Apéndice B

Expresiones de velocidad y aceleración en distintas coordenadas

Índice

La aplicación de las ecuaciones de la dinámica requiere expresar las componentes de la velocidad y aceleración según un determinado sistema de coordenadas. Las coordenadas cartesianas ortonormales es la elección obvia y más simple pero no siempre son las más adecuadas; esto dependerá de la geometría del problema concreto. En ocasiones es ventajoso emplear otras coordenadas, como las coordenadas cilíndricas (o polares en el caso plano), esféricas, o el triedro intrínseco a la propia trayectoria.

En cada uno de estos casos, el aspecto que nos ocupa es obtener las componentes de los vectores velocidad y aceleración:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} ; \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} . \tag{B.1}$$

B.1. Coordenadas cartesianas.

El triedro $Oxyz$ está asociado a los versores $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ según cada dirección coordenada (figura B.1). Puesto que los versores del triedro son constantes, para obtener la velocidad y aceleración basta derivar directamente las coordenadas:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$
$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}$$
$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}$$

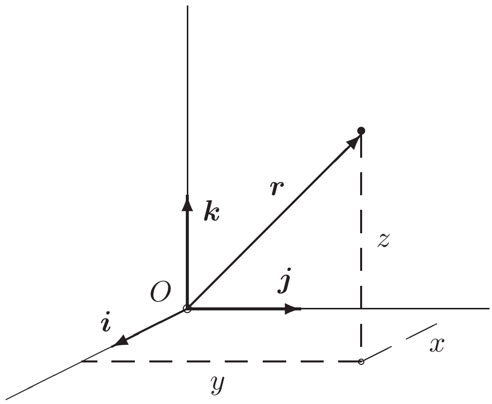

Figura B.1: *Coordenadas cartesianas*

B.2. Coordenadas cilíndricas y polares.

En este caso, las coordenadas que definen la posición son (ρ, θ, z), siendo ρ la distancia desde un punto fijo O, θ el ángulo que forma la proyección del radio vector sobre un plano fijo con una dirección dada del mismo, y z la altura del punto sobre dicho plano (figura B.2).

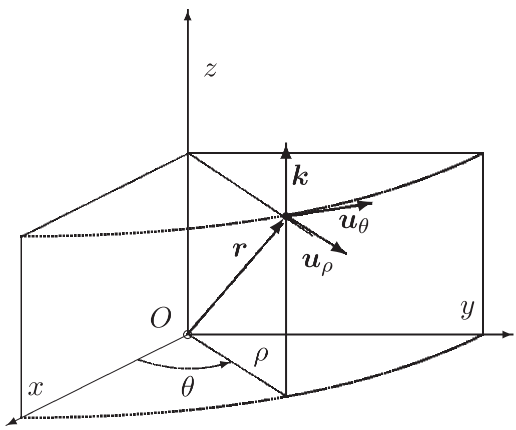

Figura B.2: *Coordenadas cilíndricas*

El triedro de vectores unitarios asociado (o base física) es $(\boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{k})$. El versor $\boldsymbol{u}_\rho$ queda definido como un vector unitario en la dirección de la proyección de $\boldsymbol{r}$ sobre el plano; $\boldsymbol{k}$ es el versor perpendicular al mismo, y $\boldsymbol{u}_\theta$ es perpendicular a los dos anteriores. En este triedro tanto $\boldsymbol{u}_\rho$ como $\boldsymbol{u}_\theta$ varían de punto a punto, constituyendo un sistema de coordenadas *curvilíneas.*

La posición de un punto queda definida mediante

$$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{u}_\rho + z\boldsymbol{k} \tag{B.2}$$

expresión que engloba también a las coordenadas polares para el movimiento plano, sin más que hacer $z = 0$.

Es inmediato establecer las relaciones con las coordenadas cartesianas, tomando el plano de referencia Oxy de forma que se comparte la coordenada z:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

Mientras que entre los versores de ambos triedros la relación es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_\rho &= \cos\theta\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}\,\theta\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{u}_\theta &= -\,\mathrm{sen}\,\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

Derivando estas expresiones respecto del tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{u}}_\rho &= -\dot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\boldsymbol{i} + \dot\theta\cos\theta\boldsymbol{j} \\ &= \dot\theta\boldsymbol{u}_\theta \\ \dot{\boldsymbol{u}}_\theta &= -\dot\theta\cos\theta\boldsymbol{i} - \dot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\boldsymbol{j} \\ &= -\dot\theta\boldsymbol{u}_\rho \\ \dot{\boldsymbol{k}} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Empleando estas igualdades y derivando el vector posición (B.2) se obtiene la velocidad,

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot\rho\boldsymbol{u}_\rho + \rho\dot\theta\boldsymbol{u}_\theta + \dot z\boldsymbol{k};$$

repitiendo la operación, se obtiene la aceleración:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot\rho - \rho\dot\theta^2)\boldsymbol{u}_\rho + (2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta)\boldsymbol{u}_\theta + \ddot z\boldsymbol{k}\,. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\theta^2 \\ a_\theta = 2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta \\ a_z = \ddot z \end{cases} \tag{B.3}$$

B.3. Coordenadas esféricas.

La posición de un punto queda ahora referida a las dos coordenadas angulares en una esfera de radio r: la longitud φ y la latitud θ (figura B.3).

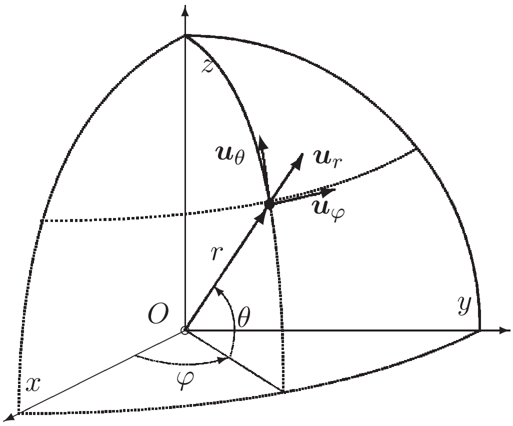

Figura B.3: *Coordenadas esféricas*

El triedro físico es ahora $(\boldsymbol{u}_\varphi, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{u}_r)$. La línea coordenada de longitud φ constante define el meridiano, al cual es tangente el versor $\boldsymbol{u}_\theta$. Asimismo la línea de latitud θ constante define un paralelo, al cual es tangente el versor $\boldsymbol{u}_\varphi$. Por último, el versor $\boldsymbol{u}_r$ lleva la dirección y sentido del radio vector $\boldsymbol{r}$.

Proyectando sobre las direcciones del triedro cartesiano se obtienen las relaciones con los versores del mismo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_r &= \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\boldsymbol{j} + \mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{u}_\theta &= -\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{u}_\varphi &= \boldsymbol{u}_\theta \wedge \boldsymbol{u}_r = -\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

En este caso los tres versores son variables, función del punto. Para obtener sus derivadas temporales, expresaremos primero sus derivadas parciales respecto de las coordenadas:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial r} = \boldsymbol{0}; \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial \theta} = \boldsymbol{u}_\theta; \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi\\
&\frac{\partial \boldsymbol{u}_\theta}{\partial r} = \boldsymbol{0}; \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}_\theta}{\partial \theta} = -\boldsymbol{u}_r; \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}_\theta}{\partial \varphi} = -\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi\\
&\frac{\partial \boldsymbol{u}_\varphi}{\partial r} = \boldsymbol{0}; \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}_\varphi}{\partial \theta} = \boldsymbol{0}; \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}_\varphi}{\partial \varphi} = \mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{u}_\theta - \cos\theta\,\boldsymbol{u}_r
\end{aligned}$$

Empleando estas relaciones, se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{u}}_r &= \frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \boldsymbol{u}_r}{\partial \varphi}\dot{\varphi} \\
&= \dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta + \dot{\varphi}\cos\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi \\
\dot{\boldsymbol{u}}_\theta &= -\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi - \dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_r \\
\dot{\boldsymbol{u}}_\varphi &= \dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\theta - \dot{\varphi}\cos\theta\,\boldsymbol{u}_r
\end{aligned}$$

Por último, utilizamos estas expresiones en las derivadas temporales de $\boldsymbol{r}$, para obtener:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}} &= \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + r\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_\varphi \\
\ddot{\boldsymbol{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + r\ddot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta \\
&\quad + (2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\theta - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta + r\ddot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{u}_\varphi
\end{aligned}$$

B.4. Triedro intrínseco

La propia curva definida por la trayectoria dinámica, $\boldsymbol{r}(t)$, permite definir un triedro denominado *«intrínseco»*, que a menudo resulta de gran utilidad para describir el movimiento. Se resumen aquí algunas definiciones y propiedades fundamentales de dicho triedro. Para un mayor detalle puede consultarse algún texto de geometría diferencial[1].

Vectores y planos del triedro.— Los versores que constituyen el triedro intrínseco están definidos por la trayectoria misma. Ésta puede considerarse parametrizada bien por el tiempo ($\boldsymbol{r}(t)$, con derivada $\dot{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$), bien por la longitud del arco de curva s, sabiendo que $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}$. El sentido positivo del arco coincide con el avance real sobre la curva a lo largo del tiempo.

- *tangente* $\boldsymbol{t} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$, vector unitario con igual dirección y sentido que la velocidad $\dot{\boldsymbol{r}}$.
- *normal principal* $\boldsymbol{n}$, vector unitario normal a la curva ($\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$), y perteneciente al plano osculador (plano definido por dos tangentes sucesivas a la curva, $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{t}+\mathrm{d}\boldsymbol{t}$). Su dirección y sentido lo tomaremos por tanto según $\mathrm{d}\boldsymbol{t}$, es decir, hacia el lado cóncavo de la misma.

[1] D.J. Struik: *Geometría Diferencial Clásica,* Aguilar 1973; J.A. Fernández Palacios: *Mecánica Teórica de los Sistemas de Sólidos Rígidos,* (Anejo 1A), 1989.

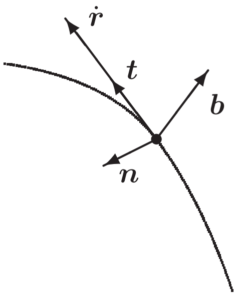

Figura B.4: *Vectores del triedro intrínseco*

– *binormal* $\boldsymbol{b} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}$, perpendicular por tanto a la curva ($\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{b} = 0$), y también a la normal principal ($\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b} = 0$).

Los versores $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{b}$ definen el plano normal, cualquier recta contenida en este plano es normal a la curva. Por otra parte, el plano osculador queda definido por $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})$, siendo la binormal perpendicular al mismo.

Fórmulas de Frenet.— Al ser un versor de módulo unidad, la derivada del vector tangente es normal al mismo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\underbrace{\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t}}_{=1}) = 2\boldsymbol{t} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = 0. \tag{B.4}$$

Por la definición hecha de $\boldsymbol{n}$, la derivada $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}s$ lleva la dirección de $\boldsymbol{n}$, y el módulo se denomina *curvatura*:

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} \right|.$$

Se puede interpretar de forma intuitiva razonando que cuanto más se «doble» la curva (por unidad de arco), mayor es su curvatura κ. Dada la definición realizada de $\boldsymbol{n}$, por la que su sentido es siempre hacia el lado cóncavo, dicha curvatura resulta siempre positiva. Asimismo, se define el radio de curvatura como su inversa: $R \stackrel{\text{def}}{=} 1/\kappa$. Así,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \kappa\,\boldsymbol{n} = \frac{1}{R}\boldsymbol{n}} \qquad \text{(1.ª fórmula de Frenet).} \tag{B.5}$$

Veamos ahora la variación de la binormal $\boldsymbol{b}$. Si la curva es plana, el plano osculador es fijo y $\mathrm{d}\boldsymbol{b}/\mathrm{d}s = 0$. En un caso general, esta derivada constituye una medida del alabeo de la curva que denominaremos *torsión*. En cuanto a la dirección de esta derivada, razonamos en primer lugar, por los mismos argumentos esgrimidos en (B.4), que es normal al propio $\boldsymbol{b}$. Por otra parte,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\underbrace{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{t}}_{=0}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{t} + \boldsymbol{b}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{t} + \underbrace{\boldsymbol{b}\cdot(\kappa\,\boldsymbol{n})}_{=0} = 0.$$

Deducimos pues que $\mathrm{d}\boldsymbol{b}/\mathrm{d}s = 0$ es normal a $\boldsymbol{b}$ y a $\boldsymbol{t}$, es decir, lleva la dirección de $\boldsymbol{n}$, mientras que su módulo lo llamaremos torsión τ. Estableciendo de forma convencional el signo negativo en esta relación, puede escribirse

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s} = -\tau\,\boldsymbol{n} = -\frac{1}{T}\boldsymbol{n}} \qquad \text{(2.ª fórmula de Frenet).} \tag{B.6}$$

(El radio de torsión resulta, análogamente al de curvatura, $T \stackrel{\text{def}}{=} 1/\tau$.)

Por último, derivando la normal principal,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{t}) = (-\tau\,\boldsymbol{n})\wedge\boldsymbol{t} + \boldsymbol{b}\wedge(\kappa\,\boldsymbol{n}),$$

es decir:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} = \tau\,\boldsymbol{b} - \kappa\,\boldsymbol{t}} \qquad \text{(3.ª fórmula de Frenet).} \tag{B.7}$$

Expresiones de la velocidad y aceleración.— Empleando las fórmulas de Frenet es inmediato deducir las siguientes expresiones para velocidad y aceleración:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{t} = v\,\boldsymbol{t},$$

relación que expresa simplemente que la velocidad es tangente a la trayectoria. Derivando de nuevo,

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{v}\,\boldsymbol{t} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{v}\boldsymbol{t} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}$$

Se identifican en esta expresión claramente dos términos de la aceleración:

$$\begin{cases} \dot{v}\,\boldsymbol{t} & \text{aceleración tangencial} \\ \dfrac{v^2}{R}\boldsymbol{n} & \text{aceleración normal (centrípeta)} \end{cases}$$