Determianción de la transmitancia y reflectancia espectral en medios periódicos

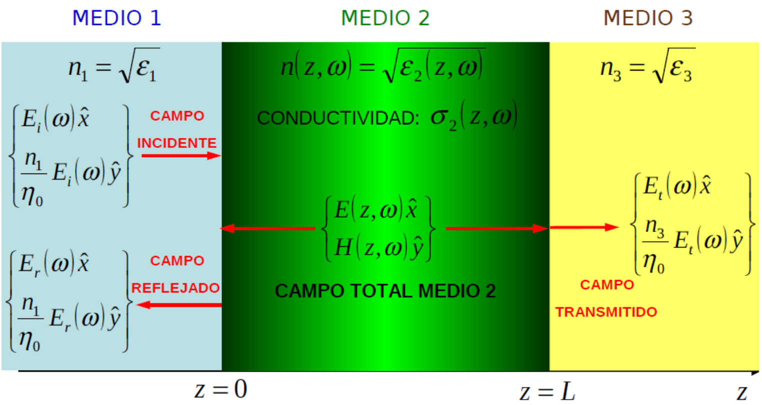

Figura 1:

El objetivo de esta práctica es simular la propagación de una onda plana en un medio material en el que la constante dielectrica varia sinusoidalmente con la posición.

El esquema de la figura consta de un medio monodimensional (medio 2) con parámetros constitutivos $\epsilon_2(z,\omega)$, $\sigma_2(z,\omega)$ y $\mu_2(z,\omega) \equiv 1$ en la región $z \in [0, L]$. Dicho medio se halla rodeado por dos medios lineales y homogéneos en las regiones $z < 0$ (medio 1) y $z > L$ (medio 3) con permitividades relativas $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_3 > 0$ respectivamente (sus respectivas permeabilidades relativas y conductividades son $\mu_1 = \mu_3 = 1$ y $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$). Los perfiles para la permitividad relativa $\epsilon(z,\omega)$, índice de refracción $n(z,\omega)$ y conductividad $\sigma(z,\omega)$ vienen dados por:

$$n(z,\omega) = \sqrt{\epsilon(z,\omega)} = \left\{ \begin{array}{c} n_1 = \sqrt{\epsilon_1}, z < 0 \\ \sqrt{\epsilon_2(z,\omega)}, z \in [0, L] \\ n_3 = \sqrt{\epsilon_3}, z > L \end{array} \right. \tag{1}$$

y

$$\sigma_2(z,\omega) = 0 \tag{2}$$

A fin de que se cumpla la condición de incidencia normal, asumimos que los campos $\mathbf{E}(z,\omega)$ y $\mathbf{H}(z,\omega)$ están polarizados según $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$ respectivamente[1], lo que nos permite escribir el campo electromagnético como:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}(z,\omega)=E(z,\omega)\,\widehat{x}\\ \mathbf{H}(z,\omega)=H(z,\omega)\,\widehat{y}\\ \mathbf{D}(z,\omega)=\epsilon_0\epsilon(z,\omega)\,E(z,\omega)\,\widehat{x}\\ \mathbf{B}(z,\omega)=\mu_0 H(z,\omega)\,\widehat{y}\end{gathered} \tag{3}$$

Al ser z la única variable espacial de la que dependen los campos, cualquier derivada parcial respecto a x o y es cero, luego de las ecuaciones de Maxwell se deduce que $\frac{\partial E(z,\omega)}{\partial z}\widehat{y}=\nabla\times\mathbf{E}(z,\omega)=i\omega\mathbf{B}(z,\omega)=i\omega\mu_0\mathbf{H}(z,\omega)=i\omega\mu_0 H(z,\omega)\,\widehat{y}$ y por tanto:

$$H(z,\omega)=-\frac{i}{\omega\mu_0}\frac{\partial E(z,\omega)}{\partial z} \tag{4}$$

Además, dado que $\mu(z,\omega)\equiv 1$ resulta evidente que $\nabla\mu(z,\omega)=\mathbf{0}$, con lo que en virtud de las ecuaciones de Maxwell y 3 obtenemos la ecuación de Helmholtz monodimensional para $E(z,\omega)$ como:

$$\frac{\partial^2 E(z,\omega)}{\partial z^2}+\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\epsilon(z,\omega)\right]E(z,\omega)=0,\forall z\in[0,L] \tag{5}$$

En la región $z<0$ (medio 1), la solución al campo viene dada por $E(z,\omega)=E_i(\omega)\,e^{\frac{i\omega n_1 z}{c}}+E_r(\omega)\,e^{-\frac{i\omega n_1 z}{c}}$ y $H(z,\omega)=\frac{n_1}{\eta_0}E_i(\omega)\,e^{\frac{i\omega n_1 z}{c}}-\frac{n_1}{\eta_0}E_r(\omega)\,e^{-\frac{i\omega n_1 z}{c}}$. Los términos que contienen $E_i(\omega)$ describen un campo incidente -que supondremos conocido- del medio 1 al medio 2, mientras que los términos que contienen $E_r(\omega)$ describen un campo reflejado que vuelve del medio 2 al medio 1 como consecuencia de las ecuaciones de Fresnel. Por lo tanto, podemos escribir el campo electromagnético total en el medio 1 como:

$$\begin{gathered}E(z,\omega)=E_i(\omega)\left[e^{\frac{i\omega n_1 z}{c}}+r(\omega)\,e^{-\frac{i\omega n_1 z}{c}}\right]\\ H(z,\omega)=\frac{n_1}{\eta_0}E_i(\omega)\left[e^{\frac{i\omega n_1 z}{c}}-r(\omega)\,e^{-\frac{i\omega n_1 z}{c}}\right]\end{gathered} \tag{6}$$

siendo $r(\omega)$ la *reflectancia espectral en amplitud* del medio 2 dada por:

$$r(\omega)=\frac{E_r(\omega)}{E_i(\omega)} \tag{7}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para la región $z>L$ (medio 3) obtenemos que $E(z,\omega)=E_t(\omega)\,e^{\frac{i\omega n_3(z-L)}{c}}$ y $H(z,\omega)=\frac{n_3}{\eta_0}E_t(\omega)\,e^{\frac{i\omega n_3(z-L)}{c}}$, lo cual representa un campo transmitido del medio 2 al medio 3 asumiendo que no hay campo reflejado del medio 3 al 2 (puesto que no hay ningún posible elemento reflector en la región $z>L$). En estas condiciones, el campo electromagnético total en el medio 3 se puede escribir como:

$$\begin{gathered}E(z,\omega)=t(\omega)\,E_i(\omega)\,e^{\frac{i\omega n_3(z-L)}{c}}\\ H(z,\omega)=\frac{n_3}{\eta_0}t(\omega)\,E_i(\omega)\,e^{\frac{i\omega n_3(z-L)}{c}}\end{gathered}\ ,\ z>L \tag{8}$$

[1]Dado que las polarizaciones TE y TM son indistinguibles en incidencia normal, se puede elegir cualquier otra polarización para los campos eléctrico y magnético manteniendo la perpendicularidad entre sí y con el eje z.

siendo $t(\omega)$ la *transmitancia espectral en amplitud* del medio 2 dada por:

$$t(\omega) = \frac{E_t(\omega)}{E_i(\omega)} \tag{9}$$

Se deduce fácilmente de la ecuación 6 que:

$$\begin{array}{c} E(0,\omega) = [1 + r(\omega)]\, E_i(\omega) \\ \left.\frac{\partial E(z,\omega)}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{i\omega n_1}{c}\,[1 - r(\omega)]\, E_i(\omega) \end{array} \tag{10}$$

Por otro lado, de la ecuación 8 que se deduce fácilmente que:

$$\begin{array}{c} E(L,\omega) = t(\omega)\, E_i(\omega) \\ \left.\frac{\partial E(z,\omega)}{\partial z}\right|_{z=L} = \frac{i\omega n_3}{c} t(\omega)\, E_i(\omega) \end{array} \tag{11}$$

Las ecuaciones 5-11 constituyen el planteamiento general para analizar electromagnéticamente el esquema de la figura inicial en el dominio de la frecuencia. Para obtener toda la información posible a partir de este planteamiento se ha de determinar $E(z,\omega)$ en la región $z \in [0, L]$ así como la transmitancia $t(\omega)$ y reflectancia $r(\omega)$ del medio 2 -las cuales únicamente dependerán de ϵ_1, ϵ_3, $\epsilon(z,\omega)$ y L-. De este modo, cualquier estructura monodimensional pasiva como la considerada en la figura inicial se caracterizará mediante su transmitancia y reflectancia así como por el campo eléctrico total $E(z,\omega)$ en cada punto y a cada frecuencia.
Conocido el fundamento teórico:

Teniendo en cuenta que la constante dieléctrica del medio 2 viene dada por la ecuación (12):

$$\epsilon(z,\omega) = \epsilon_p + \epsilon_m \cos\left(\frac{2\pi z}{\Lambda}\right),\ \forall z \in [0, L] \tag{12}$$

con los valores:

$$\epsilon_p = 2{,}3716,\ \epsilon_m = 0{,}0924,\ L = 7\mu m\ \Lambda = 0{,}2054\mu m\ n_1 = n_3 = 1{,}54 \tag{13}$$

- Para el rango de frecuencias desde $428\,THz$ hasta $545\,THz$:
  1. Representar el campo en el interior del medio 2 frente a la posición (Para cuatro frecuencias).
  2. La transmitancia espectral T(ω)=$\frac{n3}{n1}|t(\omega)|^2$
  3. La reflectancia espectral R(ω)=$|r(\omega)|^2$
- Modifica los valores dados en (13) para que el mínimo y el máximo de la transmitancia y reflectancia estén aproximadamente en la longitud de onda dada por la ecuación (14).

$$(expdiente^2\ modulo150) + 550\,nm \tag{14}$$