Ejemplo: Una paradoja aparente. La figura 5.13*a* muestra un circuito para la carga de un condensador por una batería. La energía transferida a C por el proceso de carga es

$$W_a = \tfrac{1}{2}CV_a^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_a^2}{C}$$

La figura 5.13*b* muestra una disposición en la que el condensador cargado se conecta a otro condensador idéntico, pero descargado. El condensador cargado, cargará al descargado, hasta que las cargas en ambos condensadores sean iguales. Ya que la carga debe conservarse, la carga en el condensador en la parte (*a*) debe ser igual a las cargas de los dos condensadores en la parte (*b*); es decir

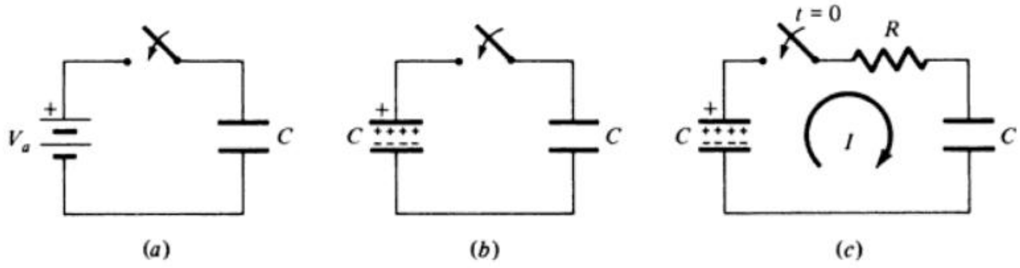

FIG. 5.13. (*a*) Una batería carga un condensador; (*b*) el condensador cargado carga otro idéntico descargado; (*c*) el mismo circuito que el (*b*) excepto que se ha añadido una resistencia R.

$$Q_a = Q_b$$

$$CV_a = (C + C)V_b \qquad \text{o} \qquad V_b = \tfrac{1}{2}V_a$$

La energía total en la parte (*b*) es

$$W_b = \tfrac{1}{2}C_b V_b^2 = \tfrac{1}{2}(2C)(\tfrac{1}{2}V_a)^2 = \tfrac{1}{4}CV_a^2$$

Ahora vemos que $W_b = 1/2\,W_a$, o solamente queda la mitad de la energía original. ¿Qué ocurre con la restante energía $1/2W_a$? Puede especularse que se ha disipado, durante el proceso de carga, en la resistencia del hilo. ¿Pero qué ocurre si los hilos de conexión son superconductores con resistencia nula?

Para contestar esta cuestión incluimos una resistencia R, como se indica en la figura 5.13*c*, calculamos las energías que intervienen y hacemos tender R a cero. La ecuación del voltaje de Kirchhoff para la figura 5.13*c* puede escribirse como

$$RI + \frac{2}{C}\int I\,dt = 0$$

con la condición inicial de que la corriente en el instante de cerrar el interruptor es $I|_{t=0} = V_a/R$ que nos da cuenta del estado cargado de uno de los condensadores y del estado descargado del otro. Derivando, obtenemos

$$\frac{dI}{dt} + \frac{2}{RC}I = 0$$

que con la condición inicial anterior tiene la solución

$$I = \frac{V_a}{R}e^{-(2/RC)t}$$

El voltaje final en el condensador inicialmente descargado es

$$V_c = \frac{1}{C}\int_0^\infty I\,dt = \frac{V_a}{2}$$

que por simetría también será el del condensador inicialmente cargado. Las energías en la figura 5.13*c* pueden escribirse como

$$
\begin{aligned}
W_c &= W_{\text{res}} + W_{\text{cap}} \\
&= \int_0^\infty RI^2\,dt + \tfrac{1}{2}(C + C)\left(\frac{V_a}{2}\right)^2 \\
&= \frac{CV_a^2}{4} + \frac{CV_a^2}{4} \\
&= W_a
\end{aligned}
$$

donde la integración se ha efectuado usando la expresión anterior para I. Las energías ahora se conservan, ya que $W_c = W_a$. Así vemos que la energía en R, que se convierte en calor durante el proceso de carga, es exactamente igual a $CV_a^2/4$ y es independiente del valor de R. En el límite cuando $R \to 0$, un pulso de corriente infinitamente corto ($T = RC \to 0$) pero infinitamente grande, transfiere $Q_a/2$ cargas del condensador cargado al descargado.