¿Es la Relatividad Especial compatible con el universo estático de Einstein? Propuesta de nuevas transformaciones “genéricas”.

1. Métrica y geodésicas en el universo de Einstein

La métrica para la hiperesfera del universo estático que propuso Einstein se puede escribir como:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2 \left(d\xi^2 + \sin^2 \xi \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\phi^2 \right) \right) \quad (1)$$

Se puede calcular (véase [2]) que aquellas direcciones con las coordenadas siguientes:

$$\xi = \theta = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

se corresponden con una **geodésica** de máxima longitud, la geodésica ecuatorial, que reduce la métrica anterior a la forma bidimensional más simple:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2 d\phi^2 \quad (3)$$

siendo ϕ definida en el intervalo

$$\phi \epsilon [0, 2\pi) \quad (4)$$

Sí, además, hacemos el cambio de coordenadas

$$x = R \cdot \phi \quad (5)$$

entonces x estará definida en el intervalo

$$x \epsilon [0, 2\pi R) \quad (6)$$

por lo que tenemos que **la posición $x = 0$ es la misma que la posición $x = 2\pi R$.** Entonces, la métrica anterior quedaría con la forma más conocida de:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 \quad (7)$$

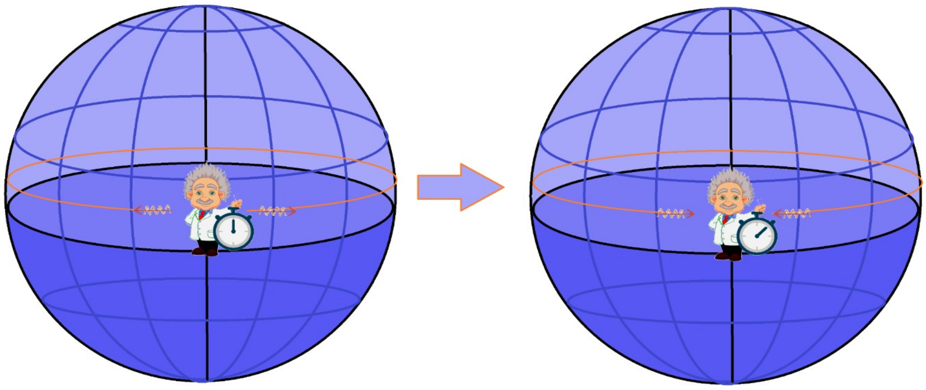
que es la métrica de Minkowski pero con la coordenada x limitada a (4) y siendo L la longitud del universo:

$$L = 2\pi R \quad (8)$$

Por tanto, nos restringiremos al caso específico en el que **los observadores y los rayos de luz se desplacen sobre la geodésica ecuatorial** (coordenada X).

Puesto que asumimos que la Relatividad Especial es válida en esta geodésica, entonces tendremos que aceptar las transformaciones de Lorentz como las expresiones de cambio de coordenadas aplicables entre cualesquiera dos sistema de referencia que se muevan sobre ella. Pero la aceptación de la TRE implica la validez de sus postulados aplicados de manera restringida a esta geodésica, es decir, equivalencia de los observadores, constancia de la velocidad de la luz, contracción de longitudes y dilatación temporal. Es justo esta dilatación temporal la que se necesita para la aparición y estudio de la paradoja de los gemelos en este universo einsteiniano.

Puesto que la TRE establece que la velocidad de la luz en cualquier dirección es siempre igual a *c,* entonces debe existir un observador, al que llamaremos estático o privilegiado, para el que dos pulsos emitidos simultáneamente en direcciones opuestas deben ser recibidos, tras rodear el universo, también de forma simultánea.



(a) (b)

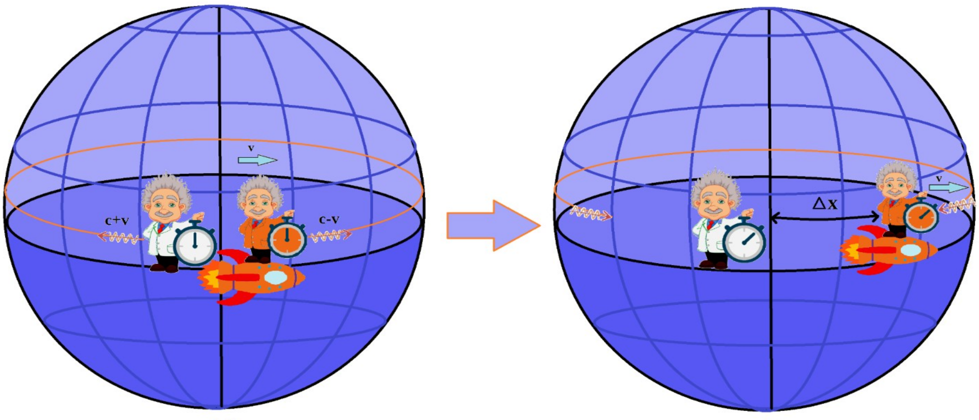
Figura 1: Emisión simultánea (a) y recepción también simultánea (b) de dos pulsos de luz en sentidos opuestos.

La constancia de *c* para dicho observador significa que es válido el criterio de sincronización de Einstein, lo que le permite usarlo para sincronizar sus relojes y construir un sistema de referencia (véase el apartado 2.) Además, este observador puede calcular la longitud del universo, *L*, sin más que medir el tiempo *Δt* que tarda un pulso en regresar al punto de partida y calcular:

$$L = 2\pi R = c \cdot \Delta t \qquad (9)$$

Una vez definido este observador estático, será evidente darse cuenta de que para cualquier otro observador que se mueva con velocidad *v* respecto a él, la recepción de los pulsos emitidos simultáneamente en sentidos opuestos ya no será simultánea. Efectivamente, el haz de luz enviado en el sentido opuesto al del movimiento del observador móvil tendrá que recorrer una distancia *Δx* menor (la distancia que se ha movido dicho observador durante ese tiempo).

Desde el punto de vista del observador estático, el móvil se dirige en busca del haz enviado en sentido contrario, mientras se aleja del pulso enviado en el mismo sentido de *v*. Para el observador estático las velocidades efectivas de los pulsos de luz con respecto al observador móvil serán *c + v* en un caso y *c – v* en el otro.



(a) (b)

Figura 2: Emisión simultánea (a) y recepción no simultánea (b) para un observador que se mueve a velocidad v.

El resultado final de lo expuesto es que, para el observador en movimiento, la recepción de ambos pulsos ya no es simultánea y, por tanto, esto lo puede interpretar como que la velocidad de la luz tiene valores distintos dependiendo del sentido de transmisión y, por tanto, no es válido para él el principio de constancia de la velocidad de la luz.

La conclusión anterior también puede obtenerse trazando los diagramas de espacio-tiempo de ambos observadores para la emisión y recepción de los pulsos. En la figura siguiente se muestran dichos diagramas para el caso de un observador que se mueve a *v = 0,5 c* hacia la derecha, por lo que se muestra su eje temporal *ct'* en naranja. La figura (a) representa el diagrama de tiempos del pulso enviado hacia la izquierda, es decir, en sentido contrario a *v* (recuérdese que en este universo cerrado el punto 0 y L son el mismo), (b) se corresponde con el pulso enviado en el mismo sentido que *v*, y en (c) se muestran los dos procesos simultáneos. Y, como se desprende de (c), para ambos observadores existe una diferencia de tiempo en la recepción de los pulsos de luz (*Δt* en azul para el observador estático y *Δt'* en rojo para el observador en movimiento).

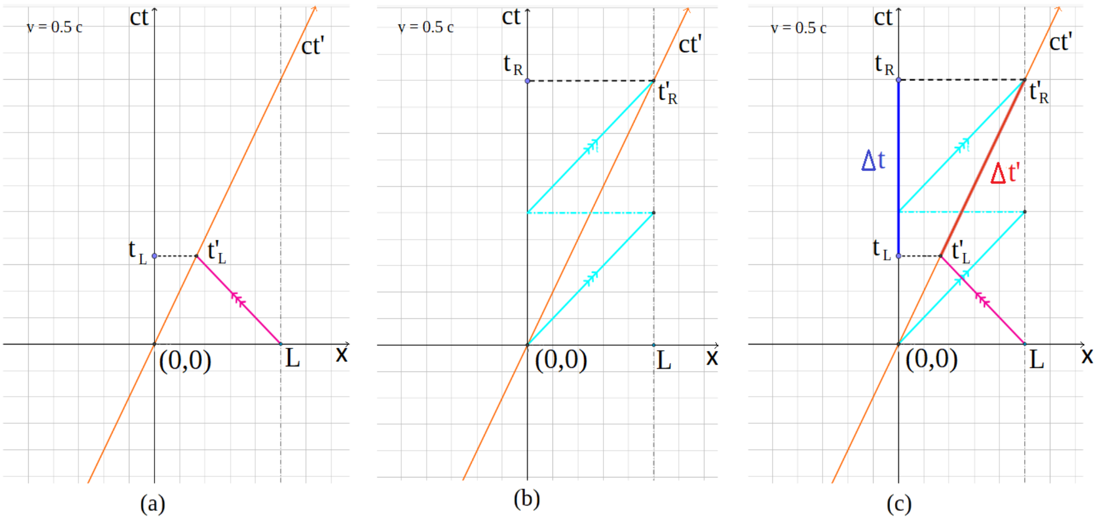


Figura 3: Diagramas temporales de la transmisión de pulsos en sentidos opuestos.

Además, como consecuencia de lo anterior, para el observador en movimiento no sería posible la sincronización según el criterio de Einstein (excepto a nivel local, como veremos más adelante), ya que, recordemos, el criterio de sincronización de Einstein establece por definición que la velocidad de la luz es *c* para ambos sentidos. El intento por parte de cualquier observador móvil de sincronizar los relojes provocará una discontinuidad, como veremos a continuación. Pero para ello, volveremos por un momento al universo infinito y plano de Minkowski.

2. Definición de simultaneidad, sistema de referencia. Criterio de sincronización de Einstein

En su artículo [1] Einstein describe su criterio de sincronización y cómo debe construirse un sistema de referencia basado en él: "*Si en el punto A del espacio se encuentra un reloj, un observador que se encuentre en A puede evaluar cronológicamente los eventos en la vecindad inmediata de A, buscando las posiciones de la manecilla del reloj que corresponda simultáneamente a estos eventos. Si en el punto B del espacio se encuentra un reloj -queremos añadir "un reloj de exactamente la misma naturaleza como al que se encuentra en A- también es posible realizar una evaluación cronológica de los eventos en la vecindad inmediata de B mediante un observador que se encuentra en B. Sin embargo, sin especificaciones adicionales no es posible comparar cronológicamente el evento en A con el evento en B; hasta ahora hemos definido un "tiempo A" y un "tiempo B", pero no un "tiempo" común para A y B. Este último tiempo se puede definir* ***estableciendo por definición*** *que el "tiempo" que necesite la luz para viajar de A a B sea igual al tiempo para pasar de B a A*".

El párrafo anterior de Einstein deja muy claro cómo se definen las coordenadas en un sistema de referencia y cómo se debe proceder a sincronizar los relojes. Gráficamente, se puede ilustrar lo anterior con la siguiente figura:

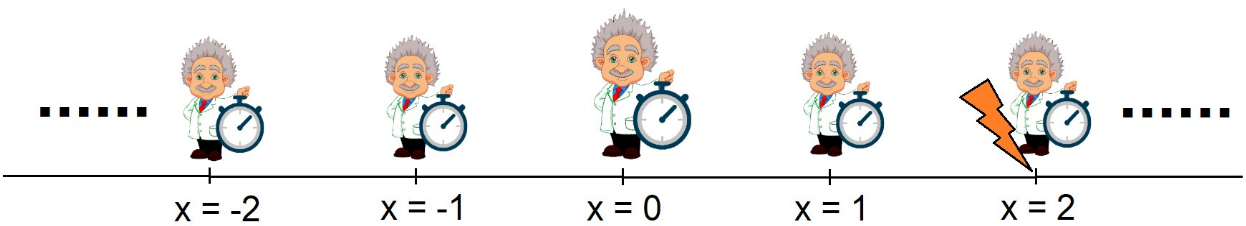


Figura 4: Construcción de un sistema de referencia.

en la que podemos imaginar el eje de coordenadas X repleto de observadores con relojes sincronizados, de manera que, cuando se afirma que un evento (la recepción de un rayo, por ejemplo) ocurrió en las coordenadas *(t, x) = (5 s, 2m)* eso significa que **el observador situado en *x = 2 m* vio caer el rayo en su posición simultáneamente a que su reloj marcara 5 s**. Como escribe Einstein en [1] "*El "tiempo" de un evento es el dato de un reloj que se encuentra en reposo en el mismo lugar y el mismo momento del evento, dicho reloj debe estar sincronizado, **para todas las determinaciones del tiempo**, con un reloj específico que se encuentre en reposo*".

Por otra parte, se debe llamar la atención en el hecho de que el criterio de sincronización de Einstein establece por definición la constancia de la velocidad de la luz, *c*, en todas las direcciones. Eso significa que **todo sistema de referencia cuyos relojes estén sincronizados siguiendo dicho criterio, medirán siempre ese mismo valor *c*.**

3. Desfases introducidos por la sincronización de Einstein: relatividad de la simultaneidad

Una vez establecido cómo debe construirse un sistema de referencia, cualquier observador puede formar el suyo, de manera que podamos tener varios sistemas de referencia, cada cual con sus coordenadas determinadas. Pero necesitamos saber cómo, conocidas las coordenadas que un observador ha obtenido para un evento, poder deducir las coordenadas del mismo evento que obtendría otro observador. En el caso en el que ambos sistemas de referencia se muevan a velocidad constante, sistema de referencia inercial, con una velocidad *v* relativa entre ambos, la Teoría de la Relatividad Especial de Einstein establece que las ecuaciones que permiten transformar las coordenadas *(t', x')* del observador que se mueve en la dirección creciente del eje X (hacia la derecha) y obtener las coordenadas *(x,t)* del observador "estático" son las Transformaciones de Lorentz, TL en adelante, cuya expresión tienen la forma:

$$\left.\begin{aligned} t &= \gamma\cdot\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right) \\ x &= \gamma\cdot\left(x'+v\cdot t'\right) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

donde *c* es la velocidad de la luz en el vacío ($3\text{x}10^8$ m/s) y donde

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{11}$$

De igual forma, las transformaciones de Lorentz inversas que permiten el cambio de coordenadas contrario están dadas por las expresiones:

$$\left.\begin{aligned} t' &= \gamma\cdot\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma\cdot\left(x-v\cdot t\right) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Ahora supongamos un sistema de referencia K' que se mueve a una velocidad *v* con respecto a otro sistema estático K. Supongamos que en K' hay dispuestos 3 relojes separados una distancia *D'*.

Consideraremos al reloj en *x' = 0* como el origen de coordenadas de K' de manera que los otros relojes se deberán sincronizar con él. Para ello el observador en *x' = 0* manda de forma simultánea en su tiempo:

$$t' = -D'/c \tag{13}$$

sendos pulsos luminosos a los dos relojes de manera que, al recibir dichos pulsos, estos deben sincronizar sus relojes asignándoles el valor *t' = 0*. Tras este proceso, los tres relojes deberán estar sincronizados conforme al criterio de Einstein.

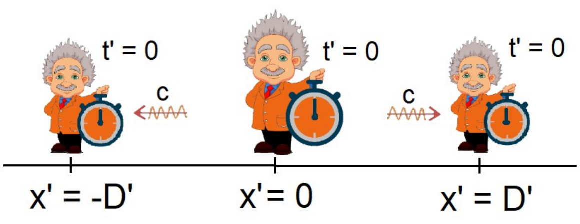


Figura 5: Proceso de sincronización en K' mediante pulsos de luz.

Pero la relatividad de la simultaneidad implica que los relojes que en el sistema K' están sincronizados no lo estarán para un observador externo K. Eso nos induce a preguntarnos cómo ve el proceso de sincronización de K' otro observador inercial que se encuentra en "reposo" en K.

Para K, puesto que K' se mueve con velocidad v en el sentido de los valores positivos del eje X, verá que el reloj en *x' = -D'* se mueve al encuentro del pulso emitido desde el origen de coordenadas, mientras que el reloj en *x' = D'* lo hace en la misma dirección del pulso de luz alejándose de él. Por tanto, el pulso de luz de sincronización llegará antes al reloj *x' = -D'*, que estará adelantado, que al reloj en *x' = D'* que estará retrasado con respecto al reloj en *x' = 0*.

El observador K puede calcular dicho desfase simplemente haciendo uso de las transformaciones de Lorentz (10) para los eventos en los que los fotones alcanzan a los relojes, y cuyas coordenadas (ct',x') para K' serán (0,-D') y (0,D') respectivamente. De esta manera, para el reloj en *x' = D'*, el retraso (signo "-") que medirá K será:

$$\Delta t_{D'} = 0 - \gamma \cdot \left(0 + D' \cdot \frac{v}{c^2}\right) = -\gamma \cdot D' \cdot \frac{v}{c^2} \qquad (14)$$

y el adelanto (signo "+") del reloj en *x' = -D'* con respecto al reloj en *x' = 0* que medirá K será :

$$\Delta t_{-D'} = 0 - \gamma \cdot \left(0 - D' \cdot \frac{v}{c^2}\right) = \gamma \cdot D' \cdot \frac{v}{c^2} \qquad (15)$$

Si ahora dividimos por γ para compensar la dilatación temporal que sufren los relojes en K', el desfase de los relojes de K' con respecto al central que calcula K sería:

$$\delta'_S = \mp D' \cdot \frac{v}{c^2} \qquad (16)$$

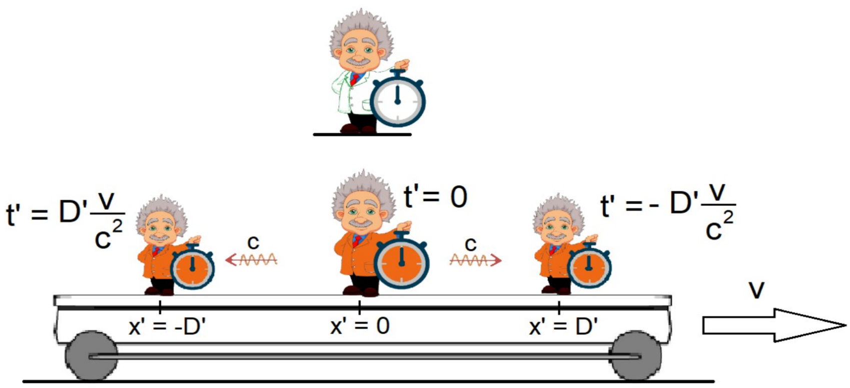


Figura 6: Proceso de sincronización visto por un observador externo.

Lo que acabamos de calcular no es más que la consecuencia de la relatividad de la simultaneidad entre sistemas de referencia inerciales.

Por otra parte, debemos hacer ver que el valor de la expresión (16) anterior se corresponde con las correcciones tipo Sagnac [3].

4. La sincronización de Einstein en el universo cerrado

Lo expuesto anteriormente para el universo plano e infinito de Minkowski tiene su aplicación al universo de Einstein. Pero en este caso hay dos peculiaridades: podemos elegir como observador externo al observador privilegiado, y la geometría cerrada del universo.

Cualquier observador en movimiento con velocidad *v* puede sincronizar de forma local sus relojes usando el criterio de Einstein. Imaginemos el caso en el que el observador móvil define su coordenada *X'* entre los límites *(-L'/2, L'/2*] y procede a sincronizar dos relojes situados a la distancia ±*D'* del origen de coordenadas. Entonces, para el observador privilegiado los desfases entre dichos relojes también cumplirán con la expresión (16).

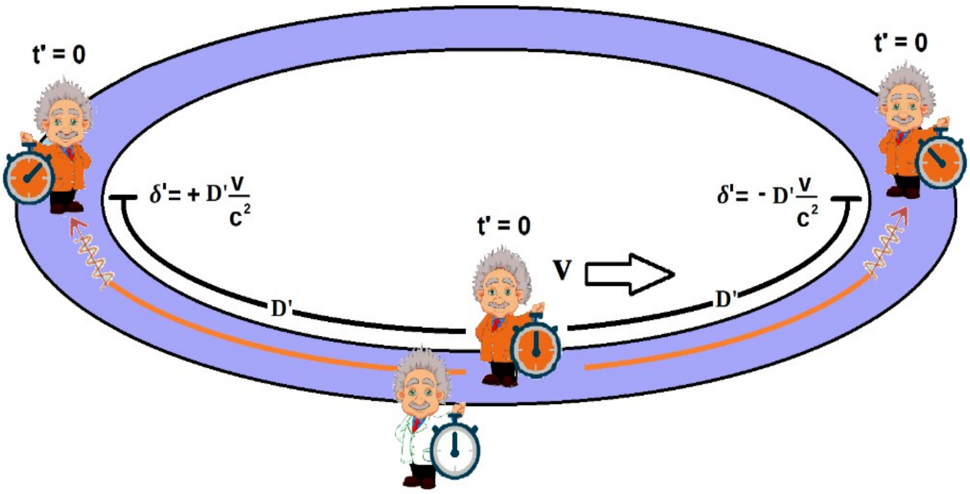


Figura 7: Desfase introducido por el proceso de sincronización entre relojes situados a una distancia D'.

Pero ¿qué ocurre si desplazamos los relojes alejándolos del central hasta que ambos se encuentren en el otro extremo del universo? Es ahora cuando entra en juego la geometría cerrada del universo, ya que, en ese caso, los dos relojes estarán juntos y a una distancia *L'/2* del central, de manera que, cuando éste realice el proceso de sincronización los dos verán que están desfasados entre ellos en la cantidad:

$$\Delta t' = \frac{L'}{2}\frac{v}{c^2} - \frac{-L'}{2}\frac{v}{c^2} = L'\frac{v}{c^2} \quad (17)$$

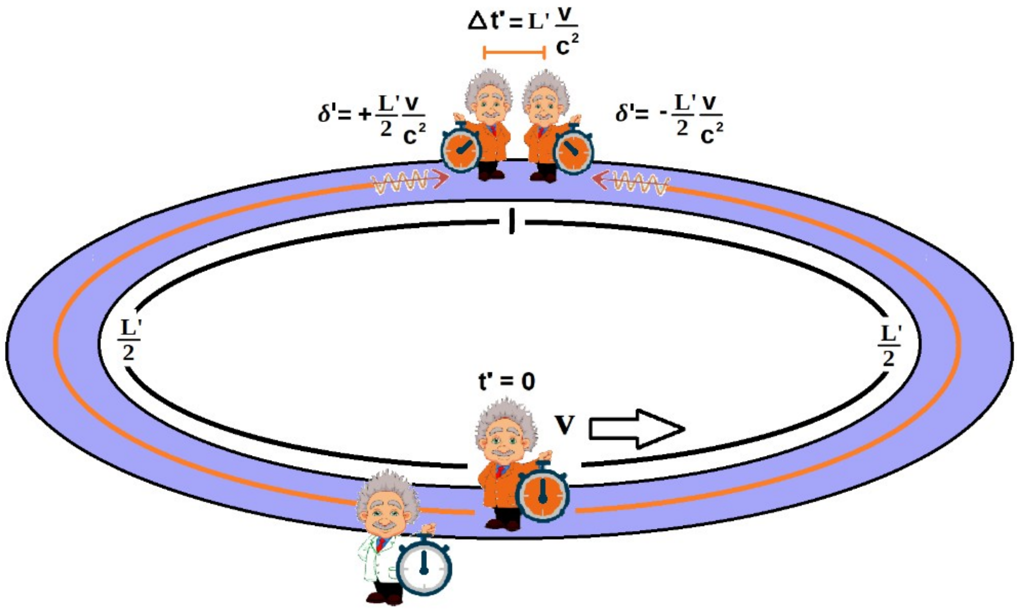


Figura 8: Desfase introducido por la sincronización entre dos relojes situados juntos al otro extremo del universo.

Es a este desfase al que se refieren algunos autores como discontinuidad temporal o discontinuidad en la simultaneidad y que se suele representar en diagramas espacio-temporales (sobre cilindros para representar la coordenada temporal y la simetría esférica del universo) como hélices espirales abiertas que se desplazan a velocidad *v,* mientras que para el observador estático sus líneas de simultaneidad se corresponden con circunferencias cerradas:

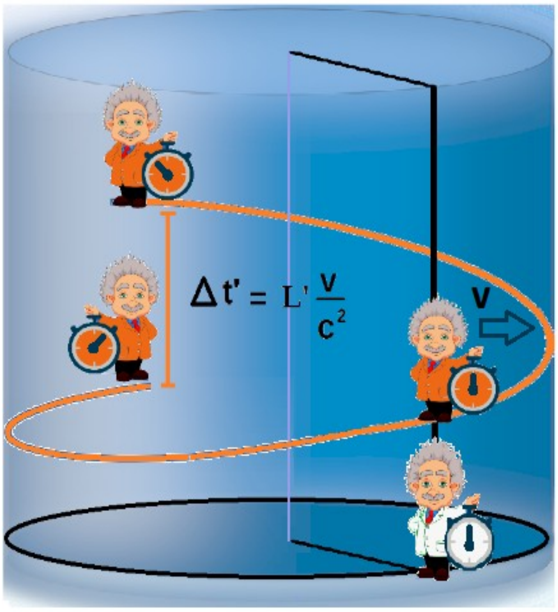


Figura 9: Representación de las líneas de simultaneidad sobre un espacio en forma de cilindro.

Pero, como puede observarse fácilmente, la figura anterior se corresponde exactamente con la situación de la Figura 8 de la que se deduce claramente el sinsentido físico de dicha discontinuidad, resultado del intento de mantener el criterio de sincronización de Einstein y su TRE.

No obstante de todo lo anterior, el observador móvil podrá hacer los experimentos que desee manteniendo la sincronización de Einstein y sus resultados estarán en correspondencia con la TRE, siempre que el experimento no sea global, es decir, mientras que no sea necesario “atravesar” la discontinuidad.

Llegados a este punto, la siguiente pregunta que surge es ¿hay alguna alternativa de sincronización que elimine el desfase entre relojes *Δt'* anterior de manera que las líneas de simultaneidad del observador en movimiento se conviertan también en circunferencias cerradas? Y la respuesta es fácil de deducir observando la Figura 8 ya que sólo es necesario cancelar el desfase con valor (16) introducido entre los relojes por la sincronización de Einstein. Pero cancelar ese desfase es equivalente a obtener una simultaneidad absoluta ya que, con ella, ahora todos los relojes en la Figura 8 marcarán 0 simultáneamente. También puede llegarse a la misma conclusión pensando que al hacer $c \rightarrow \infty$, el valor de (16) tendería a 0.

Pero, aunque usar señales superlumínicas no es físicamente posible, para cancelar ese desfase bastará con modificar el proceso de sincronización de Einstein para, en lugar de *c,* usar el valor de la velocidad de la luz ±*c'* obtenida por el observador en movimiento, siendo +*c'* la velocidad de la luz emitida en la dirección del movimiento del observador y -*c'* la emitida en la dirección contraria. Esta modificación permitiría calcular el valor de esos valores ±*c'* sin más que pensar se debe compensar el desfase δ'_S introducido por la sincronización de Einstein. Para ello sólo hay que calcular que, para un reloj situado a una distancia ±*D'*:

$$\frac{D'}{\pm c'} = \frac{D'}{c} \pm \delta_S = \frac{D'}{c} \pm D' \frac{v}{c^2} = \frac{D}{c}\left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \qquad (18)$$

donde podemos despejar los valores:

$$\left.\begin{aligned} +c' &= \frac{c}{(1+v/c)} \\ -c' &= \frac{-c}{(1-v/c)} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Ahora, por último, una vez definido el nuevo criterio de sincronización, debemos deducir un nuevo conjunto de transformaciones de coordenadas entre observadores de manera que sean compatibles con dicho criterio y que, además, deberán cumplir que las velocidades de la luz que se obtengan con ellas para un observador móvil con velocidad *v* sean las calculadas en la expresión anterior (19).

5. Nuevas transformaciones entre observadores: las Transformaciones Genéricas

En este apartado vamos a deducir unas nuevas transformaciones que relacionen las distancias y tiempos medidos por diferentes observadores en movimiento relativo y que nos permitan solucionan las contradicciones indicadas en los apartados anteriores.

Con el objetivo de distinguir estás nuevas transformaciones de las de Lorentz, TL, en lo que resta del documento, a estas nuevas relaciones las llamaremos ***transformaciones genéricas TG*** donde el término "genéricas" se ha elegido en contraposición al "especial" de la TRE.

Por otra parte, llamaremos ***observadores o sistemas de referencia genéricos (OG)*** a aquellos para los cuales son aplicables las nuevas transformaciones genéricas y cuyos relojes están sincronizados conforme al nuevo criterio de sincronización anteriormente definido.

Para la deducción de las TG partiremos de un sistema de cambio de coordenadas lineal genérico del tipo:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cdot x' + B\cdot t' \\ t &= D\cdot x' + E\cdot t' \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

en el que las coordenadas *(ct, x)* se corresponden con las de nuestro sistema de referencia K en reposo, y las coordenadas *(ct', x')* son las de un sistema de referencia K' que se mueve con respecto al primero a velocidad constante v en la dirección creciente del eje X, de manera que ambos ejes X e X' sean paralelos.

Empecemos por la coordenada temporal. Por lo que hemos visto anteriormente, es necesario eliminar el desfase introducido por el proceso de sincronización de Einstein haciendo $\delta'_S = 0$. Ello sólo es posible si eliminamos la dependencia con la posición *x'* de *t*. Es decir, debemos hacer *D = 0*.

Por otra parte, si queremos que las nuevas transformaciones sigan proporcionando la dilatación temporal típica de la TRE, no queda más remedio que hacer que *E* sea el factor de Lorentz, γ. Por tanto, tendríamos que

$$t = \gamma\cdot t' = \frac{t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{21}$$

Veamos que pasa con la coordenada *x*. Para calcular el coeficiente *B* podemos suponer que el valor *B·t'* se corresponde con la posición del observador en movimiento respecto al observador estático, es decir, que *B·t' = v·t* por lo que *x* quedaría de la forma:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cdot x' + v\cdot t \\ t &= \gamma\cdot t' \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Por otra parte, sabemos que, como el propio Einstein afirmó, para todo observador la velocidad de la luz en un trayecto de ida y vuelta es una constante universal, c. Por tanto se debe verificar que:

$$c = \frac{2L'}{\Delta t'} \tag{23}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\Delta t' = 2\frac{L'}{c} \tag{24}$$

El tiempo de mediría el observador privilegiado para dicho trayecto de ida y vuelta sería:

$$\Delta t = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \gamma^2\frac{2L}{c} \tag{25}$$

y si tenemos en cuenta (21) tendremos que:

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t' = \gamma^2\frac{2L}{c} \tag{26}$$

luego:

$$\Delta t' = \gamma\frac{2L}{c} \tag{27}$$

y si queremos que se cumpla (24) no queda más remedio que:

$$L' = \gamma L \tag{28}$$

es decir, debemos tomar $A = 1/\gamma$, obteniéndose además, la contracción de longitud de Lorentz. Y, puesto que $t = \gamma \cdot t'$, finalmente tenemos que:

$$x = \frac{x'}{\gamma} + v \cdot t = \frac{x'}{\gamma} + v \cdot \gamma \cdot t' = \frac{x' + \gamma^2 \cdot v \cdot t'}{\gamma} \tag{29}$$

Por tanto, recapitulando, tenemos que **las nuevas transformaciones genéricas serían:**

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{t = \gamma \cdot t'} \\ \boldsymbol{x = \dfrac{x' + \gamma^2 \cdot v \cdot t'}{\gamma}} \end{array}\right\}$$	(30)

y, despejando obtenemos las transformaciones inversas:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{t' = \dfrac{t}{\gamma}} \\ \boldsymbol{x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t)} \end{array}\right\}$$	(31)

6. Referencias

[1] *Einstein, A. (1905) "On the Electrodynamics of Moving Bodies", Annalen der Physik. Lpz. 17, 891.*

[2] *García, J. (2022) "Paradoja de los Gemelos en el universo estático de Einstein ('Rodolfo Pérez Paradox'), Vídeo de Youtube https://youtu.be/vsjg2ybVcoM*

[3] *Wikipedia, "Efecto Sagnac", https://es.wikipedia.org/wiki/Efecto_Sagnac*