1. Relojes desplazados lentamente según la Relatividad Especial

Comenzaremos nuestro análisis recordando que las transformaciones de Lorentz tienen la forma:

$$\left.\begin{array}{c} t'=\gamma\left(t+\frac{v}{c^2}x\right) \\ x'=\gamma\left(x+v\cdot t\right) \\ y'=y \\ z'=z \end{array}\right\} \quad (1)$$

donde

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

Ahora, la ecuación del tiempo *t’* para el reloj en el origen del sistema en movimiento, es decir, con *x’=0* y por tanto con *x = -vt* será:

$$t'=\gamma\cdot\left(t+\frac{v}{c^2}\cdot(-vt)\right)=t\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{t}{\gamma} \quad (3)$$

que es la expresión habitual para la dilatación temporal. Si, además, estamos ante velocidades pequeñas, *v << c* podremos aplicar la aproximación:

$$\sqrt{1\pm x}\simeq 1\pm\frac{x}{2} \quad (4)$$

y llegaremos a que

$$t'\simeq t\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}\right) \quad (5)$$

y así obtenemos que el retraso entre ambos relojes será:

$$\delta'\simeq t\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2} \quad (6)$$

que es la expresión obtenida por Einstein en su artículo de 1905 donde, además, escribió:

“*Si en los puntos A y B de K existen relojes sincronizados, que se encuentran en reposo con respecto al sistema en reposo, y movemos el reloj de A con velocidad v a lo largo de la línea que una A con B,* ***al llegar al punto B los relojes ya no estarán sincronizados****, sino que el reloj desplazado de A hasta B mostrará, con respecto al reloj que desde el principio se encontraba en B un retraso de ½·t·(v/c)^2 segundos, donde t es el tiempo que necesita el reloj para pasar de A a B.*

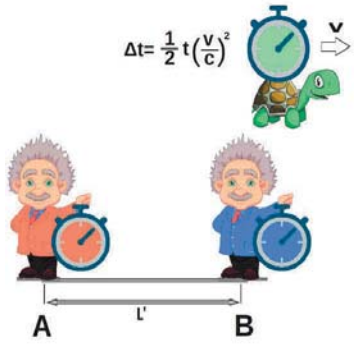

Figura 1: Retraso de un reloj desplazado lentamente.

Inmediatamente se ve que este resultado también es válido cuando el reloj se desplaza desde A hasta B a lo largo de una línea poligonal arbitraria, incluso cuando los puntos A y B coinciden.

Si suponemos que el resultado demostrado para una línea poligonal es válido también para una curva de curvatura continua, obtenemos la siguiente conclusión: ***Si en A se encuentran dos relojes sincronizados y movemos uno de ellos con velocidad constante a lo largo de una curva cerrada hasta regresar al punto A, utilizando para ello un tiempo de t segundos, entonces al arribar al punto A el reloj desplazado mostrará un retraso de ½·t·(v/c)^2 segundos, con respecto al reloj que ha permanecido inmóvil.*** ”

De los párrafos anteriores de Einstein llama la atención la falta de comentarios sobre la aplicación del principio de relatividad a los relojes y la simetría en el retraso que debería observar el reloj que se desplaza. Es gracias al principio de relatividad por lo que el reloj en movimiento puede afirmar que él está en reposo y que es el reloj en B el que se mueve hacia él a velocidad v, de manera que al llegar a su posición, sería B el que debería estar retrasado. Es la aplicación de dicha simetría la que genera las famosas paradojas temporales. Quizás ni Einstein fue consciente en ese momento de la necesidad de aplicar el principio de relatividad, lo que explicaría que fuera Paul Langevin el que formulara la famosa “paradoja de los gemelos”.

Por último, también llama la atención la falta de un análisis desde el punto de vista de un observador externo en movimiento relativo con respecto a los relojes de K para comprobar si también llegaría a los mismos resultados. Seguramente Einstein no lo hizo porque pensó que, por el mismo principio de relatividad, el resultado no podía ser de otra forma.

En los siguientes apartados procederemos a completar este proceso realizando los cálculos desde el punto de vista de un observador externo.

2. Desfases introducidos por la sincronización de Einstein

Como acabamos de ver, Einstein afirmó que el reloj desplazado lentamente sufrirá un retraso con el reloj situado en B que previamente ha sido **sincronizado** con el reloj en A. Por este motivo es necesario analizar el proceso de sincronización desde el punto de vista del observador externo.

Supongamos un sistema de referencia K' que se mueve a una velocidad v con respecto a otro sistema estático K. Supongamos que en K' hay dispuestos 3 relojes, Verde (V), Naranja (N) y Azul (A) separados una distancia L' (longitud propia).

Consideraremos al reloj en N como el origen de coordenadas de K' de manera que V y A se deberán sincronizar con él. Para ello N manda de forma simultánea en su tiempo t' = -L'/c sendos pulsos a Azul y Verde de manera que, al recibir dichos pulsos, estos deben sincronizar sus relojes asignándoles el valor t' = 0. Tras este proceso, los tres relojes deberán estar sincronizados conforme al criterio de Einstein.

Veamos ahora cómo ve el proceso de sincronización de K' un observador inercial Blanco (B) que se encuentra en reposo en K. La relatividad de la simultaneidad implica, entre otras cosas, que los relojes que en el sistema K' están sincronizados no lo estarán para un observador externo K.

Para B, puesto que K' se mueve con velocidad v en el sentido de los valores positivos del eje X, verá que el reloj Verde se mueve al encuentro del pulso emitido por Naranja mientras que el reloj Azul lo hace en la misma dirección del pulso de luz. Por tanto, el pulso llegará antes a V, que estará adelantado, que a A que estará retrasado con respecto al reloj de N.

El observador B puede calcular dicho desfase simplemente haciendo uso de las transformaciones de Lorentz (1). De esta manera, para el reloj azul, el retraso (signo "-") que medirá B será:

$$\Delta t_A = 0 - \gamma \cdot \left(0 + L' \cdot \frac{v}{c^2}\right) = -\gamma \cdot L' \cdot \frac{v}{c^2} \qquad (7)$$

y el adelanto (signo "+") de V con respecto a N que medirá B será :

$$\Delta t_V = 0 - \gamma \cdot \left(0 - L' \cdot \frac{v}{c^2}\right) = \gamma \cdot L' \cdot \frac{v}{c^2} \qquad (8)$$

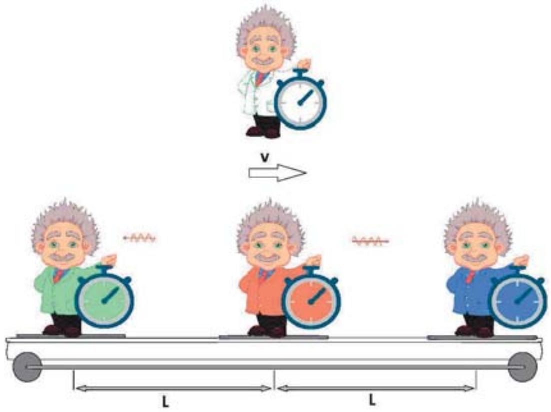

Figura 2: Pulsos emitidos por el observador N para sincronizar a V y A.

Si ahora dividimos por γ para compensar la dilatación temporal que sufren los relojes en K', el desfase de los relojes A y V con respecto al central que calcula B sería:

$$\delta' = \pm L' \cdot \frac{v}{c^2} \qquad (9)$$

Y el desfase de tiempo entre los relojes V y A será:

$$\Delta t'_{VA} = \Delta t'_V - \Delta t'_A = 2 \cdot L' \cdot \frac{v}{c^2} \qquad (10)$$

Debemos aclarar que estos desfases sólo tienen sentido para B. Para los relojes en K' estos retardos deben ser nulos ya que están sincronizados conforme al criterio de Einstein.

3. Relojes desplazados lentamente y el efecto Sagnac generalizado

El siguiente paso será analizar el desfase de relojes desplazados lentamente pero desde el punto de vista un observador externo. En cualquier caso, debido a la equivalencia de todos los observadores inerciales, los resultados obtenidos deben validar la propuesta de Einstein de que dichos relojes deben retrasar una cantidad $\frac{1}{2} \cdot t \cdot (v/c)^2$. Veamos.

Supongamos nuevamente tres relojes, Verde (V), Naranja (N) y Azul (A) en movimiento rectilíneo y uniforme. Los tres relojes están sincronizados y en la misma posición inicial. Imaginemos que, en un momento determinado, los relojes V y A comienzan a moverse lentamente en direcciones opuestas con respecto a N, ambos a una velocidad u'<<c con respecto a él, hasta recorrer una distancia L'.

Siempre será posible definir un nuevo observador Blanco (B) para el que, si N se mueve a la velocidad v respecto a él, entonces V se moverá a velocidad v-u y A se moverá a velocidad v+u.

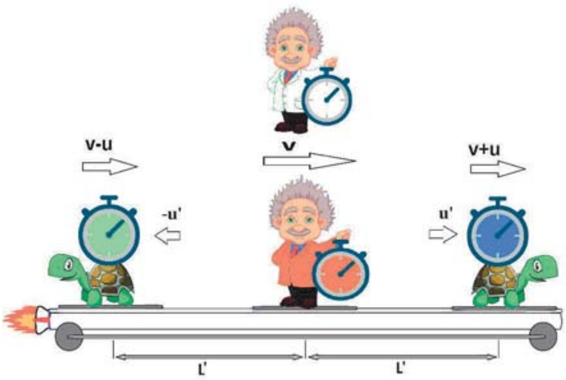

Figura 3: Relojes desplazados lentamente en direcciones opuestas.

Si tenemos en cuenta la ecuación de transformación de velocidades de Einstein:

$$w=\frac{u'+v}{1+\frac{u'\cdot v}{c^2}} \tag{11}$$

entonces podemos calcular u como:

$$u=\frac{(v+u')}{(1+\frac{u'\cdot v}{c^2})}-v=\frac{(v+u'-v-\frac{u'\cdot v^2}{c^2})}{(1+\frac{u'\cdot v}{c^2})} \tag{12}$$

y si suponemos u'<<c y, por tanto que $u'\cdot v/c^2<<1$, podemos aproximarla por:

$$u=\frac{u'\cdot(1-v^2/c^2)}{(1+\frac{u'\cdot v}{c^2})}\simeq\frac{u'}{\gamma^2} \tag{13}$$

Desde el punto de vista del observador "estacionario" o externo, B, aplicando la dilatación temporal (6), los tres relojes en movimiento sufrirán un retraso de:

$$\Delta t'=\Delta t\cdot\sqrt{1-\frac{(v\pm u)^2}{c^2}} \tag{14}$$

siendo Δt el tiempo medido en el reloj estacionario B y con u = 0 para el observador N.

Ahora debemos intentar encontrar una ecuación de manera que podamos expresar el desfase entre los relojes de V y A con respecto al de N de la forma:

$$\Delta t'=\Delta t\cdot\sqrt{1-\frac{(v\pm u)^2}{c^2}}\simeq\Delta t'_N\cdot\pm\delta' \tag{15}$$

siendo δ' el retraso (signo "-") o adelanto (signo "+") con respecto al tiempo $\Delta t'_N$ del observador N.

A diferencia de lo que hizo Einstein en su artículo, todavía no es posible aplicar la aproximación (4) ya que no podemos afirmar que v<<c. Pero para solucionarlo podemos aproximar la expresión (14) en series de Taylor hasta la primera potencia de la velocidad u. Al quedarnos con la primera potencia del desarrollo estamos suponiendo que u<<v. Por tanto, si consideramos que:

$$f(v)=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{16}$$

entonces si aplicamos Taylor obtenemos que:

$$f(v\pm u)\simeq f(v)\pm f'(v)\cdot u \tag{17}$$

donde f'(v) es su derivada con respecto a v. Pero si queremos tener el resultado en función de u' (la velocidad medida por N) entonces deberemos sustituir u por el valor obtenido en (13):

$$f(v\pm u)\simeq f(v)\pm\frac{df}{dv}\cdot\frac{u'}{\gamma^2} \tag{18}$$

Si derivamos y sustituimos en (14) tenemos:

$$\Delta t'\simeq\Delta t\cdot(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mp\frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{u'}{\gamma^2}) \tag{19}$$

y si operamos cancelando la raíz con γ

$$\Delta t'\simeq\Delta t\cdot(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mp\frac{v\cdot u'}{c^2}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}) \tag{20}$$

y sacando factor común la raíz:

$$\Delta t'\simeq\Delta t\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}(1\mp\frac{v\cdot u'}{c^2}) \tag{21}$$

Pero el producto fuera del paréntesis no es más que el tiempo transcurrido en N, así que:

$$\Delta t'\simeq\Delta t'_N\cdot(1\mp\frac{v\cdot u'}{c^2}) \tag{22}$$

Luego tenemos que el desfase δ' será:

$$\delta'\simeq\mp\Delta t'_N\cdot\frac{v\cdot u'}{c^2} \tag{23}$$

La expresión (23) se corresponde con un desfase con dependencia direccional, por lo que podemos interpretarlo como un **efecto tipo Sagnac generalizado**. Si particularizamos el valor anterior para un movimiento circular en el que el observador estacionario B se sitúa en el centro de la circunferencia, y haciendo v = R Ω obtenemos

$$\delta' \simeq \Delta t'_N \cdot \frac{R \cdot \Omega \cdot u'}{c^2} \quad (24)$$

que coincide con la ecuación del **efecto Sagnac para sistemas en rotación**.

Volviendo a nuestro análisis, si suponemos que el tiempo medido por N necesario para recorrer una distancia L' es:

$$\Delta t'_N = \frac{L'}{u'} \quad (25)$$

entonces el desfase que sufrirá cada reloj al recorrer la distancia L' será:

$$\delta' \simeq \pm L' \cdot \frac{v}{c^2} \quad (26)$$

resultado en el que el signo "-" indica retraso cuando u' es positiva (sentido de $N \rightarrow A$) y el "+" indica adelanto cuando u' es negativa (sentido $N \rightarrow V$).

Del resultado anterior debemos destacar tres consecuencias. La primera es su no dependencia con la velocidad u' a la que se desplaza el reloj. Esto es debido a la aproximación hasta primer orden usada en los cálculos.

La segunda es la coincidencia con el valor obtenido en (9) para el desfase introducido por el proceso de sincronización. Pero ¿qué significa que los valores obtenidos en (26) y en (9) coincidan? Pues que un reloj que partiendo de la posición central de Naranja y sincronizado con este, y que se mueva lentamente, tras recorrer una distancia L' **no marcará ningún desfase con el reloj allí situado**. Es decir, según los cálculos de Blanco, cuando un reloj que parta de N llegue a la posición de Azul estará efectivamente retrasado en $L'v^2/c^2$ con respecto a N, pero sincronizado con el reloj A, ya que éste, por el procedimiento de sincronización implementado ya está retrasado en la misma cantidad (26) con respecto N. Y de igual forma, el reloj que se mueva hacia Verde estará al llegar a su posición sincronizado con él, pero adelantado con respecto a Naranja. Este resultado está en clara contradicción con lo afirmado por Einstein.

Por ultimo, indicar que si el desfase que acumula el reloj tiene signo distinto dependiendo del sentido en el que este se desplace, **en una trayectoria de ida y vuelta, el desfase total será δ = *0***, en contra también de lo afirmado por Einstein en su artículo de 1905.

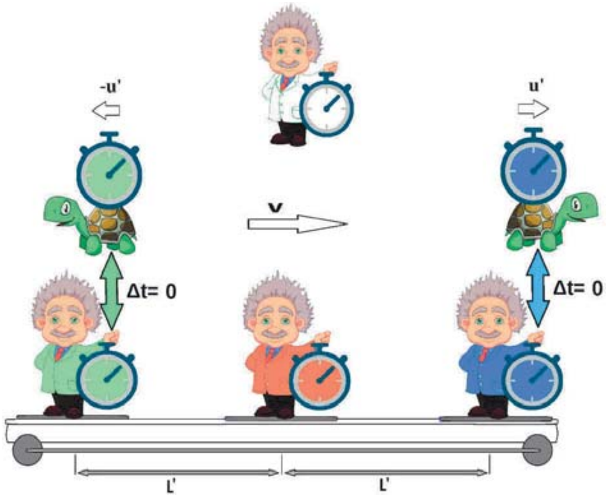

Figura 4: Desfase nulo de los relojes desplazados lentamente.

Y lo aquí calculado es válido para cualquier v, es decir, para cualquier observador externo B, ya que el único requisito impuesto en los cálculos ha sido que u<<c con u<v.

Por tanto, tras los cálculos realizados en los apartados anteriores desde el punto de vista de un observador externo B, hemos obtenido las siguientes resultados:

1. Un reloj desplazado lentamente que se mueva desde un punto A hasta otro B recorriendo una distancia L', al llegar al punto B no mostrará ningún desfase con el reloj allí situado.
2. Un reloj desplazado lentamente que realice una trayectoria de ida y vuelta tampoco mostrará ningún retraso con respecto al reloj situado en la posición de inicio.

Estos resultados, como ya hemos indicado, están en clara contradicción con lo afirmado por Einstein. No obstante, la dilatación temporal de los relojes en movimiento es un hecho verificado varias veces experimentalmente. Ejemplos de ello son el sistema GPS, la vida media de los muones o el experimento de Hafele-Keating, y sin embargo, tanto los cálculos de Einstein como los aquí realizados están dentro del marco de la Relatividad Especial.