Triangulo



triángulo semejante



$h=\sqrt{a^2+b^2}$

$kh=\sqrt{(ka)^2+(kb)^2}=k\sqrt{a^2+b^2}, h=\sqrt{a^2+b^2}$

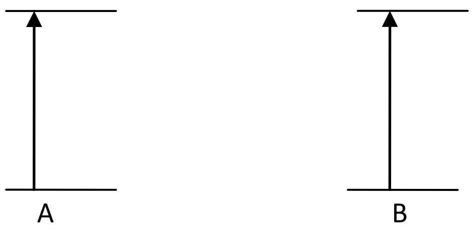
Esto quiere decir que si aumento **uno o dos lados** del triangulo un valor K no tendré un triangulo semejante al primero. Para que sea semejante al primero K a de ser la proporción de cada uno de los tres lados. Sino es así tendremos otro triángulo pero no semejante al primer triángulo.

Se que esto es muy básico pero llegado el momento será muy importante tenerlo claro.

Empecemos

Tenemos un haz de luz entre dos espejos, lo observaremos en el instante que el haz de luz va desde el espejo inferior al superior, además este sistema tiene una velocidad constante “v” muy próxima a la velocidad de la luz. Además como en todos estos ejemplos, tenemos otro haz de luz entre dos espejos en reposo, el haz de luz de cada sistema están perfectamente sincronizados entre si.

Sincronizamos ambos sistemas. La distancia entre espejos “a”



Sistema A vamos a dejarlo en reposo

Sistema B vamos acelerarlo hasta situarlo a una velocidad “v” constante muy próxima a la velocidad de la luz c .

Vamos a ir paso a paso.

Recordemos que :

$t = \gamma t'$ dilatación del tiempo t sistema en reposo A y t´ sistema B en movimiento t > t´

$l = \gamma l'$ contracción del espacio l sistema en reposo A y l´ sistema B en movimiento l >l´

Siendo $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

Admitimos la dilatación del tiempo y la contracción del espacio en la dirección del movimiento con lo cual la demostración no contradice la teoría de la relatividad sino que se complementa con ella -muy importante-.

Vamos a comparar los sistemas en dos instantes muy concretos:

Cuando en el sistema A (en reposo) el haz de luz toque el espejo superior (fig-1)

Cuando en el sistema B (en movimiento) el haz de luz toque el espejo superior (fig-2)

La distancia entre espejos recordemos que era “a” .si queremos ver lo que sucede en esta dirección es necesario ampliar el valor de “a” es decir que “a” sea lo suficientemente grande para poder entender lo que ocurre en esta dirección perpendicular al movimiento.

El hecho de ampliar el valor de “a” para poder ver lo que sucede ahí, no implica que la contracción en esta dirección vaya a ser pequeña y necesitemos aumentar para poder identificarla, como veremos mas adelante tendrá el mismo valor que en la dirección del movimiento.

Analizamos la figura-1:

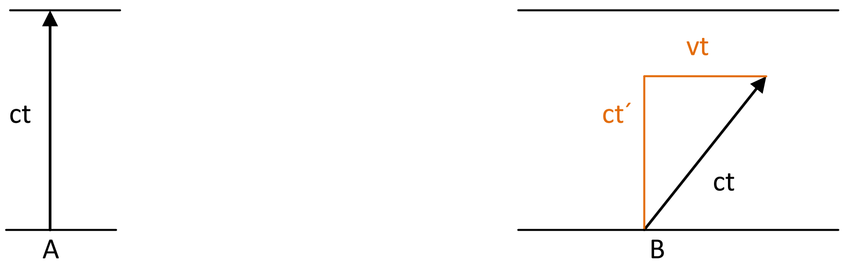


Fig-1

Como podemos ver en la fig-1 en el sistema A el haz de luz toca el espejo superior. En ese instante el haz de luz en el sistema B se dirige hacia el espejo superior pero aún no ha llegado.

Un pequeño inciso -pocas veces habrás visto el sistema B representado así, normalmente lo dibujan tocando el haz de luz el espejo superior, cosa que produce muchas veces errores de concepto o de desarrollo matemático.-

Podemos construir el triángulo que ves en el sistema B . No es difícil identificar cada lado:

La Hipotenusa tiene que ser ct puesto que para el sistema A ambos haces de luz deben haber recorrido la misma distancia en el tiempo t .

Un lado vt será el desplazamiento del sistema B en el tiempo t observado desde el sistema A.

Un lado ct´. El haz aún no ha llegado al espejo superior y por lo tanto podemos ver la dilatación del tiempo t (t > t´) podemos considerar ct´como la proyección de ct sobre la distancia “a” entre espejos.

Ahora es el momento de darle un valor a la distancia “a” Vamos a suponer que la distancia entre los espejos es de 300.000 KM.

Con este dato valoramos de nuevo la figura-1

En el sistema A acaba de cumplirse exactamente 1 seg desde que salió el haz de luz del espejo inferior.

En el sistema B, la hipotenusa tiene un valor de 300.000 km

Lado Vt .En 1 segundo el sistemaB habrá recorrido un espacio e

El lado ct´. $ct' = \sqrt{(ct)^2 - e^2}$ (1) si dividimos ct´/300000 sabremos t´ y además sabemos que será menor de 1 puesto que el haz aún no ha llegado al espejo superior.

La ecuación (1) si la desarrollamos obtenemos la dilatación del tiempo entre los dos sistemas A-B

$ct' = \sqrt{(ct)^2 - (vt)^2}$; $(ct')^2 = (c^2 - v^2)t^2$; $t^2 = (c^2/(c^2 - v^2))t'^2$ $t = \gamma t'$ siendo $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

Bien del análisis de este primer instante hemos obtenido la dilatación del tiempo y hemos preparado la base para el siguiente análisis.

Vamos analizar la figura-2, cuando el haz de luz del sistema B (en movimiento) toca el espejo superior.

En este instante, en el sistema A el haz de luz se desplaza hacia el espejo inferior, el espacio recorrido será ct

En el sistema B el haz de luz acaba de tocar el espejo superior y la distancia recorrida será ct para el sistema A ambos haces de luz deben haber recorrido la misma distancia en el tiempo t

El lado vt. para el sistema A el sistema B habrá recorrido un espacio que será vt

El lado ct´. $ct' = \sqrt{(ct)^2 - (vt)^2}$ de igual manera ct´/300000 nos dará t´. Ahora como la distancia entre espejos es de 300000 km en este instante t´ vale 1 seg.

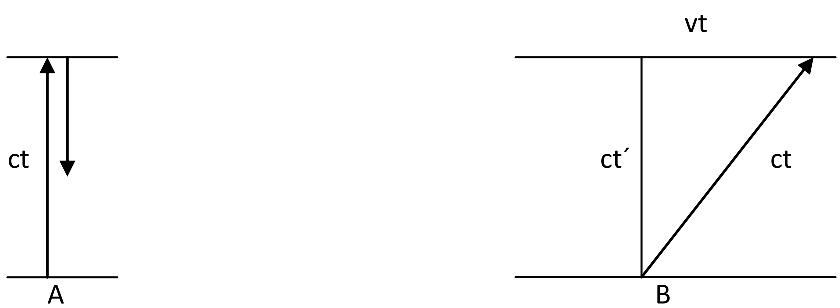


Fig-2

Según la teoría de la relatividad la distancia entre espejos permanece igual para ambos sistemas .puesto que no supone contracción en esa dirección, ambos sistemas miden lo mi Vamos hacer un experimento mental muy sencillo:

Supongamos que tenemos dos sistemas como en el fig-1 formado por dos espejos paralelos y un haz de luz. Vamos a marcar el espejo inferior justo desde donde sale el haz de luz con una marca y en el espejo superior donde haga contacto el haz con otra marca , vamos hacer lo mismo para el otro sistema.

Ambos sistemas están perfectamente sincronizados sus haces de luz. Y tienen la misma distancia entre espejos.

Podemos asegurar que la distancia mas corta entre los dos espejos será la perpendicular a ambos espejos, es decir el haz de luz recorre una de las distancias mas cortas entre espejos puesto que el haz de luz es perpendicular a ambos espejos y toca a estos en las marcas que hemos hecho.

Supongamos que uno de ellos podemos meterlo en una caja y situarlo en una región del espacio donde no exista nada que pueda alterar el haz de luz.

Supongamos que la distancia entre espejos es de 300000km para cada uno de ellos

Vamos con el experimento. Suponte que mido la distancia entre espejos del sistema de espejos que quedó en la tierra. Mido 300000km y si examino el haz de luz veremos que recorre la distancia entre marcas exactamente en 1seg , y el haz toca las marcas inferior y superior.

Le pedimos a un ayudante que se encuentra dentro de la caja que haga la misma medición que hemos hecho nosotros distancia entre espejos y observación del haz de luz. Y sus datos son los mismos, la distancia entre espejos es de 300000km y el haz sale de una marca y toca la otra en 1seg.

Si ahora aceleramos la caja muy despacio sin que el ayudante se de cuenta hasta alcanzar una velocidad por ejemplo de 250.000 km/seg y la mantenemos constante. Si ahora le pregunto:

1- ¿ el haz de luz se mueve entre las marcas de los espejos?

2-¿Qué distancia hay entre los espejos?

3-¿Qué velocidad tiene el haz de luz?

Estas preguntas tan simples tienen mucho “tema” .Bueno, la tercera es la más fácil, el haz tiene que tener una velocidad c.

La respuesta a la 1ª seria que efectivamente el haz de luz se mueve entre las dos marcas que habíamos hecho. Esto tiene unas implicaciones muy importantes:

Si la distancia entre espejos era la perpendicular y era el camino que hacía el haz entre las marcas y es el que hace ahora, cuando nosotros midamos la distancia entre espejos diremos que es la que recorre el haz de luz. Dicho de otra manera, nuestro ayudante nunca medirá lo que nosotros entendemos como perpendicular sino que medirá la que nosotros consideramos una línea oblicua que es el haz de luz.

El hecho que no exista un punto de referencia absoluto hace que midamos diagonales entre espejos pensando que son perpendiculares. En el caso anterior cuando nosotros mediamos la distancia entre espejos dando por hecho que era la perpendicular siempre puede existir un observador respecto al cual tengamos una velocidad relativa, y por lo tanto este observador vería como medimos inclinado en la dirección del haz de luz. Este hecho hace que para dos observadores la distancia entre espejos no pueda ser igual (claro está , a velocidades altas).

La respuesta a la 2ª pregunta sin entrar en valores sabremos que será distinta de otro observador.

Este hecho hace que planteemos el triangulo de la fig-2 de otra manera, para el sistema B la distancia entre espejos será la hipotenusa y esta valdrá ct´.

Analizamos cada lado y las condiciones que han de cumplir:

1-la hipotenusa ct también tiene que ser ct´, la explicación es sencilla, para que ambos sistemas A y B puedan estar de acuerdo en la velocidad de la luz. Para ambos la velocidad de la luz tiene que ser c.

Si ct a de ser igual ct´, ct=ct´ tenemos que multiplicar ct por un numero k que no conocemos para obtener ct´ kct=ct´ pero sabemos que t= γ t´ por lo tanto kct=(1/ γ)ct, k=1/ γ k<1

Por lo tanto la hipotenusa para el sistema A será ct

La hipotenusa para el sistema B será ct´=(1/ γ) ct ; ct > ct´ , y para ambos sistemas la velocidad del haz de luz es c.

2-el lado vt, este lado ha de ser menor, vamos a calcular cuanto:

Tenemos vt y sabemos que el sistema B medirá v´t´ por lo tanto:

$\frac{vt}{ct} = \frac{v´t´}{ct´}$, por lo tanto v=v´ , sabemos que $\frac{l}{t} = \frac{l´}{t´}$, $\frac{l}{\gamma t´} = \frac{l´}{t´}$, $l = \gamma l´$ contracción del espacio

Hemos obtenido la dilatación del tiempo y la contracción del espacio en la dirección del movimiento.

¿Pero lo que hemos hecho es correcto?

La respuesta es “no del todo”.

Vamos a estudiarlo primero de manera geométrica, porque es la manera más fácil de ver el error:

Recordáis que la distancia entre espejos era 300000 km . Además para el sistema B la hipotenusa ct´en ese instante tiene que ser 300000km puesto que en ese instante el haz de luz tocaba el espejo superior, y la velocidad de la luz para este sistema a de ser c. Bien la pregunta es evidente ¿Qué triangulo se puede construir donde un lado y la hipotenusa sean iguales? **Ninguno.**

Alguien puede pensar que he manipulado la distancia entre espejos dando este valor para obtener este resultado. Se puede probar para cualquier valor de “a” lo que ocurre es que con letras es difícil identificar cada termino, ya que estamos trabajando con dilataciones , contracciones, la condición de la velocidad c para ambos sistemas etc etc.

Para demostrarlo supongamos que “a” vale 150000km la hipotenusa tendrá que valer 150000km puesto que en este instante el sistema B se cumple 0,5seg y la velocidad del haz de luz tiene que ser c .

La segunda pregunta evidente : ¿Dónde está el error , porque la dilatación del tiempo y la contracción del espacio en la dirección del movimiento están ya comprobadas experimentalmente?

En el lado del triangulo que no hemos tocado, que hemos considerado en todo momento que era “a” para ambos sistemas. Si suponemos que la medición de “a” desde el sistemaB es distinto de la medición que hace de “a” desde el sistema A.

Supongamos que “ a” es la medición desde el sistema A “a´ “ medición desde el el sistema B.

Vamos suponer que desde el sistema B medimos a´es decir hay una contracción del espacio en esta dirección normal al movimiento,

¿Como podemos dar por buenos los datos obtenidos de la contracción del espacio y la dilatación del tiempo y al mismo tiempo introducir esta condición?

Aplicando simplemente semejanza de triangulos, lo que habíamos repasado al principio:

$$kh = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} = k\sqrt{a^2 + b^2}, h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Si un lado disminuye k y su hipotenusa también, estamos en el caso del triangulo sistemaB de la figura 2. Recordar: ct´=(1/γ)ct y $l = \gamma l'$ tenemos el valor de k=γ por lo tanto a =γ a´ para formar un triangulo semejante.

Si alguien piensa que no tienen porque ser un triangulo semejante entonces tendríamos que el ángulo del haz de luz sería diferente para cada observador.

Si hemos demostrado que en una de las direcciones perpendiculares al movimiento también se contrae, podemos decir que en la otra también ocurre puesto que podemos definir “a” sobre un eje Y siendo el eje X el eje sobre el que se mueve el sistema B, haber hecho otro calculo paralelo definiendo “a” sobre Z y obtendríamos simultanamente una contracción del espacio en el eje Y y el eje Z. por lo tanto el espacio se contrae en la tres direcciones del espacio y además con los mismos valores.

Podemos montar dos sistemas de espejos paralelos para probarlo simultáneamente fig-3

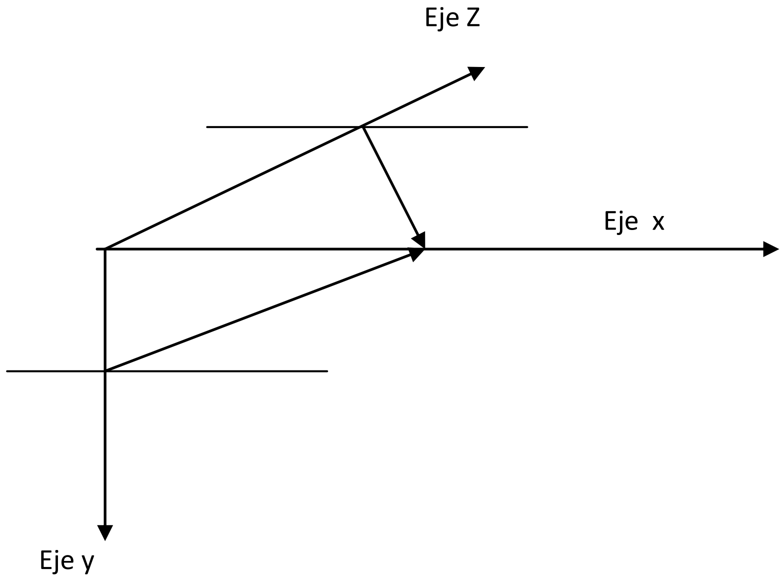


Fig-3

Por lo tanto tendremos la siguiente relación entre los sistemas A y B:

$lx = \gamma \; l'x$ contracción en el eje x

$ly = \gamma \; l'y$ contracción en el eje y

$lz = \gamma \; l'z$ contracción en el eje z

$t = \gamma \; t'$ dilatación del tiempo siendo $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

escrito por jose luis alvarez glez   j.lag@hotmail.es